Elektromagnetische Felder und Elektrodynamik

Studienjahr 2007-2008

Vorlesungsstoff für die Vorlesung „Elektromagnetische Felder“ (Bachelor-Studiengang):
Kap. 1, 2, 3.1-3.4,3.7, 4, 5, 6, 7, 8.1, 9, 11, 12.1-12.2

Vorlesung „Elektrodynamik“ (Master-Studiengang):
Kap. 3.5-3.6,8,10,12.3-12.5,13,14,15,16,17,18,19

überarbeitete Vorlesungsunterlagen, aus dem Skript von
Prof. Dr. Claudius Gros
Institut für Theoretische Physik
Universität des Saarlandes

überarbeitetes Skript, mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. W. Cassing, Institut für Theoretische Physik, Universität Giessen und von Prof. Dr .G. Soff, Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Dresden

Zu finden unter:

http://itp.tu-graz.ac.at/˜arrigoni/ → Elektrodynamik

Inhaltsverzeichnis

---

[1] Herzlichen Dank an Herrn G. Huhs für das Tippen!

Einführung in die Elektrodynamik

0.1 Elektrische Ladung

Während in der Mechanik die Eigenschaft *Masse* im Vordergrund steht, ist die *Ladung* von Massenpunkten Ausgangspunkt der Elektrodynamik. Sie besitzt eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften, die durch vielfältige experimentelle Messungen gesichert sind:

1.) Es gibt 2 Sorten von **Ladungen**: positive und negative. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen sich an.

2.) Die Gesamtladung eines Systems von Massenpunkten ist die algebraische Summe der Einzelladungen; die Ladung ist ein **Skalar**.

3.) Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems ist konstant und ihr Zahlenwert unabhängig vom Bewegungszustand des Systems.

4.) Ladung kommt nur als Vielfaches einer **Elementarladung** e (eines Elektrons) vor,

$$q = ne; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Klassischer Nachweis für die **Quantisierung** der Ladung ist der **Millikan-Versuch**. Den Elementarteilchen *Quarks* ordnet man zwar drittelzahlige Ladungen zu, d.h. $q = \pm(1/3)e$ bzw. $q = \pm(2/3)e$, jedoch sind diese *Quarks* im uns hier interessierenden Energiebereich nicht als freie Teilchen beobachtbar.

0.2 Elektrostatik

Das einfachste Problem der Elektrodynamik ist der Fall ruhender Ladungen, den wir mit **Elektrostatik** bezeichnen. Bringt man in die Umgebung einer (oder mehrerer) räumlich fixierter Punktladungen eine *Probeladung* q, so wirkt auf diese Probeladung eine Kraft $\mathbf{K}$, welche im allgemeinen vom Ort $\mathbf{r}$ der Probeladung abhängt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}) .$$

Ersetzt man q durch eine andere Probeladung q', so findet man für die auf q' wirkende Kraft $\mathbf{K}'$:

$$\mathbf{K}'/q' = \mathbf{K}/q .$$

Elektrisches Feld

Diese Erfahrung legt es nahe, den Begriff des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q}\mathbf{K}(\mathbf{r})$$

einzuführen. Dieses von den ruhenden Punktladungen erzeugte Feld ordnet jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ ein Tripel reeller Zahlen zu, welches sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe der Elektrostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang von Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ und elektrischem Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zu finden und daraus bei gegebener Ladungsverteilung (z.B. einer homogenen räumlichen Kugel) das Feld zu berechnen.

0.3 Magnetostatik

Bewegte Ladungen in Form stationärer Ströme sind der Ursprung magnetostatischer Felder, die wir in Analogie zu den elektrostatischen Feldern einführen wollen. Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Bringt man in die Umgebung eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters eine Probeladung q, so kann die auf q am Ort $\mathbf{r}$ wirkende Kraft geschrieben werden als

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) \;=\; q\Big(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\Big) \;.$$

Dabei ist $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit der Probeladung und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein (von $\mathbf{v}$ unabhängiges) Vektorfeld, der **magnetischen Induktion**, hervorgerufen durch den vorgegebenen stationären Strom.

Aufgabe der Magnetostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang zwischen einer stationären Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und dem magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zu finden und daraus bei gegebener Stromverteilung (z.B. für einen stationären Kreisstrom) das Feld zu berechnen.

0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Nach den bisherigen Ausführungen könnte der Eindruck entstehen, als seien das elektrische und das magnetische Feld von einander unabhängige Größen. Dass dies nicht der Fall ist, zeigen folgende einfache Überlegungen:

1.) Lorentz-Transformation. Wenn eine Punktladung Q in einem Inertialsystem Σ ruht, so misst (über die auf eine Probeladung q wirkende Kraft) ein Beobachter in Σ ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \neq 0$, jedoch kein Magnetfeld.

Für einen anderen Beobachter in einem gegenüber Σ bewegten Inertialsystem Σ' ist die Ladung bewegt. Der Beobachter in Σ' misst daher sowohl ein elektrisches Feld $\mathbf{E}' \neq 0$ als auch ein magnetisches Feld $\mathbf{B}' \neq 0$. Die Wechselwirkung zwischen der betrachteten Ladung und einer Probeladung q würde also von einem Beobachter in Σ als *rein elektrische* Wechselwirkung (vermittelt durch das Feld $\mathbf{E}$) beschrieben, während ein Beobachter in Σ' sowohl *elektrische* als auch *magnetische* Wechselwirkung feststellen würde (vermittelt durch die Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$). Diese Betrachtung zeigt, dass man elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit ansehen muss, als **elektromagnetisches** Feld.

Anmerkung: Für den in 0.3 diskutierten Fall eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters tritt kein elektrisches Feld auf, da bei einem stationären

Strom im Leiter kein *Ladungsstau* auftritt, so dass sich die im Leiter befindlichen positiven und negativen Ladungsträger (Gitterbausteine und Leitungselektronen) nach außen hin kompensieren.

2.) Kontinuitätsgleichung. Die wechselseitige Abhängigkeit von elektrischem und magnetischem Feld tritt unvermeidbar dann zu Tage, wenn wir beliebige Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ zulassen. Die Forderung der Ladungserhaltung ergibt dann die Verknüpfung von ρ und $\mathbf{j}$ via der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt}\,\rho(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \ = \ 0 \ ,$$

da die Ladung in einem bestimmten Volumen V nur ab(zu)-nehmen kann, indem ein entsprechender Strom durch die Oberfläche von V hinaus(hinein)-fließt. Dann können aber $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden.

0.5 Maxwell'sche Gleichungen

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und den Ladungen (den *Quellen* des elektromagnetischen Feldes) beschreiben die **Maxwell-Gleichungen**. Folgende Aufgabe ergibt sich:

1.) die Maxwell-Gleichungen zu formulieren und experimentell zu begründen,

2.) ihre Invarianzeigenschaften zu untersuchen, woraus sich direkt der Zugang zur speziellen Relativitätstheorie ergibt. Die Untersuchung wird zeigen, dass der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen durch eine **Lorentz-Transformation** beschrieben werden muss, d.h. dass für alle Inertialbeobachter die *gleiche Physik gilt.*

3.) Energie-, Impuls- und Drehimpuls-Bilanz für ein System geladener Massenpunkte im elektromagnetischen Feld werden dazu führen, dem elektromagnetischen Feld Energie, Impuls und Drehimpuls zuzuordnen. Daraus werden sich dann Begriffe wie **Strahlungsdruck** und die Einführung von **Photonen** ergeben.

4.) Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen. Beispiele sind die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen oder die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols.

0.6 Materie im elektromagnetischen Feld

Die Maxwell-Gleichungen bestimmen im Prinzip die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ vollständig, wenn die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r},t)$ und die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ bekannt sind. In der Praxis treten dabei folgende Probleme auf:

1.) Für ein System von N geladenen Massenpunkten müsste man die Newton'schen Bewegungsgleichungen lösen, um $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ **mikroskopisch** berechnen zu können.

Für ein Stück Materie von **makroskopischen** Dimensionen (z.B. das Dielektrikum zwischen den Platten eines Kondensators oder dem Eisenkern einer stromdurchflossenen Spule) haben wir es mit $10^{20} - 10^{25}$ Massenpunkten zu tun!

2.) Die mikroskopisch berechneten Funktionen $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ werden im allgemeinen starke Schwankungen über kleine räumliche und zeitliche Distanzen aufweisen. Die Lösung von Maxwell-Gleichungen (mehrdimensionale Integrationen) wäre dann praktisch nicht durchführbar bzw. unökonomisch!

Gemittelte Felder

Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet der folgende Kompromiss: Wir verzichten auf die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes in mikroskopischen Dimensionen (Volumina von $10^{-24}cm^3$, Zeiten von $10^{-8}sec$) und geben uns mit Mittelwerten (10^{-6} cm$^3, 10^{-3}sec$) zufrieden. Anstelle von $\rho(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ treten dann Mittelwerte der Form

$$< \rho(\mathbf{r},t) > = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int d^3x d\tau \ \rho(\mathbf{r}+\mathbf{x}, t+\tau)$$

und entsprechend für $< \mathbf{j}(\mathbf{r},t) >$, $< \mathbf{E}(\mathbf{r},t) >$ und $< \mathbf{B}(\mathbf{r},t) >$. Aus den Maxwell-Gleichungen der mikroskopischen Felder ergeben sich dann Gleichungen ähnlicher Struktur für das makroskopische elektromagnetische Feld. Die darin auftretenden Verteilungen $< \rho >$ und $< \mathbf{j} >$ werden dann durch den experimentellen Aufbau definiert bzw. *eingestellt.*

Fundamentale und makroskopische Felder

Für die Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften hat es sich als zweckmäßig erwiesen, zu den Mittelwerten der *fundamentalen* Felder, der

elektrischen Feldstärke E und der
magnetischen Induktion B,

noch zwei weitere Vektorfelder als Hilfsgrößen einzuführen: die

dielektrische Verschiebung D und die
magnetische Feldstärke H.

Die dann zusätzlich benötigten Bestimmungsgleichungen gewinnt man durch Annahme eines linearen Zusammenhanges von **E** und **D** bzw. **B** und **H**, charakterisiert durch die

Dielektrizitätskonstante ϵ und die
Permeabilität μ.

Häufig ist die makroskopische Stromverteilung nicht von außen vorgebbar, sondern noch von den zu berechnenden Feldern abhängig. Im einfachsten Fall (Ohm'sches Gesetz) setzt man einen linearen Zusammenhang zwischen makroskopischem Strom und elektrischer Feldstärke an, womit (als Proportionalitätskonstante) eine weitere Materialkonstante ins Spiel kommt: die

elektrische Leitfähigkeit σ.

Die Berechnung dieser Materialkonstanten (ϵ, μ, σ) aus der atomaren Struktur der Materie gehört in den Bereich der Atom- und Festkörperphysik und benutzt Methoden der statistischen Mechanik.

Damit ergeben sich folgende **Aufgabenstellungen**:

1.) Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Maxwell-Gleichungen.

2.) Einführung von Materialkonstanten und ihre Berechnung aus der atomaren Struktur der Materie für einfache Modelle.

3.) Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien. Beispiel: Das Reflexions- und Brechungs-Gesetz der Optik.

0.7 Literatur

An begleitender Literatur werden die folgenden Monographien empfohlen:

1. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics,*
   (Wiley, New York, 1962)
2. W. Nolting, *Elektrodynamik,*
   (Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1993)
3. T. Fließbach, *Elektrodynamik,*
   (BI-Wiss.-Verl., Wien u.a., 1994)
4. R. J. Jelitto, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik,*
   (Aula-Verlag, Wiesbaden, 1985)
5. W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik,*
   (Harri Deutsch, Thun, 1982)
6. P. Lorrain, D. Corson, *Electromagnetic fields and waves,*
   (Freeman, San Francisco, 1962)
7. G. Ludwig, *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos,*
   (Bertelsmann, Düsseldorf, 1974)
8. W. Panofsky, M. Phillips, *Classisal Electricity and Magnetism,*
   (Addison-Wesley, Reading, 1962)
9. R. Becker, F. Sauter, *Theorie der Elektrizität 1,*
   (Teubner, Stuttgart, 1973)
10. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie,*
    (Akademie-Verlag, Berlin, 1973)
11. A. Sommerfeld, *Elektrodynamik,*
    (Harri Deutsch, Thun, 1977)
12. E. Rebhan, *Theoretische Physik*
    (Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1999)

Teil I

Elektrostatik

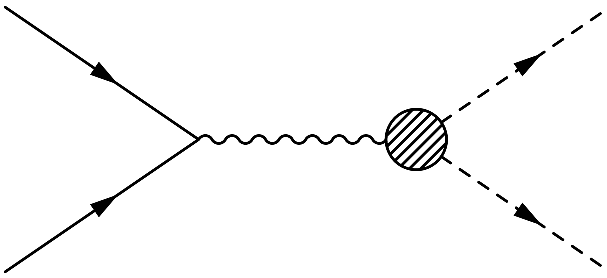
Kapitel 1

Coulomb'sches Gesetz

1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz

In der Einführung hatten wir die grundlegenden Eigenschaften der elektrischen Ladung kurz zusammengestellt. Zur experimentellen Prüfung dieser Eigenschaften benötigt man zunächst eine Messvorschrift für **Ladung**. Eine solche Messvorschrift wird im nächsten Unterkapitel nachgeliefert. Zuvor noch einige Ergänzungen zur Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz.

Paarerzeugung
Besonders eindrucksvolle Beweise für die Ladungserhaltung sind die Paar-Erzeugung und Paar-Vernichtung. So zerstrahlen z.B. ein Elektron (e^-) und ein Positron (e^+) in ein hochenergetisches *massives* Photon (γ-Quant), welches ungeladen ist; umgekehrt entsteht bei der Paar-Erzeugung (z.B. in π^+, π^- Mesonen) stets gleich viel positive wie negative Ladung.



$$+e + (-e) = 0 \qquad q = 0 \qquad + e + (-e) = 0$$

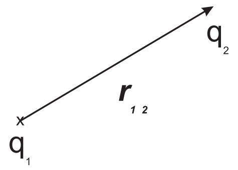
Die Ladungsinvarianz zeigt sich z.B. darin, dass Atome und Moleküle neutral sind, obwohl der Bewegungszustand von Protonen und Elektronen sehr unterschiedlich ist. Besonders klar ist das Beispiel des Helium-Atoms (^4He) und des Deuterium-Moleküls (D_2). Beide bestehen aus 2 Protonen und 2 Neutronen sowie 2 Elektronen und sind damit elektrisch neutral, obwohl der Bewegungszustand der Protonen im Kern des Helium-Atoms und des D_2-Moleküls sehr verschieden sind: das Verhältnis der kinetischen Energien ist etwa 10^6, der mittlere Abstand der Protonen im D_2-Molekül in der Größenordnung von 10^{-8} cm, im He-Kern von 10^{-13} cm.

1.2 Coulomb-Kraft

Als experimentell gesicherte Grundlage für die Elektrostatik benutzen wir das **Coulomb'sche** Kraftgesetz zwischen 2 Punktladungen:

$$\mathbf{K}_{12} \;=\; \Gamma_e \, \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \, \mathbf{r}_{12} \tag{1.1}$$

ist die von Ladung q_1 auf Ladung q_2 ausgeübte Kraft. Hierbei ist $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ und Γ_e eine noch zu bestimmende Proporotionalitätskonstante.



Eigenschaften:

1.) Anziehung (Abstoßung) für ungleichnamige (gleichnamige) Ladungen.

2.) $\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21}$: Actio = Reactio; also ist der Impuls der beiden Teilchen erhalten.

3.) Zentralkraft: da eine Punktladung (beschrieben durch die skalaren Größen m, q) im Raum keine Richtung auszeichnet. (→ Drehimpulserhaltung)

Anmerkung: Für (schnell) bewegte Ladungen gilt (1.1) nicht mehr. Das elektromagnetische Feld ist dann in die Impuls- und Drehimpulsbilanz einzubeziehen.

Gleichung (1.1) ist zu ergänzen durch das **Superpositionsprinzip**:

$$\mathbf{K}_1 \;=\; \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{31} \tag{1.2}$$

für die von 2 Punktladungen q_2 und q_3 auf q_1 ausgeübte Kraft.

Messvorschrift für Ladung

Vergleicht man 2 Ladungen q, q' anhand der von einer festen Ladung Q auf sie ausgeübten Kraft, so findet man für Punktladungen gemäß (1.1):

$$\frac{q}{q'} \;=\; \frac{K}{K'} \,. \tag{1.3}$$

Damit sind Ladungsverhältnisse durch Kraftmessung zu bestimmen: Nach Wahl einer **Einheitsladung** (Ladung des Elektrons oder Positrons) können wir Ladungen relativ zu dieser Einheitsladung messen.

Maßsysteme

Für die Festlegung der Proportionalitätskonstanten Γ_e gibt es 2 Möglichkeiten:

i) Gauß'sches **cgs**-System: Hier wählt man Γ_e als dimensionslose Konstante; speziell

$$\Gamma_e \;=\; 1 \;, \tag{1.4}$$

dann ist über (1.1) die Dimension der Ladung bestimmt zu

$$[q] \;=\; [\text{ Kraft}]^{1/2}[\text{Länge}] \;=\; \text{dyn}^{1/2} \times \text{ cm} \;. \tag{1.5}$$

Die elektrostatische Einheit ist dann diejenige Ladung, die auf eine gleich große im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt. Das Gauß'sche **cgs**-System wird in der Grundlagenphysik bevorzugt.

ii) **MKSA**-System. Zusätzlich zu den mechanischen Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) wird noch die Ladungseinheit **Coulomb** = Ampère-Sekunde definiert. Dabei ist 1 Ampère der elektrische Strom, der aus einer Silbernitratlösung pro Sekunde 1.118 mg Silber abscheidet. Schreibt man

$$\Gamma_e \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \;, \tag{1.6}$$

so nimmt die Konstante ϵ_0 den Wert

$$\epsilon_0 \;=\; 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{ Meter}^2} \tag{1.7}$$

an. Das **MKSA**-System hat sich in der angewandten Elektrodynamik (Elektrotechnik) durchgesetzt.

1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen

Die von N ruhenden Punktladungen q_i an der Orten $\mathbf{r}_i$ auf eine Probeladung q am Ort $\mathbf{r}$ ausgeübte Kraft ist nach (1.1) und (1.2):

$$\mathbf{K} \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \;=\; q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;, \tag{1.8}$$

wobei wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \tag{1.9}$$

als (statisches) **elektrisches Feld** bezeichnen, welches von den Punktladungen q_i am Ort $\mathbf{r}$ erzeugt wird. Es ist gemäß (1.15) ein Vektorfeld, da q ein Skalar ist. Bei vorgegebener Ladung q zeigt (1.15), wie man ein elektrisches Feld messen kann. Dabei ist darauf zu achten, dass die Probeladung so klein ist, dass man ihren Einfluß auf das auszumessende Feld vernachlässigen kann.

Elektrisches Potential
Analog dem Fall der Gravitationstheorie in der Mechanik kann man die Vektor-Funktion $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem elektrischen Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \;, \tag{1.10}$$

einer skalaren Funktion, durch Differentiation gewinnen:

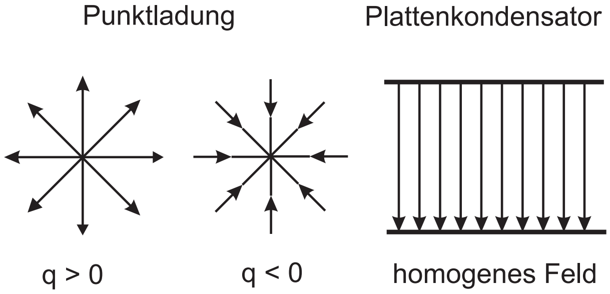
$$\mathbf{E} \;=\; -\nabla\Phi \;. \tag{1.11}$$

Die (potentielle) Energie der ruhenden Massenpunkte mit den Ladungen q_i ist dann

$$U \;=\; \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \;=\; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{r}_i) \;, \tag{1.12}$$

wobei $\Phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort $\mathbf{r}_i$ ist, welches die Ladungen dort erzeugen. Der Faktor (1/2) auf der rechten Seite von (1.12) korrigierte die Doppelzählung der Beiträge in der Summe $\sum_{i\neq j}$. Bemerkung: In (1.12) muss streng genommen die *Selbstenergie* für $i = j$ im rechten Ausdruck wieder abgezogen werden.

Beispiele:



1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen

Wir ersetzen

$$\sum_i q_i \;.... \quad \rightarrow \quad \int dV \rho(\mathbf{r}) \;... \;, \tag{1.13}$$

wobei $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte am Ort $\mathbf{r}$ ist, mit der Normierung

$$Q \;=\; \sum_i q_i \;=\; \int dV \rho(\mathbf{r}) \;. \tag{1.14}$$

Damit tritt anstelle von (1.9), (1.10), (1.12):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV'\rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\;, \tag{1.15}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV'\rho(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.16}$$

und

$$U \;=\; \frac{1}{2}\int dV\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\;. \tag{1.17}$$

Beispiel: homogen geladene Kugel

$$\rho(\mathbf{r}) \;=\; \rho_0 \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}| \le R; \quad \rho(\mathbf{r}) \;=\; 0 \quad \text{sonst.} \tag{1.18}$$

Die Integration in (1.16) lautet (mit $r \equiv |\mathbf{r}|$ und $c = \cos\theta$):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\;2\;\pi\rho_0\int_0^R d\;r'\int_{-1}^1 d\;c\;(r^2+r'^{\;2}-2r\;r'\;c)^{-1/2}$$

und ergibt (ÜB):

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|} \quad \text{für} \quad r \ge R; \quad \Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\rho_0}{\epsilon_0}(\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{6}) \quad \text{für} \quad r \le R \tag{1.19}$$

mit

$$Q \;=\; \int dV\rho(\mathbf{r}) \;=\; \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3\;. \tag{1.20}$$

Dann folgt für $\mathbf{E}$ aus (1.11):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{für} \quad r \ge R; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\mathbf{r} \quad \text{für} \quad r \le R\;. \tag{1.21}$$

Für die Energie U findet man mit (1.17) und (1.19):

$$U \;=\; \frac{\rho_0}{2}\int dV\;\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{4\pi\rho_0^2}{2\epsilon_0}\int_0^R r^2 dr\;(\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{6}) \;=\; 2\pi\frac{\rho_0^2}{\epsilon_0}\frac{2R^5}{15} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\;. \tag{1.22}$$

Anwendung: Bestimmung des klassischen Elektronenradius

Nach (1.22) wird die **Selbstenergie** eines punktförmigen Teilchens ($R \to 0$) unendlich. Nun ist nach der Relativitätstheorie die Energie eines ruhenden Teilchens, z. B. eines Elektrons, mit seiner Ruhemasse m_0 verknüpft durch

$$E_0 \;=\; m_0 c^2\;. \tag{1.23}$$

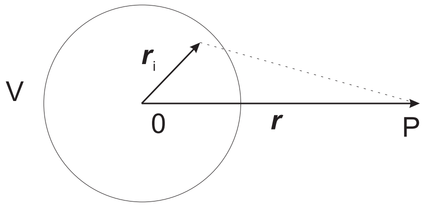
Ein streng punktförmiges (geladenes) Teilchen hätte also nach (1.22) eine unendlich große Ruhemasse! Führen wir andererseits die gesamte (endliche) Ruhemasse eines Elektrons auf seine elektrostatische Energie zurück, so müssen wir dem Elektron einen endlichen Radius R_0, den *klassischen Elektronenradius* zuordnen,

$$R_0 \;=\; \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \;\approx\; 10^{-13}\,\mathrm{cm} \;=\; 1\,\mathrm{fm} \;=\; 10^{-5}\,\mathring{A}\;. \tag{1.24}$$

Für Dimensionen $< 10^{-13}$ cm müssen wir also für Elektronen mit Abweichungen vom Coulomb'schen Gesetz rechnen.

1.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine auf ein endliches Volumen V begrenzte Ladungsverteilung (diskret oder kontinuierlich) und untersuchen ihr Potential Φ in einem Punkt P weit außerhalb von V.



Der Koordinatenursprung 0 möge innerhalb V liegen; wir können z.B. 0 als Ladungsschwerpunkt, definiert durch

$$\mathbf{r}_q \;=\; \frac{\sum_i |q_i| \mathbf{r}_i}{\sum_i |q_i|} \tag{1.25}$$

wählen. Solange $r_i \ll r$, können wir (1.10) durch eine Taylor-Reihe darstellen,

$$\Phi \;=\; \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + ... \;, \tag{1.26}$$

wenn wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i + r_i^2}} \;=\; \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \left(2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i - r_i^2\right)/r^2}} \tag{1.27}$$

verwenden und in $\left(2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i - r_i^2\right)/r^2$ entwickeln. Mit $(1-x)^{-1/2} = 1 + x/2 + 3x^2/8 + O(x^3)$ ergibt sich:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \;=\; \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{\left(2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i - r_i^2\right)}{r^3} + \frac{3}{8}\frac{\left(2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i - r_i^2\right)^2}{r^5} + \dots\,. \tag{1.28}$$

Wenn wir nun noch die Terme geeignet nach Potenzen von x_i/r etc. zusammenfassen, finden wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \;=\; \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{3\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i\right)^2 - r_i^2 r^2}{r^5} + \dots\,. \tag{1.29}$$

Für das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ finden wir somit

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\frac{r^k Q_{kl} r^l}{r^5} + \dots\,. \tag{1.30}$$

Die Terme bedeuten:

1.) Monopol-Anteil

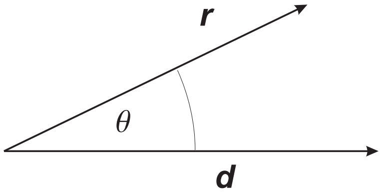
$$\Phi_0(\mathbf{r}) \;=\; \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \;=\; \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\;. \tag{1.31}$$

Die Gesamtladung (oder **Monopolmoment**) $\boxed{Q \;=\; \sum_i q_i}$ erzeugt in 0. Näherung der Taylor-Entwicklung ein Feld, welches aus genügend großer Entfernung dem einer in 0 lokalisierten Punktladung entspricht.

2.) Dipol-Anteil

$$\Phi_1(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \;=\; \frac{d\;cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\;. \tag{1.32}$$

Das **Dipolmoment d** ist $\boxed{\mathbf{d} \;=\; \sum_i q_i\mathbf{r}_i}$. Der Winkel θ ist der Winkel zwischen **r** und **d**:



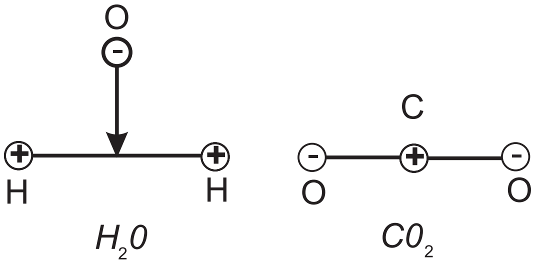
Abhängigkeit des Dipolmoments vom Koordinatenursprung Verschiebt man den Ursprung 0 um **a**, so wird

$$\mathbf{d}' \;=\; \sum_i q_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \;=\; \mathbf{d} - Q\mathbf{a}. \tag{1.33}$$

Falls $Q \neq 0$, kann man **a** so wählen, dass **d**' = 0 wird. Wenn dagegen $Q = 0$ ist, so wird dagegen $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$ unabhängig vom Ursprung und das Dipolmoment beschreibt eine echte *innere* Eigenschaft des betrachteten Systems.

Konstruktionsanleitung: Man bestimme die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladungsträger. Fallen diese zusammen, so ist $\mathbf{d} = \sum_i q_i\mathbf{r}_i = 0$. Andernfalls gibt ihre Verbindungslinie die Richtung von **d**; ihr Abstand ist ein Maß für den Betrag von **d**.

Beispiel: Moleküle.



3.) Quadrupol-Anteil.

$$\Phi_2(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\frac{r^kQ_{kl}r^l}{r^5} \tag{1.34}$$

Aus $r^kQ_{kl}r^l \;=\; \sum_i q_i\left[3\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i\right)^2 - r_i^2r^2\right]$ finden wir für die Elemente Q_{kl} des **Quadrupoltensors** Q:

$$\boxed{Q_{kl} \; = \; \sum_i q_i \left(3 r_i^k r_i^l - \delta_{kl} r_i^2\right)} \tag{1.35}$$

Hierbei sind die Indizes $k, l = x, y, z$ (mit $\mathbf{r} = (r^x, r^y, r^z)$ und $\mathbf{r}_i = (r_i^x, r_i^y, r_i^z)$) und die Einstein'sche Summenkonvention gilt in (1.34). Der Quadrupol-Tensor ist symmetrisch und reell und kann daher stets diagonalisiert werden. Es besteht hier eine weitgehende Analogie zum Trägheitstensor in der Mechanik.

Im Hauptachsensystem ist der Quadrupol-Tensor diagonal, $Q_{kl} = Q_k \, \delta_{kl}$. Wir finden, z.B. für Q_x,

$$Q_x \; = \; \sum_i q_i \left(3x_i^2 - r_i^2\right) \; = \; \sum_i q_i \left(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right) \; . \tag{1.36}$$

(1.36) zeigt, dass die Eigenwerte Q_k die Abweichungen von der Kugelsymmetrie beschreiben, denn für sphärische Ladungsverteilungen wird:

$$\sum_i q_i \; x_i^2 \; = \; \sum_i q_i \; y_i^2 \; = \; \sum_i q_i \; z_i^2 \quad \rightarrow \quad Q_m \; = \; 0. \tag{1.37}$$

Spezialfall: Axialsymmetrie

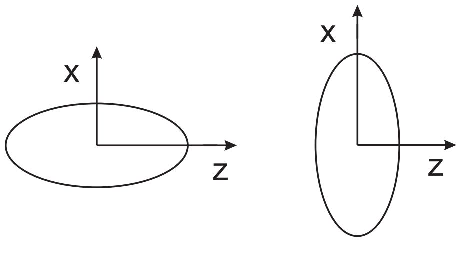
Wir betrachten Rotationsinvarianz um die z-Achse. Dann wird

$$Q_x \; = \; Q_y \; = \; \sum_i q_i \left(x_i^2 - z_i^2\right) \; = \; -\frac{1}{2} \sum_i q_i \left(2z_i^2 - 2x_i^2\right) \; = \; -\frac{1}{2} Q_z, \tag{1.38}$$

d.h. der Quadrupol-Anteil $\Phi_2(\mathbf{r})$ ist durch eine Zahl, das **Quadrupolmoment** $Q_0 \equiv Q_z/2$, zu kennzeichnen. Für diesen Fall ist die Winkelabhängigkeit von Φ_2 leicht anzugeben (wir verwenden $Q_z = 2Q_0$, $Q_x = Q_y = -Q_0$):

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}) \; &= \; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_x x^2 + Q_y y^2 + Q_z z^2}{2r^5} \; = \; \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2r^5} \\ &= \; \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3z^2 - r^2)}{2r^5} \; = \; \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Gleichung (1.39) zeigt die für den Quadrupol-Anteil charakteristische r-Abhängigkeit; die Winkelabhängigkeit ist deutlich verschieden von der des Dipol-Terms (1.32).



Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Analog zu Abschnitt 1.4 erhalten wir für eine kontinuierliche (räumlich begrenzte) Ladungsverteilung:

$$\mathbf{d} \;=\; \int dV \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}\ . \tag{1.40}$$

Analog wird Gleichung (1.36) zu:

$$Q_x \;=\; \int dV \rho(\mathbf{r})(2x^2 - y^2 - z^2). \tag{1.41}$$

Beispiel: Eine ganze Reihe von Atomkernen ist (axialsymmetrisch) deformiert und elektrostatisch durch ein Quadrupolmoment charakterisiert. Die Abweichungen von der Kugelsymmetrie können dabei sowohl *positiv*, $Q_0 > 0$, als auch *negativ*, $Q_0 < 0$, sein, was anschaulich einer *Zigarre* bzw. einer *Scheibe* entspricht.

E-Feld eines Dipols

Das **E**-Feld eines Dipols kann mit Hilfe von (1.32) und von

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi_1(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\ r^3} \tag{1.42}$$

berechnet werden. Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}\boldsymbol{\nabla}r^{-3} + r^{-3}\ \boldsymbol{\nabla}\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}\ 3\ r^{-4}\ \frac{\mathbf{r}}{r} - r^{-3}\ \mathbf{d}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\ r^5}\left(3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\ \mathbf{r} - r^2\ \mathbf{d}\right) \end{aligned} \tag{1.43}$$

Kapitel 2

Grundlagen der Elektrostatik

2.1 Fluss eines Vektor-Feldes

Wir wollen im folgenden nach äquivalenten Formulierungen des Coulomb'schen Gesetzes suchen. Dazu führen wir den Begriff des Flusses eines Vektor-Feldes ein.

Ein Vektor-Feld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sei auf einer Fläche F definiert. F sei *messbar* und *zweiseitig*, d.h. F möge einen endlichen Flächeninhalt besitzen und *Ober*- und *Unterseite* von F seien (durch die Flächennormale $\mathbf{n}$) wohl definiert. **Gegenbeispiel**: das Möbius'sche Band.

Den Fluss Φ_F des Vektor-Feldes $\mathbf{A}$ durch die Fläche F definieren wir dann durch das Oberflächenintegral

$$\Phi_F \; = \; \int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} \; = \; \int_F A_n df \; , \tag{2.1}$$

wobei $A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ die Komponente von $\mathbf{A}$ in Richtung der Flächennormalen $\mathbf{n}$ ist. Das gerichtete Flächenelement $d\mathbf{f}$ ist parallel zu $\mathbf{n}$, $df = |d\mathbf{f}|$.

Zur Interpretation von (2.1) betrachten wir eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und der Dichte $\rho(\mathbf{r})$. Wählen wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \; = \; \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) \; , \tag{2.2}$$

so bedeutet

$$\int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} \; = \; \int_F \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \tag{2.3}$$

die pro Zeiteinheit durch F fließende Menge Flüssigkeit. (2.3) zeigt, dass nur die senkrecht zur Strömung stehende Fläche wirksam wird.

2.2 Satz von Gauß: Anwendung auf die Elektrostatik

Wir wählen nun für $\mathbf{A}$ das elektrostatische Feld $\mathbf{E}$ und für F eine geschlossene Fläche mit den oben erwähnten Eigenschaften, die das Volumen V_F abgrenzt. Dann ist der **Fluss des elektrischen Feldes**

$$\Phi_F = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \tag{2.4}$$

Der Satz von Gauß sagt, daß Φ_F gleich dem Volumenintegral der Divergenz von $\mathbf{E}$ in V_F ist:

$$\Phi_F = \int_{V_F} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\, dV \ . \tag{2.5}$$

Wir benutzen für $\mathbf{E}$ den Ausdruck (1.15) zusammen mit der für die Elektrodynamik wichtigen Beziehung (ÜBG.)

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \ , \tag{2.6}$$

das gibt für die Divergenz des elektrischen Feldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \ = \ \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \ . \tag{2.7}$$

Wir benutzen (2.7) in (2.5) und erhalten

$$\Phi_F = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_F} dV \rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \ , \tag{2.8}$$

wo Q die in dem Volumen V enthaltene Gesamtladung ist. Aus (2.8) sehen wir also, dass der Gesamtfluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche F durch die darin enthaltene Ladung verursacht wird. Die Ladung ist also eine „Quelle“ für die elektrischen Feldlinien.

2.3 Anwendungen des Gauß’schen Satzes

Für symmetrische Ladungsverteilungen bietet (2.8) die Möglichkeit, die Feldstärke $\mathbf{E}$ mit geringem Aufwand zu berechnen. Wir betrachten 2 Beispiele:

1.) Feld einer homogen-raumgeladenen Kugel
Sei

$$\rho(\mathbf{r}) \ = \ \rho(r) \quad \text{für} \quad r \leq R, \quad \rho(\mathbf{r}) \ = \ 0 \quad \text{sonst.} \tag{2.9}$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie ist $\mathbf{E}$ radial gerichtet, so dass

$$\Phi_F \ = \ 4\pi r^2 E(r) \ = \ \frac{Q_r}{\epsilon_0} \ , \tag{2.10}$$

wobei Q_r die in einer konzentrischen Kugel mit Radius r enthaltene Ladung ist.

Für Punkte mit $r \geq R$ ist $Q_r = Q$ die Gesamtladung und es folgt aus (2.10):

$$E(r) \ = \ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für} \quad r \geq R. \tag{2.11}$$

Für $r \leq R$ hängt das Ergebnis von der speziellen Form von $\rho(r)$ ab. Als Beispiel wählen wir

$$\rho(r) \ = \ \rho_0 \ = \ \text{const,} \tag{2.12}$$

dann wird:

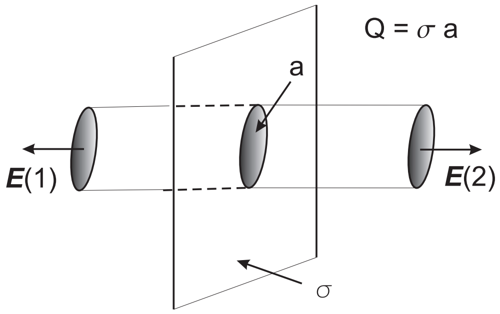
$$Q_r \ = \ \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 \ , \tag{2.13}$$

also wie in (1.21):

$$E(r) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_r}{r^2} \;=\; \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r. \tag{2.14}$$

Man vergleiche den Rechenaufwand hier mit dem, den Gleichung (1.15) erfordert!

2.) Homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebene



Aus Symmetriegründen steht **E** senkrecht zur Ebene, der Betrag E ist gleich für die Punkte 1 und 2, welche von der Ebene den Abstand r haben mögen. Der Gauß'sche Satz ergibt dann:

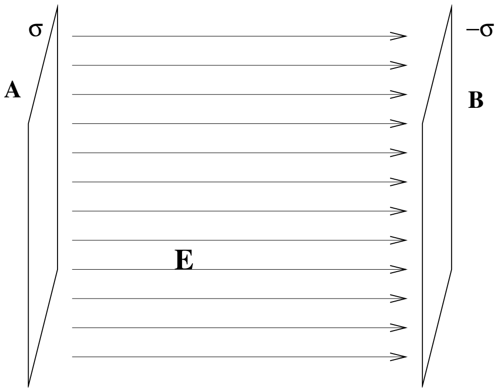
$$\Phi_F \;=\; \oint_F \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} \;=\; aE(1) + aE(2) \;=\; \frac{Q}{\epsilon_0} \;=\; \frac{\sigma a}{\epsilon_0}\;, \tag{2.15}$$

wo a die Zylindergrundfläche ist und σ die Flächenladungsdichte. Vom Zylinder-Mantel erhält man keinen Beitrag, da **E** keine Komponente in Richtung der Normalen auf dem Zylinder-Mantel hat. Ergebnis:

$$E \;=\; \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{2.16}$$

unabhängig von r (Kondensator).

Ein **Plattenkondensator** besteht aus zwei parallele Ebenen mit entgegengesetzte Flächeladungsdicthen σ und $-\sigma$, so dass aus (2.16) verschwindet das **E**-Feld ausserhalb der Ebenen. Zwischen den Ebenen ist das Gesamtfeld (in Betrag) $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



Das Potential zwischen den Ebenen wird bestimmt durch $\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}$. Die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Ebenen ist also $V = \Phi(A) - \Phi(B) = E\ d$, wo d der Abstand zwischen den Ebenen ist.

Die Kapazität eines Kondensators mit Gesamtfläche F, der also eine Gesamtladung $Q = F\sigma$ speichert ist definiert als

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{2.17}$$

und ist gleich

$$C = \frac{F\sigma}{d\sigma/\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 F}{d} \tag{2.18}$$

und hängt nur von der Geometrie des Kondensators ab.

2.4 Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential

Alternativ kann die Beziehung (2.8) zwischen Divergenz von **E** und Gesamtladung in der differentiellen Form (2.7) ausgedrückt werden:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\;. \tag{2.19}$$

Man kann also (2.19) - statt des Coulomb-Gesetzes (1.15) als Grundlage für die Elektrostatik („Postulat") nehmen. In der Tat ist (2.19) eine der *Maxwell Gleichungen* für das elektrische Feld.

Geht man von (2.19) aus sieht man, dass diese Gleichung sich nicht verändert, wenn man zu **E** eine beliebige divergenzfreie Vektorfunktion $\mathbf{E}'$ addiert; Gleichung (2.19) reicht daher zur Bestimmung des elektrischen Feldes nicht aus.

Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

Eine weitere differenzielle Beziehung für **E** erhalten wir aus der Tatsache, dass **E** ein konservatives Feld ist (vgl. (1.11)):

$$\mathbf{E} \;=\; -\nabla\Phi, \tag{2.20}$$

wobei Φ hier das elektrische Potential ist. Gleichung (2.20) ist über die Vektoridentität (ÜB)

$$\nabla\times(\nabla f) \;=\; 0\;, \tag{2.21}$$

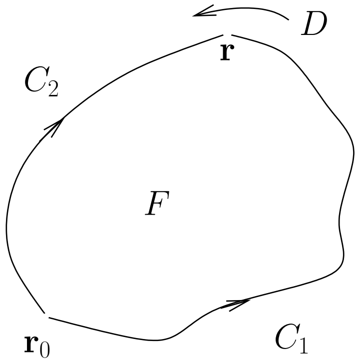
äquivalent zur *Wirbelfreiheit*

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E} \;=\; 0} \tag{2.22}$$

des elektrischen Feldes.

Für gegebenes **E**-Feld, kann man das Potential Φ aus der Inversion von (2.20) (bis auf einer Konstante) erhalten, nämlich:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_0) - \int_{C(\mathbf{r}_0\to\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{l}'\;, \tag{2.23}$$



i. e. mit einem Kurvenintegral des **E**-Feldes von einem gegebenen Startpunkt $\mathbf{r}_0$ zum Aufpunkt **r**. Dadurch, dass **E** konservativ ist, hängt das Integral in (2.23) nur vom Anfang- und Endpunkt, nicht aber von der Wahl der Verbindungskurve $C(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r})$.
Das kann man auch mit Hilfe des Stokschen Satzes beweisen. Wir berechnen die Differenz zwischen den Integralen (2.23) auf zwei unterschiedlichen Kurven C_1 und C_2:

$$\left(\int_{C_1(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r})} - \int_{C_2(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r})} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = \oint_D \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \tag{2.24}$$

wo D die geschlossene Kurve, die aus C_1 und C_2 besteht, ist. Aus dem Stokschen Satz haben wir

$$\oint_D \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = \int_F \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \tag{2.25}$$

was, wegen $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$, verschwindet. Dieses Ergebnis gilt nicht mehr in der Elektrodynamik. Da ist das **E**-Feld nicht mehr konservativ und (2.23) gilt nicht mehr, da das Integral von der Verbindungskurve abhängig ist.

Im Prinzip reichen Gl. (2.19) und (2.22) aus, um die Feldstärke des elektrostatischen Feldes für gegebene Randbedingungen (siehe Kap. 3) zu bestimmen.

Poisson'sche Gleichung

In der Praxis geht man noch einen Schritt weiter von der Feldstärke **E** zum Potential Φ, aus dem sich durch Differentiation gemäß (2.20) **E** gewinnen lässt. Setzt man (2.20) in (2.19) ein, so erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) \;=\; \boxed{\nabla^2 \Phi \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{2.26}$$

die *Poisson'sche Gleichung* mit der Abkürzung

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.27}$$

für den *Laplace-Operator* ∇^2 (öfter auch mit Δ bezeichnet).

Laplace Gleichung

Hat man eine Lösung von (2.26) gefunden, so kann man dazu eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, der *Laplace-Gleichung*,

$$\nabla^2 \Phi \;=\; 0 \tag{2.28}$$

addieren und erhält eine neue Lösung von (2.26). Diese Mehrdeutigkeit kann man durch Vorgabe von Randbedingungen beseitigen. Für die weitere Diskussion sei auf Kapitel 3 verwiesen!

2.5 Energie des elektrostatischen Feldes

Um eine Punktladung q_1 aus dem Unendlichen an eine Ladung q_2 auf den Abstand r_{12} heranzubringen, benötigt (oder gewinnt) man die Energie

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} . \tag{2.29}$$

Will man aus N Punktladungen q_i eine bestimmte (durch die Abstände der Ladungen q_i charakterisierte) Ladungsanordnung aufbauen, so benötigt (oder gewinnt) man entsprechend die Energie (siehe auch (1.12))

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} ; \tag{2.30}$$

der Faktor 1/2 sorgt dafür, dass Doppelzählungen vermieden werden, die Einschränkung $i \neq j$ schließt *Selbstenergien* der Punktladungen aus.

Punktladungen vs. Feldenergie

Stellt man das Bild der Punktladungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, so interpretiert man U als die *potentielle Energie* eines Systems von geladen Massenpunkten. Man kann auch das Bild des elektrischen Feldes in den Mittelpunkt stellen. Dann ist die zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigte Energie U im elektrischen Feld *gespeichert* in Form von *Feldenergie*. Da die Coulomb-Kraft konservativ ist, geht die beim Aufbau des Feldes (also der Herstellung einer bestimmten Ladungsanordnung) geleistete Arbeit nicht verloren.

Energie des elektrischen Feldes

Um den Zusammenhang der beiden Betrachtungsweisen quantitativ zu fassen, formen wir (2.30) um (vergl. Kapitel 1):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV , \tag{2.31}$$

wobei $\Phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort $\mathbf{r}_i$ der i-ten Punktladung ist, welches die anderen Punktladungen dort erzeugen. Gleichung (2.31) können wir mit (2.26) umschreiben zu:

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \Phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) \, dV . \tag{2.32}$$

Gleichung (2.32) beschreibt die Energie U vollständig durch das Potential Φ, d.h. durch das elektrostatische Feld ohne Bezug auf die Ladungen, die dieses Feld erzeugt haben. Man kann U statt durch das Potential Φ durch die Feldstärke $\mathbf{E}$ ausdrücken, wenn man die Identität (vgl. die II Green'sche Identität aus der Vektoranalysis)

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \nabla^2 g \tag{2.33}$$

für $f = g = \Phi$ benutzt:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \Phi(\mathbf{r}))^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_F \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{f} , \tag{2.34}$$

wo im letzten Ausdruck die Gauß'sche Formel angewendet worden ist, wonach

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) \, dV \;=\; \oint_F \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{f} \tag{2.35}$$

mit F als Oberfläche von V. Wenn sich nun alle Ladungen im Endlichen befinden, so verschwindet in (2.34) das Oberflächenintegral mit zunehmendem Volumen V, da $\Phi\nabla\Phi$ mit wachsendem Abstand vom Ladungszentrum wie R^{-3} abfällt, während die Oberfläche nur mit R^2 anwächst. Im Limes $V \to \infty$ bleibt also:

$$U \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \Big(\nabla \Phi(\mathbf{r})\Big)^2 \, dV \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, dV \tag{2.36}$$

als die im Feld gespeicherte Energie.

$$\boxed{\epsilon_0 E^2(\mathbf{r})/2}$$

ist somit die *Energiedichte* des elektrischen Feldes.

2.6 Multipole im elektrischen Feld

Wenn eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung ρ in ein äußeres elektrostatisches Feld, gegeben durch sein Potential Φ_a, gebracht wird, so gilt (entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 2.5) für seine Energie

$$U \;=\; \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi_a(\mathbf{r}) \, dV \;, \tag{2.37}$$

wenn man annimmt, dass das äußere Feld durch ρ nicht (merklich) geändert wird und die das äußere Feld Φ_a hervorrufenden Ladungen sich außerhalb des Gebietes V befinden, auf das ρ beschränkt ist. (Vorsicht: wir betrachten hier die Energie der Ladungsverteilung ρ in einer *gegebenen* Ladungsverteilung. Die Energie der letzteren wird daher hier nicht gezählt. Damit erklärt sich das Fehlen des Faktors 1/2 in (2.37) verglichen mit (2.31)). Weiter sei Φ_a in V langsam veränderlich, so dass wir Φ_a bzgl. des Ladungsschwerpunktes in eine Taylor-Reihe entwickeln können:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) \;=\; \Phi_a(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \Phi_a(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_a(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \, ... \; . \tag{2.38}$$

Da im Gebiet V für das äußere Feld

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_a \;=\; 0 \tag{2.39}$$

nach Annahme gilt, können wir (vergl. Abschnitt 1.5) Gleichung (2.38) wie folgt umformen:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) \;=\; \Phi_a(0) - \sum_{i=1}^{3} x_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} \big(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}\big) \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \, ... \; , \tag{2.40}$$

denn

$$\sum_{i,j}(-r^2)\delta_{ij}\frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j} \;=\; -r^2\sum_i \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_i} \;=\; -r^2\,\nabla\cdot\mathbf{E_a} \;=\; 0\ .$$

Kombination von (2.37) und (2.40) ergibt zusammen mit $Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r})\,(3x_ix_j - r^2\delta_{kl})$ (siehe (1.35))

$$U \;=\; Q\Phi_a(0) - \sum_{i=1}^{3} d_iE_{ia}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \ldots\ . \tag{2.41}$$

Gleichung (2.41) zeigt, wie die Multipolmomente einer Ladungsverteilung ρ mit einem äußeren Feld $\mathbf{E}_a$ in Wechselwirkung treten:

- die Gesamtladung Q mit dem Potential Φ_a,
- das Dipolmoment $\mathbf{d}$ mit der Feldstärke $\mathbf{E}_a$,
- der Quadrupoltensor Q_{ij} mit dem Feldgradienten $\partial E_{ia}/\partial x_j$, etc.

Anwendungsbeispiele

Atomare Dipole in äußeren elektrischen Feldern, Wechselwirkung des Kern-Quadrupolments mit der Elektronenhülle (nützlich für NMR, NQR).

Kapitel 3

Randwertprobleme der Elektrostatik

3.1 Eindeutigkeitstheorem

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die Poisson-Gleichung bzw. die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, wenn eine der folgenden Randbedingungen gilt:

(i) Dirichlet - Bedingung

$$\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } F, \textit{ oder} \tag{3.1}$$

(ii) von Neumann-Bedingung

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi(\equiv \frac{\partial\Phi}{\partial n}) \text{ ist auf einer geschlossenen Fläche } F \text{ vorgegeben }, \tag{3.2}$$

n ist die Normale zur Fläche F.

Beweis

Wir nehmen an, dass es 2 Lösungen Φ_1 bzw. Φ_2 von

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \tag{3.3}$$

mit den gleichen Randbedingungen, (3.1) oder (3.2), gibt. Dann gilt für die Differenz $U = \Phi_1 - \Phi_2$:

$$\nabla^2 U = 0 \tag{3.4}$$

in dem von F umschlossenen Volumen V. Weiter ist wegen der Randbedingungen

$$U = 0 \quad \text{auf } F \tag{3.5}$$

oder

$$\mathbf{n}\cdot\nabla U = 0 \quad \text{auf } F\ . \tag{3.6}$$

Mit der Identität

$$\nabla\cdot(U\nabla U) = (\nabla U)^2 + U\nabla^2 U \tag{3.7}$$

und (3.4) wird:

$$\int_V (\nabla U)^2 \, dV \;=\; \int_V \left(\nabla \cdot (U \nabla U) \;-\; U \underbrace{\nabla^2 U}_{=0} \right) dV \;=\; \oint_F \underbrace{U \; \nabla U \cdot d\mathbf{f}}_{=0} \;=\; 0 \tag{3.8}$$

mit Hilfe der Formel von Gauß, falls eine der beiden Bedingungen (3.5) oder (3.6) gilt. Also:

$$\int_V (\nabla U)^2 \, dV \;=\; 0 \;, \tag{3.9}$$

d.h. es ist in V:

$$\nabla U \;=\; 0 \;, \tag{3.10}$$

da $(\nabla U)^2 \geq 0$. Damit wird

$$U \;=\; \text{const} \tag{3.11}$$

und Φ_1 und Φ_2 unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, die den **E**-Feld nicht beeinflusst.

Sonderfall $V \to \infty$
Wenn V der gesamte R_3 ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig, falls ρ auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und $\Phi(\mathbf{r})$ asymptotisch so schnell abfällt, dass

$$r^2 \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} \;\to\; 0 \qquad \text{für} \;\; r \;\to\; \infty, \tag{3.12}$$

wo $\partial\Phi/\partial n$ die Normalen-Ableitung von Φ bezeichnet. Der obige Beweis überträgt sich direkt, wenn man beachtet, dass die Oberfläche bei festem Rauminhalt wie r^2 wächst.

3.2 Physikalische Anwendungen: Metalle

Warum Probleme mit Randbedingung? Betrachten wir zunächst die Eigenschaften eines *idealen* Metalles (Leiters) *im statischen Fall.* Ein ideales Metall ist ein Gegenstand, der nur frei bewegliche Ladungen (i.d.r. Elektronen) besitzt. Wird ein solcher idealer Leiter in ein elektrostatisches Feld gebracht, so wirken auf die freien Ladungen Kräfte, welche die Ladungen so lange verschieben, bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt. Das **E**-Feld der verschobenen Ladungen addiert sich dann zum ursprünglichen **E**-Feld. Was zählt ist das gesamte **E**-Feld.

Die Gleichgewichtbedingungen sind:
(i) $\mathbf{E} = 0$ *innerhalb* des ganzen Metalles. Wäre dies nicht der Fall, so würden die frei beweglichen Ladungen Kräfte erfahren, welche zu einer Umverteilung der Ladungsträger im Metall führen, bis $\mathbf{E} = 0$.
(ii) wegen (i) ist Φ **konstant im ganzen Metall.**
(iii) wegen (ii) und der Poisson Gleichung (2.26), **verschwindet die Ladungsdichte innerhalb des Metalles.** Im idealen Metall kann sich nur eine verschwindend dünne Ladungsschicht (Flächenladung) auf der Oberfläche des Metalles befinden.

Wir sind bereits in Gl. (2.15) der Flächeladungsdichte σ begegnet. In einem Metall hängt σ im Allgemeinen vom der Ortskoordinate $\mathbf{r}$ auf der Metalloberfläche ab:

$\sigma(\mathbf{r})$ =*(Ladung pro Fläche)*. Wir betrachten die Komponenten des $\mathbf{E}$-Feldes parallel ($\mathbf{E}_\parallel$) und senkrecht ($\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$, wo $\mathbf{n}$ die Normale ist) zur Metalloberfläche.
(iv) Es sei $\mathbf{E}_2$ das $\mathbf{E}$-Feld auf der Außenseite und $\mathbf{E}_1$ auf der Innenseite des Metalles [eigentlich ist aus (i) $\mathbf{E}_1 = 0$ im Metall, aber wir wollen das zunächst allgemein betrachten], dann möchten wir zeigen, dass

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel} \ , \tag{3.13}$$

d. h. die Parallelkomponente ist stetig durch die Oberfläche, sowie

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \ , \tag{3.14}$$

d. h. **die Normalkomponente hat eine Unstetigkeit, die proportional zu σ ist.**

Um dies zu beweisen, benutzen wir die Integralform des Gauß'schen Satzes, sowie die Wirbelfreiheit von $\mathbf{E}$ (2.22). Aus zwei kleinen Flächenelementen (mit Fläche f), die parallel zur Oberfläche liegen, bilden wir ein Volumenelement $V = f\ h$ (Abb. 3.1). Der Abstand h zwischen den beiden Flächenelementen wird dabei (verschwindend) klein gewählt ($h^2 \ll f$). Nach dem Gauß'schen Satz ist die Gesamtladung $q = f\ \sigma$ im Volumenelement gleich

$$q = f\ \sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0\ \phi_V \ , \tag{3.15}$$

wo ϕ_V der Fluss des $\mathbf{E}$-Feldes durch die Fläche um V ist. Für verschwindend kleines h können wir den Fluss durch die Seitenflächen vernachlässigen, und wir haben

$$\phi_V = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)\ f \ . \tag{3.16}$$

Das gibt (3.14).

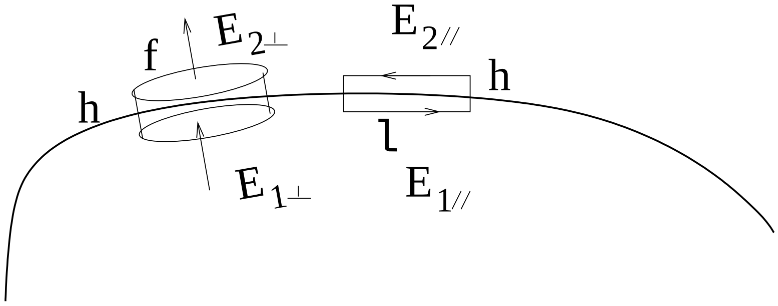


Abbildung 3.1:

Aus zwei kleinen Linienelementen der Länge l, die parallel zur Metalloberfläche liegen und die den (verschwindend kleinen) Abstand h haben (Abb. 3.1), bilden wir die Fläche $F = h\ l$. Dann bekommen wir aus $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ und den Stokes'schen Satz:

$$0 = \oint_{\partial F} d\mathbf{s}\cdot\mathbf{E} = l\ (E_{2\parallel} - E_{1\parallel}) \ , \tag{3.17}$$

wobei der Beitrag zum Linienintegral entlang h vernachlässigt werden kann. Das beweist (3.13).

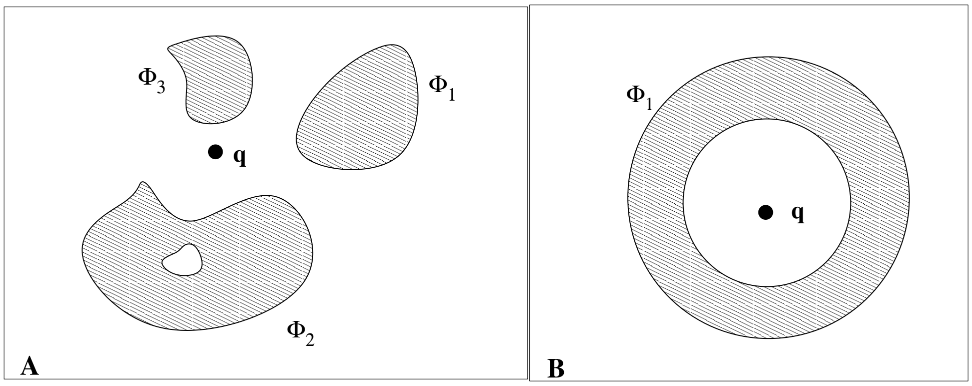


Abbildung 3.2:

In einem Metall, in dem $\mathbf{E}_1 = 0$, erhalten wir daher aus (3.13) und (3.14)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \qquad \mathbf{E}_{2\parallel} = 0 \; . \tag{3.18}$$

Typische Dirichlet-Probleme sind Probleme mit gegebener Ladungsdichte in der Nähe eines oder mehrere Metallstücke (Fig. 3.2) (A), die evtl. den physikalischen Raum umgeben (B). Ein Von Neumann Problem kann man sich vorstellen für ein Metall bei dem die Flächeladungsdichte (und aus (3.14) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$) vorgegeben ist.

Wir werden Methoden studieren, die uns erlauben für gegebene Randbedingungen und Ladungsverteilung *eine* Lösung der Poissongleichung zu finden. *Das Eindeutigkeitstheorem (3.1) garantiert, dass diese Lösung die einzige ist.*

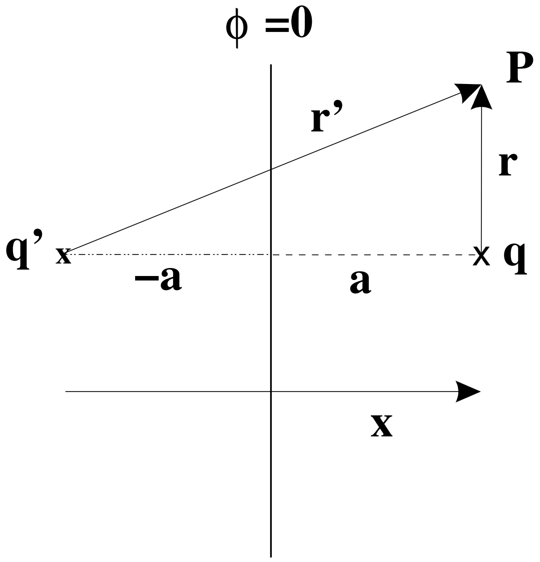
3.3 Spiegelladung

Diese Methode zur Lösung des Randwertproblems besteht darin, außerhalb des zu untersuchenden Bereichs sogenannte *Spiegel-Ladungen* geeigneter Größe so anzubringen, dass mit ihrer Hilfe gerade die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Dieses Verfahren ist deshalb erlaubt, weil man zur Lösung der (inhomogenen) Poisson-Gleichung jede Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung addieren darf (vgl. Abschnitt 2.4). Durch die Spiegelungsmethode wird diejenige Lösung der Laplace-Gleichung ausgewählt, die addiert mit der gewählten speziellen (bekannten) Lösung der Poisson-Gleichung (die einzelstehende Ladung) die geforderten Randbedingungen erfüllt.

3.3.1 Punktladung vor leitender Ebene

Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Punktladung q im Abstand a von einer leitenden Ebene, welche geerdet sei (d.h. $\Phi = 0$ auf der Ebene). Die Spiegelladung q' denken wir uns bzgl. der Ebene spiegelsymmetrisch zu q angebracht (Skizze). Dann beträgt das Potential im Punkt P:

$$(4\pi\epsilon_0)\, \Phi(P) \;=\; \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \tag{3.19}$$



und wir erhalten wie gefordert $\Phi = 0$ für alle Punkte der leitenden Ebene, x = 0, wenn wir wählen:

$$q' \; = \; -q \; . \tag{3.20}$$

In dem (uns interessierenden) Bereich x > 0 ist $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung, $q'/(4\pi\epsilon_0 r')$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die gerade dafür sorgt, dass für x = 0 die geforderte Randbedingung gilt.

Elektrisches Feld und Influenzladung

Für die x-Komponente des elektrischen Feldes **E** erhält man aus (3.19) und (3.20):

$$E_x(P) \; = \; -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \; = \; \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-a}{r^3} - \frac{x+a}{r'^3}\right) \; , \tag{3.21}$$

also gilt für die Ebene x = 0,

$$E_x(x=0) \; = \; -\frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \; . \tag{3.22}$$

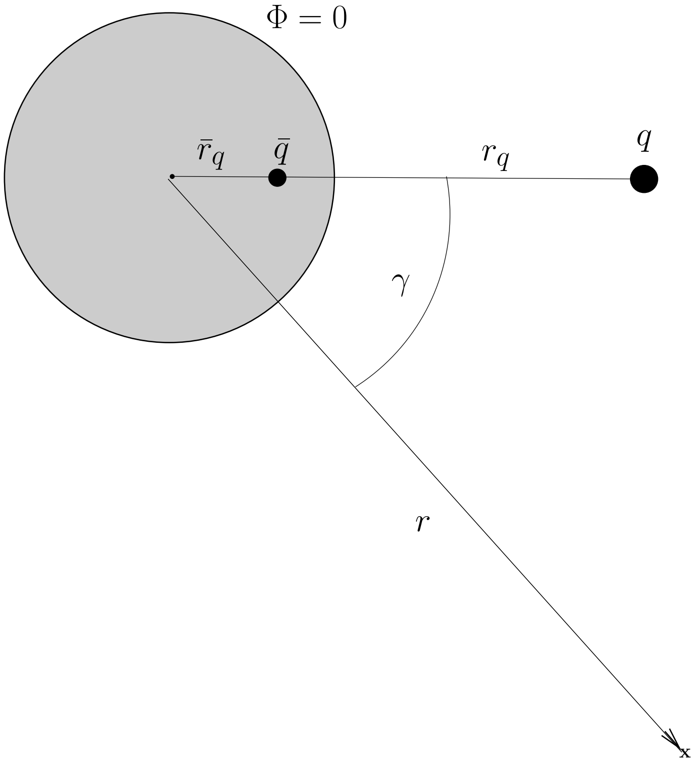
Die parallelen Komponenten von **E** auf der $x = 0$ Ebene verschwinden wegen (3.13), und da $\mathbf{E}_1 = 0$. Gl. (3.22) bedeutet nach (3.14), dass in der Ebene $x = 0$ eine Ladung mit der (ortsabhängigen) Flächendichte

$$\sigma \; = \; \epsilon_0 E_x(x=0) \; = \; -\frac{qa}{2\pi r^3} \tag{3.23}$$

durch die Anwesenheit der Punktladung q *induziert* wird (Influenzladung). Das ist die tatsächliche Ladung, die das Potential (3.19) erzeugt.

3.3.2 Punktladung vor leitender Kugel

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Punktladung q gegenüber einer leitenden Kugel (Radius R), welche sich auf dem Potential $\Phi = 0$ befinden soll. r_q sei der Abstand der Ladung vom Mittelpunkt der Kugel, den wir als Koordinatenursprung nehmen. Die Ladung befindet sich im Ortspunkt $\mathbf{r}_q$, mit Kugelkoordinaten $(r_q, 0, 0)$.



Es sei $\Phi(r,\theta,\phi)$ das Potential, das durch diese Punktladung am Ort $\mathbf{r} = (r,\theta,\phi)$ (in Kugelkoordinaten) erzeugt wird:

$$\Phi(r,\theta,\phi) \ = \ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q\cos\gamma}} \ . \tag{3.24}$$

Wo γ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_q$ ist

Um das Problem zu lösen verwenden wir nochmals eine (virtuelle) Spiegelladung $\bar{q}$, die sich **innerhalb** der Kugel im Punkt $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{q}$ befindet, mit $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{q} = (\bar{r}_q, 0, 0)$. Das Potential aus dieser zweiten Ladung ist also

$$4\pi\epsilon_0\bar{\Phi}(r,\theta,\phi) \ = \ \frac{\bar{q}}{\sqrt{r^2 + \bar{r}_q^2 - 2r\bar{r}_q\cos\gamma}} \ . \tag{3.25}$$

Für einen Punkt auf der Kugeloberfläche $r = R$ formen wir (3.25) um, indem wir Zähler und Nenner mit $R/\bar{r}_q$ multiplizieren:

$$4\pi\epsilon_0 \ \bar{\Phi}(R,\theta,\phi) \ = \ \frac{\bar{q}}{\sqrt{R^2 + \bar{r}_q^2 - 2R\bar{r}_q\cos\gamma}} = \frac{R}{\bar{r}_q}\frac{\bar{q}}{\sqrt{\frac{R^4}{\bar{r}_q^2} + R^2 - 2R\frac{R^2}{\bar{r}_q}}} \tag{3.26}$$

Man kann sich leicht vergewissern, dass für

$$\bar{r}_q = \frac{R^2}{r_q} \tag{3.27}$$

und

$$\bar{q} = -\frac{R}{r_q}q \tag{3.28}$$

$\bar{\Phi}$ das gesuchte Potential liefert. In der Tat, haben wir mit dieser Wahl:

$$4\pi\epsilon_0\bar{\Phi}(R,\theta,\phi) \;=\; -\frac{r_q}{R}\frac{R\,q}{r_q}\frac{1}{\sqrt{r_q^2+R^2-2Rr_q\cos\gamma}}\;, \tag{3.29}$$

was sich auf der Kugeloberfläche $r = R$ genau mit (3.24) weghebt. Das Gesamtpotential

$$\Phi(r,\theta,\phi)+\bar{\Phi}(r,\theta,\phi) \tag{3.30}$$

mit (3.24), (3.25), (3.27), (3.28) ist eine Lösung der Poisson Gleichung ausserhalb der Kugel, die auf der Kugeloberfläche $r = R$ identisch verschwindet. Nach dem Eindeutigkeitstheorem ist diese die einzige Lösung mit den gegebenen Randbedingungen und somit die gesuchte Lösung.

3.4 Greensfunktionen

Die Ergebnisse aus dem Kap. 3.3 können leicht für mehrere Ladungen im betrachteten Volumen und daher für eine beliebige Ladungsdichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ verallgemeinert werden. Wegen des Superpositionsprinzips trägt jede Ladung unabhängig zum Potential bei. Zusammen mit ihrer Abbildung ist der Beitrag von jeder Ladung zum Potential auf der Leiteroberfläche gleich 0, wie es sein muss.

In diesen Beispielen besteht das Gesamtpotential Φ aus zwei Teilen: ein Teil, Φ_p, ist das übliche Potential einer Ladungsdichte im Vakuum (1.16), und erfüllt die Poissongleichung (2.26), der zweite Teil Φ_0 erfüllt die Laplacegleichung $\nabla^2\Phi_0 = 0$ im betrachteten Raum, und ist so gewählt, dass das Gesamtpotential $\Phi = \Phi_p + \Phi_0$ die Randbedingungen erfüllt.

Diese Vorgangsweise hat den Nachteil, dass Φ_0 von den Randwerten und von ρ abhängt. Es wäre wünschenswert, wenn man mit Funktionen arbeiten könnte, welche nur von der Form der Berandung abhängen. Dies gelingt mit Hilfe der Technik der Greensfunktionen. Die Greensche Funktion $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ genügt der Poissonschen Differentialgleichung

$$\nabla^2_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) \;=-\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \tag{3.31}$$

eine Lösung ist natürlich gegeben durch das Potential einer Ladung $q = 1$ in $\mathbf{r}$. Dies ist aber nicht die einzige Lösung. Weitere Lösungen findet man durch Addition einer beliebigen Funktion, welche die Laplace-Gleichung erfüllt.

Wir verwenden jetzt die II Greensche Identität, gegeben durch (2.33), von der man den gleichen Ausdruck mit $f \leftrightarrow g$ abzieht und über das Volumen V (mit Oberfläche F) unter Anwendung des Gauß'schen Satzes integriert [1]:

$$\oint_F (f\nabla g - g\nabla f)\cdot d\,\mathbf{S} = \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)dV\;. \tag{3.32}$$

Wir setzen in (3.32) $f(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ und $g(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$ mit der Poisson-Gleichung und (3.31) ein, multiplizieren mit $-\epsilon_0$ und erhalten:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \int_V G(\mathbf{r}',\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})dV + \epsilon_0\;\oint_F d\;S\;\mathbf{n}\cdot(G(\mathbf{r}',\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}',\mathbf{r}))\;. \tag{3.33}$$

---

[1] falls nicht spezifiziert wirkt ∇ auf $\mathbf{r}$ ($\nabla_{\mathbf{r}'}$ würde auf $\mathbf{r}'$ wirken). Weiterin ist $d\,V = d^3\mathbf{r}$, $d\,V' = d^3\mathbf{r}'$

Das gibt die Lösung des Problems für beliebige Funktionen $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, die (3.31) erfüllen. Die Randwerte kommen über das Flächenintegral in (3.33). In diesem Ausdruck sieht es so aus, als ob man sowohl Φ als auch $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$ bräuchte, was dem Eindeutigkeitstheorem widerspricht. Von diesem Problem kann man sich aber durch eine geeignete Wahl von G befreien:

Dirichlet Greensfunktion: Hier erfüllt G die Bedingung

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0 \qquad \text{für } \mathbf{r} \in F \; . \tag{3.34}$$

Der Punkt ist, dass G weder von ρ noch vom Potential an der Oberfläche abhängt, sondern nur von der Flächengeometrie! Daher kann die Dirichlet Greensfunktion direkt aus den speziellen Lösungen, Sec. 3.3 herleitet werden (ÜBG).
Es folgt dann:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \int_V G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \; dV - \epsilon_0 \oint_F \Phi(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \; dS \; . \tag{3.35}$$

Zu beachten! Nach der Konvention des Gaußs 'schen Theorems, zeigt die Normale $\mathbf{n}$ aus dem Volumen hinaus!

Als allgemeine Regel kann man sagen: findet man das Potential $\phi_{q=1,\mathbf{r}'}(\mathbf{r})$ von einer Ladung $q = 1$, die sich in $\mathbf{r}'$ befindet, und mit Randbedingungen $\phi = 0$ auf der Grenzfläche, dann ist dieses Potential genau die Dirichlet Greenfunktion $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \phi_{q=1,\mathbf{r}'}(\mathbf{r})$ für diese Geometrie. Die Stärke dieser Methode ist, dass mit Hilfe von (3.35) das Potential für eine *beliebige Ladungsverteilung* und eine *beliebige Verteilung des Potentials auf der Oberfläche* bestimmt werden kann.

Von Neumann Greensfunktion:

Hier wählt man

$$\nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\epsilon_0 \; A(F)} \tag{3.36}$$

mit $A(F)$ dem Flächeninhalt von F. Dann folgt:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \int_V G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \; dV + \epsilon_0 \oint_F d\;S \; \mathbf{n} \cdot G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{A(F)} \oint_F \Phi(\mathbf{r}) \; d\;S \; . \tag{3.37}$$

Das letzte Integral gibt einen konstanten Beitrag, welcher keinen Einfluss auf $\mathbf{E}$ hat.

3.5 Trennung der Variablen

Wir suchen nach Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2\Phi \; = \; 0 \tag{3.38}$$

und nehmen dabei der Einfachheit halber an, dass Φ von z nicht abhängt (der Fall mit z-abhängigen Φ ist sehr ähnlich)

$$\Phi \; = \; \Phi(x, y) \; . \tag{3.39}$$

Dann vereinfacht sich (3.38) in kartesischen Koordinaten zu:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(x,y) \;=\; 0 \tag{3.40}$$

Da (3.40) keinen *Mischterm* $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,\Phi$ enthält, liegt es nahe, folgenden **Separationsansatz** zu machen:

$$\Phi(x,y) \;=\; f(x)g(y)\;; \tag{3.41}$$

dann geht (3.40) über in:

$$g(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) \;+\; f(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}g(y) \;=\; 0\;. \tag{3.42}$$

Mit Ausnahme der Nullstellen von f und g ist (3.42) äquivalent zu:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \;=\; 0\;. \tag{3.43}$$

Der erste Term in (3.43) hängt nur von x, der zweite nur von y ab; da x und y unabhängige Variablen sind, folgt aus (3.43):

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;=\; \text{const} = -\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\;. \tag{3.44}$$

Wählen wir die Konstante in (3.44) z.B. positiv reell ($= k^2$), so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f(x) \;=\; 0; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 g(y) \;=\; 0 \tag{3.45}$$

mit den Lösungen:

$$f(x) \;=\; a\,\exp(kx) + b\,\exp(-kx); \qquad g(y) \;=\; c\,\sin(ky) + d\,\cos(ky)\;. \tag{3.46}$$

Die Integrationskonstanten a, b, c, d und die Separationskonstante k werden durch Randbedingungen festgelegt. Natürlich gibt auch jede lineare Kombination der Funktionen (3.46) eine Lösung der Laplace-Gleichung. Je nach Randbedingungen kann es daher notwendig sein, eine solche Linearkombination zu nehmen, wie im kommenden Beispiel.

Unendlich langer Quader

Als Beispiel betrachten wir einen in z-Richtung unendlich ausgedehnten Quader (mit den Kantenlängen x_0 und y_0) mit den Randbedingungen (Fig. 3.3):

$$\Phi(x,0) \;=\; \Phi(x,y_0) \;=\; 0\;, \tag{3.47}$$

woraus

$$d \;=\; 0; \quad (\sin(ky_0) = 0) \;\;\rightarrow\;\; \left(k = \frac{n\pi}{y_0} = k_n\right) \tag{3.48}$$

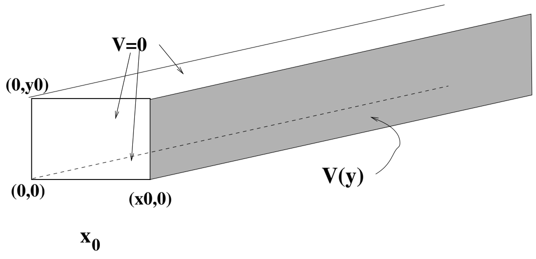


Abbildung 3.3:

folgt. Die „erlaubten“ Werte von k sind also festgelegt. Weiterhin seien die Randbedingungen

$$\Phi(0,y) \;=\; 0; \qquad \Phi(x_0,y) \;=\; V(y)\;, \tag{3.49}$$

gegeben, wobei $V(y)$ eine vorgegebene Funktion ist. Aus (3.49) folgt zunächst

$$\Big(a=-b\Big) \quad \rightarrow \quad \Big(f=a\left\{\exp(k_n x)-\exp(-k_n x)\right\}\Big)=a'\;sinh(k_n x)\;. \tag{3.50}$$

Um die Bedingung (3.49) auch noch zu erfüllen, entwickeln wir (3.41) nach Fourier :

$$\Phi(x,y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n y)\sinh(k_n x)\;, \tag{3.51}$$

und bestimmen die Koeffizienten A_n aus der Forderung

$$\Phi(x_0,y) \;=\; V(y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n y)\sinh(k_n x_0)\;. \tag{3.52}$$

Nach dem Umkehrtheorem für Sinus-Fourier-Reihen erhält man:

$$A_n \;=\; \frac{2}{y_0\sinh(k_n x_0)}\int_0^{y_0} V(y)\;\sin(k_n y)\,dy\;. \tag{3.53}$$

Hat man Randbedingungen von sphärischer Symmetrie, so wird man die Laplace-Gleichung durch einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten lösen (ÜBG); entsprechend verfährt man bei axialer Symmetrie.

3.6 Übersicht Elektrostatik

1.) Basis: **Coulomb-Gesetz**

$$\mathbf{K} \;=\; q\mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'$$

2.) Feldgleichungen (Maxwell Gleichungen für die Elektrostatik):

$$\begin{array}{lcc}
\text{a) integral:} & \displaystyle\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \;=\; 0 & \displaystyle\oint_F \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} \;=\; \frac{Q}{\epsilon_0} \\
& \Updownarrow & \Updownarrow \\
\text{b) differentiell:} & \nabla\times\mathbf{E} \;=\; 0 & \nabla\cdot\mathbf{E} \;=\; \dfrac{\rho}{\epsilon_0}
\end{array}$$

3.) Elektrostatisches Potential:

$$\mathbf{E} \;=\; -\nabla\Phi \quad\rightarrow\quad \nabla^2\Phi \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon_0} \;:\qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

4.) Feldenergie:

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\;\Phi(\mathbf{r})\;dV \quad\rightarrow\quad \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E(\mathbf{r})^2\;dV$$

Potentielle Energie der Punktladungen → elektrostatische Feldenergie

5.) Ideales Metall:

- Innen: $\Phi = \text{const.}$, $\mathbf{E} = 0$
- Auf der Oberfläche: $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\mathbf{E}\times\mathbf{n} = 0.$

6.) Nützliche Formeln:

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Teil II

Magnetostatik

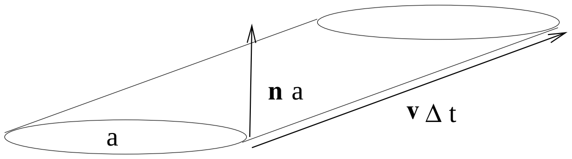
Kapitel 4

Ampère'sches Gesetz

4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung

Elektrische Ströme werden durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Ladungsträger können dabei z.B. sein: Ionen in einem Teilchenbeschleuniger, einem Elektrolyten oder einem Gas, Elektronen in einem Metall etc. Ursache für die Bewegung der Ladungen sind in erster Linie elektrische Felder, es kann sich aber auch um materiellen Transport von Ladungsträgern handeln. Als elektrische Stromstärke definieren wir diejenige Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt.

Stromdichte



Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst Ladungsträger mit gleicher Ladung q und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Es sei $\mathbf{a}$ der Vektor senkrecht zum Querschnitt des leitenden Mediums (Skizze), dessen Betrag a die Querschnittsfläche angibt und n die Dichte der Ladungsträger. In der Zeit Δt passieren dann die in dem Volumen $\Delta V = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\Delta t$ befindlichen Ladungsträger den Leiterquerschnitt, nämlich $n(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\Delta t$ Ladungsträger. Damit folgt für die Stromstärke

$$I(a) \;=\; \frac{nq(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\Delta t}{\Delta t} \;=\; nq(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}). \tag{4.1}$$

Haben wir allgemein pro Volumeneinheit n_i Ladungsträger q_i mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$, so wird:

$$I(a) \;=\; \mathbf{a}\cdot\underbrace{(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i)}_{\equiv\mathbf{j}}\,. \tag{4.2}$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) legen es nahe, die *Stromdichte* $\mathbf{j}$ einzuführen, als

$$\boxed{\mathbf{j} \;=\; \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i,} \tag{4.3}$$

so dass durch eine beliebige infinitesimale (orientierte) Fläche $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{a}$ der Strom

$$\Delta I = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$$

fließt. Für mehrere gleich starke Ladungen $q_i = q$ lässt sich $\mathbf{j}$ mit der mittleren Geschwindigkeit

$$< \mathbf{v} > = \frac{1}{n} \sum_i n_i \mathbf{v}_i \tag{4.4}$$

verknüpfen:

$$\mathbf{j} \; = \; nq < \mathbf{v} > = \; \rho < \mathbf{v} > . \tag{4.5}$$

Gleichung (4.5) macht deutlich, dass hohe Absolutgeschwindigkeiten der Ladungsträger noch keinen hohen Strom bedeuten, da nur der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Ladungsträger wesentlich ist. Sind z.B. die Geschwindigkeiten der Ladungsträger gleichmäßig über alle Richtungen verteilt, so wird $< \mathbf{v} >= 0$ und damit auch $\mathbf{j} = 0$.

Im allgemeinen Fall sind ρ und $< \mathbf{v} >$ orts- und zeitabhängig, also

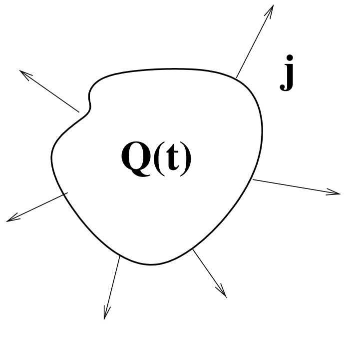
$$\mathbf{j} \; = \; \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \tag{4.6}$$

Kontinuitätsgleichung

Den Erhaltungssatz der Ladung können wir mit den Begriffen der Ladungs- und Stromdichte wie folgt formulieren: Wir betrachten ein beliebiges endliches Volumen V mit der Oberfläche F. Die darin enthaltene Ladungsmenge sei $Q = Q(t)$. Wenn V nicht von der Zeit abhängt, so ergibt sich für die Änderung der in V enthaltenen Ladungsmenge pro Zeiteinheit:

$$\frac{dQ}{dt} \; = \; \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV. \tag{4.7}$$

Da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet werden kann, muss die Abnahme (Zunahme) der in V enthaltenen Ladung gleich der (im betrachteten Zeitraum) durch F hinaus (hinein)-strömenden Ladungsmenge sein. Letztere ist gegeben durch das Oberflächenintegral der Stromdichte, welches nach der Gauß'schen Integralformel in ein Volumenintegral umgeformt werden kann:



$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \; = \; \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV. \tag{4.8}$$

Damit lautet die Ladungsbilanz:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \;=\; \int_V \nabla \cdot \mathbf{j}\, dV \tag{4.9}$$

oder, da V beliebig gewählt werden kann, erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\boxed{\boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0.}} \tag{4.10}$$

Während (4.8) die Ladungserhaltung in *integraler* Form beschreibt, bedeutet (4.10) die Ladungserhaltung in *differentieller* Form.

Spezialfälle

(i) Elektrostatik: stationäre Ladungen

$$\mathbf{j} \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad \rho \;=\; \rho(\mathbf{r}) \tag{4.11}$$

(ii) Magnetostatik: stationäre Ströme

$$\mathbf{j} \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{j} \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0. \tag{4.12}$$

Für einen stationären Strom ist nämlich $\mathbf{j}$ (und daher $\nabla \cdot \mathbf{j}$) zeitlich konstant. $\nabla \cdot \mathbf{j}$ muss also überall null sein, damit die Ladungsdichte nicht uneingeschränkt anwächst.

4.2 Ampère'sches Gesetz

Gegeben sei eine stationäre Stromverteilung $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Um elektrostatische Effekte zu eliminieren, wollen wir annehmen, dass die Dichte der bewegten Ladungsträger, die den Strom aufbauen, kompensiert wird durch ruhende Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens (z.B. bewegte Leitungselektronen und ruhende Gitterionen im metallischen Leiter). Auf eine bewegte Probeladung q wirkt dann in der Umgebung des stromdurchflossenen Leiters eine Kraft - keine elektrostatische Kraft - für die man experimentell findet:

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; q\,[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]} \tag{4.13}$$

mit

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \Gamma_m \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV'} \tag{4.14}$$

als dem Feld der *magnetischen Induktion* (kurz: **B**-Feld). Die Gleichungen (4.13) und (4.14) sind als Grundlagen der Magnetostatik ebenso experimentell gesichert wie

$$\mathbf{K} = q\, \mathbf{E} \tag{4.15}$$

und (1.15) in der Elektrostatik! So wie wir (1.8) als Messvorschrift für das elektrostatische Feld **E** auffassen können, so stellt (4.13) eine Messvorschrift für die magnetische Induktion **B** dar. Insgesamt ergeben (4.13) und (1.8) die Gesamtkraft (**Lorentzkraft**) auf eine Ladung q.

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\;.} \tag{4.16}$$

Maßsysteme

Hat man Γ_e festgelegt, d.h. man hat die Einheitsladung definiert, (siehe Abschnitt 1.2), so sind in (4.13) und (4.14) alle auftretenden Größen bzgl. ihrer Einheiten fixiert. Γ_m kann also nicht mehr frei gewählt werden:

(ii) **cgs**-System:

$$\Gamma_e \;=\; 1, \qquad \Gamma_m \;=\; \frac{1}{c^2} \tag{4.17}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c.

(i) **MKSA** -System:

$$\Gamma_e \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \qquad \boxed{\Gamma_m \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}} \tag{4.18}$$

mit

$$\epsilon_0 \;=\; 8.854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{Cb}^2}{\mathrm{N\,m}^2}, \qquad \mu_0 \;=\; 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m\,kg}}{\mathrm{Cb}^2}. \tag{4.19}$$

μ_0 ist die *magnetische Permeabilität.*

Superpositionsprinzip

Gleichung (4.14) enthält - wie in (1.8) - das Superpositionsprinzip: Die Felder zweier Stromverteilungen $\mathbf{j}_1$ und $\mathbf{j}_2$ überlagern sich linear: $\mathbf{B}(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) = \mathbf{B}(\mathbf{j}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{j}_2)$.

Verknüpfung mit der Relativität

Das Verhältnis Γ_m/Γ_e ist unabhängig vom Maßsystem da das Verhältnis von (4.13) zu (1.8) dimensionslos ist. Aus (4.16) hat das Verhältnis von $|\mathbf{B}|/|\mathbf{E}|$ die Dimension einer inversen Geschwindigkeit und mit (4.14) zu (1.8) das Verhältnis von $\Gamma_m/\Gamma_e = \epsilon_0\,\mu_0$ die Dimension einer inversen Geschwindigkeit zum Quadrat.

Mit (4.18) und (4.17) erhalten wir die Beziehung

$$\boxed{\boxed{\epsilon_0\,\mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2}}}\,. \tag{4.20}$$

Diese fundamentale Beziehung verweist bereits auf einen Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie. In der Tat kann man mit Hilfe einer Lorentz-Transformation (4.13) und (4.14) in (4.15) und (1.15) überführen.

4.3 Formel von Biot-Savart

Im Folgenden soll das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für verschiedene einfache Stromverteilungen berechnet werden.

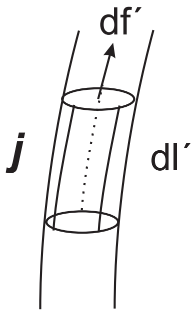
Für einen *dünnen* Leiter können wir sofort über den Leitungsquerschnitt f integrieren [d. h. $\int \mathbf{j}\; d\,V \rightarrow I \int d\mathbf{l}$] und erhalten aus (4.14)

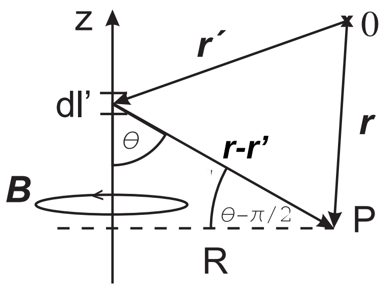
$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \tag{4.21}$$

mit

$$I \;=\; \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}' \tag{4.22}$$

als der Stromstärke (vgl. Skizze).





Ist der Leiter weiterhin gerade, so folgt aus (4.21) oder auch (4.14), dass die Feldlinien von $\mathbf{B}$ konzentrisch um den Leiter verlaufen. Wir brauchen also nur noch den Betrag B zu berechnen, da alle Beiträge zum Integral (4.21) für einen **geraden Leiter** die gleiche Richtung haben. Aus der Skizze folgt:

$$B(P) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\sin\theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\; dz \tag{4.23}$$

Die verbleibende Integration führen wir für einen unendlich langen Leiter aus: Mit

$$R \;=\; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\;\; \sin\theta; \qquad z \;=\; \frac{R}{\tan\theta} \qquad \rightarrow \qquad dz \;=\; \frac{-R}{\sin^2\theta}\, d\theta \tag{4.24}$$

folgt für die Feldstärke im Punkt P:

$$B(P) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-1}^{1} d(\,\cos\theta) \;=\; \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \tag{4.25}$$

Dieses ist die Formel von Biot und Savart für einen dünnen, geraden, unendlich langen Leiter.

4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld

Ausgehend von der Kraft, die eine Ladung q_i erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ im Magnetfeld $\mathbf{B}$ bewegt,

$$\mathbf{K_i} \;=\; q_i \left[\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)\right], \tag{4.26}$$

erhält man für die Kraft auf einen Strom mit der Stromdichte $\mathbf{j}$ **(Übergang zum Kontinuum:** $\sum_i q_i\ \mathbf{v}_i \cdots \to \int d\ V\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) \ldots$**)**:

$$\mathbf{K} \;=\; \sum_i q_i \left[\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)\right] \;=\; \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\; dV; \tag{4.27}$$

das Volumen V ist so zu wählen, dass es den Strom vollständig erfasst.

Beispiel: Für einen dünnen Draht, über dessen Querschnitt sich das $\mathbf{B}$-Feld nicht (wesentlich) ändert, können wir (wie in Kap. 4.3) 2 der 3 Integrationen in (4.27) ausführen:

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}\;.} \tag{4.28}$$

Das verbleibende Kurvenintegral längs des Leiters L lässt sich für einen geraden Leiter ausführen, wenn $\mathbf{B}$ sich längs L nicht ändert:

$$\mathbf{K} \;=\; (\mathbf{I} \times \mathbf{B})L, \tag{4.29}$$

wo L die Länge des Leiters angibt. Die Kraft ist also senkrecht zur Stromrichtung und zum $\mathbf{B}$-Feld; sie ist maximal, wenn $\mathbf{I}$ senkrecht zu $\mathbf{B}$ verläuf und verschwindet, wenn $\mathbf{I}$ paralell zu $\mathbf{B}$ ist.

Drehmoment

Auf die Ladung q_i mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ im Feld $\mathbf{B}$ wirkt das Drehmoment

$$\mathbf{N}_i \;=\; \mathbf{r}_i \times \left[q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)\right]; \tag{4.30}$$

entsprechend, auf die Stromdichte $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{N} \;=\; \sum_i \mathbf{r}_i \times \left[q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)\right] \;=\; \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\; dV. \tag{4.31}$$

Einfache Beispiele sind (rechteckige oder kreisförmige) Stromschleifen im homogenen $\mathbf{B}$-Feld (ÜB).

Für die praktische Auswertung von (4.31) ist es zweckmäßig, mit der Identität ('bac-cab Regel')

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \;=\; (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \;=\; \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{4.32}$$

(4.31) umzuformen:

$$\mathbf{N} \;=\; \int_V \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B}\} dV. \tag{4.33}$$

Wir benötigen jetzt einen

Hilfsatz: Allgemeine Eigenschaften eines stationären, räumlich beschränkten Stroms

Wir benutzen jetzt folgende Beziehung, **gültig für einen stationären $\nabla \mathbf{j} = 0$ Strom, der außerhalb eines Volumens V verschwindet (und natürlich auch auf dessen Oberfläche, oder im Unendlichen „schnell genug" verschwindet)**. Mit obiger Bedingung und für beliebige (ausreichend differentierbare) Skalarfelder g, f gilt: [1]

$$\int_V (f\,\mathbf{j}\cdot\nabla g + g\,\mathbf{j}\cdot\nabla f)\;dV = 0\;. \tag{4.34}$$

Benutzt man (4.34) mit $f = x_n$, $g = x_m$, sowie $(\mathbf{j}\cdot\nabla)x_n = j_n$ erhält man

$$\int_V (x_n j_m + x_m j_n)\;dV = 0 \tag{4.35}$$

Für $n = m$ folgt aus (4.35)

$$\int_V (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j})\;dV \;=\; 0, \tag{4.36}$$

so dass für ein konstantes Feld in (4.33) der 2. Term verschwindet.

Entsprechend folgt aus (4.35) für $m \neq n$ (und konstantes $\mathbf{B}$):

$$\int_V (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\mathbf{j}\;dV \;=\; -\int_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{B})\mathbf{r}\;dV, \tag{4.37}$$

also mit Formel (4.32):

$$\int_V (\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})\;\mathbf{j}\;dV \;=\; \frac{1}{2}\int_V \{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})\;\mathbf{j} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{j})\;\mathbf{r}\}\;dV \;=\; -\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\underbrace{\int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{j})\;dV}_{2\;\mathbf{m}} \tag{4.38}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\boxed{\mathbf{N} \;=\; \mathbf{m}\times\mathbf{B}}} \tag{4.39}$$

mit dem *magnetischen Dipolmoment*

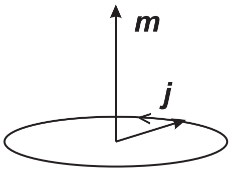
$$\boxed{\boxed{\mathbf{m} \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{j})\;dV}}\;. \tag{4.40}$$

Für einen ebenen Strom (z.B. Kreisstrom) steht $\mathbf{m}$ senkrecht zur Stromebene:

Ist der stromführende Leiter dünn, so erhalten wir nach Integration über den Leiterquerschnitt:

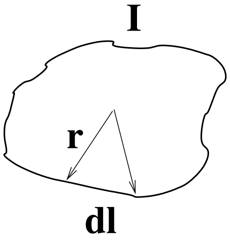
---

[1] $\nabla\cdot(g\;f\;\mathbf{j}) = (f\;\mathbf{j}\cdot\nabla g + g\;\mathbf{j}\cdot\nabla f)$, da $\nabla\cdot\mathbf{j} = 0$. Dann integriert man über V, wobei der erste Term in ein Integral auf der Oberfläche von V durch das Gauß'sche Theorem umgewandelt wird und daher verschwindet.



$$\mathbf{m} \;=\; \frac{I}{2}\oint_L (\mathbf{r}\times d\mathbf{l}) = I\int_F d\mathbf{f}, \tag{4.41}$$

wobei I die Stromstärke und F die vom Strom eingeschlossene Fläche ist (siehe Skizze für Beweis, dass $\mathbf{r}\times d\,\mathbf{l} = 2\;\mathbf{n}\;d\;f$). Für eine flache Fläche lautet der Betrag von m



$$|\mathbf{m}| \;=\; IF\;. \tag{4.42}$$

Anwendungen
Strommessung bzw. Elektromotor.

4.5 Kräfte zwischen Strömen und deren Energien

Mit (4.27) und (4.14) lässt sich die Kraft von einem Strom $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, lokalisiert in dem Volumen V', auf einem Strom mit Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, lokalisiert in dem Volumen V, schreiben als

$$\mathbf{K}(V,V') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d\;V\;\int_{V'} d\;V'\;\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\left(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\;. \tag{4.43}$$

Die zwei Vektorprodukte ergeben aus (4.32)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}) - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}))\;.$$

Das Integral

$$\int_V d\;V\;\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{4.44}$$

verschwindet, da

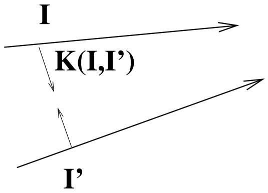
$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\;, \tag{4.45}$$

und man kann (4.34) mit $f = 1$ und $g = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ verwenden. Man erhält:

$$\boxed{\mathbf{K}(V,V') = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V,V'} d\,V\;d\,V'\;(\mathbf{j}(\mathbf{r})\;\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\;\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}\,. \tag{4.46}$$

Z. B., für die Kraft eines Stromes I' auf einen Strom I bei dünnen Leitern wird (4.46):

$$\mathbf{K}(\mathbf{I},\mathbf{I}') \;=\; -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi}\int_L\int_{L'} d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{l}'\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\;, \tag{4.47}$$



Also, parallele, gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, entgegengerichtete stoßen sich ab. Die Kraft (4.47) wird auch verwendet zur Festlegung der Messeinheit für den elektrischen Strom im SI system.

Gleichung (4.46) ändert bei Vertauschung der beiden Ströme das Vorzeichen, d.h. $\mathbf{K}(V,V') = -\mathbf{K}(V',V)$. Darin spiegelt sich das Actio-Reactio-Prinzip wider, welches für elektrostatische wie für magnetostatische Wechselwirkungen gilt. Es wird allerdings durchbrochen bei beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Ladungsverteilungen (siehe Kap. 6), weil in diesem Fall die Felder einbezogen werden müssen.

Mit Hilfe von (4.45) kann man aus (4.46) einen Ausdruck für die Potentialenergie einer Stromanordnung (vgl. Elektrostatik) herleiten als

$$\boxed{U_m = -\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V d\,V\;d\,V'\;\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\;\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}\,. \tag{4.48}$$

Kapitel 5

Grundgleichungen der Magnetostatik

Wie im Fall des elektrostatischen Feldes, wollen wir die Gleichungen für das **B**-Feld in Differentialform schreiben.

5.1 Divergenz der magnetischen Induktion

Wir formen Gleichung (4.14)) um:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= (\mu_o/4\pi)\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= -(\mu_o/4\pi)\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} dV'\end{aligned}$$

da $\nabla_{\mathbf{r}}$ nur auf $\mathbf{r}$ wirkt erhält man:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' \right) , \tag{5.1}$$

Gemäß (5.1) kann also **B** in der Form

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \tag{5.2}$$

dargestellt werden mit

$$\boxed{\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'}}. \tag{5.3}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nennt man das Vektor-Potential. Da $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0$, erhält man

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}\,. \tag{5.4}$$

Gleichung (5.4) sollte mit $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ verglichen werden, und zeigt, dass es keine *magnetischen Ladungen* gibt. Bilden wir nämlich die zu (5.4) korrespondierende integrale Aussage

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = \oint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0, \tag{5.5}$$

so sehen wir, dass der Fluss der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Fläche F verschwindet.

5.2 Rotation von B

In der Elektrostatik hatten wir gefunden

$$\nabla \times \mathbf{E} \;=\; 0 \tag{5.6}$$

oder gleichwertig

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \;=\; 0 \tag{5.7}$$

nach der Formel von Stokes. Für das **B**-Feld haben wir aus (5.2)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla\times(\nabla \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} \;. \tag{5.8}$$

Wir zeigen zunächst, dass

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0} \;. \tag{5.9}$$

Beweis: aus (5.3):

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \; dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \; dV' \;. \tag{5.10}$$

Unter Anwendung von (4.34) mit $f(\mathbf{r}') = 1$ und $g(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, gibt der letzte Ausdruck 0.

Wir benutzen jetzt eine Formel aus der Elektrostatik (aus (A.23))

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Wendet man den Laplace-Operator auf (5.3) an, erhält man

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \; dV' = -\mu_0 \; \mathbf{j}(\mathbf{r}) \;. \tag{5.11}$$

Zusammen mit (5.8) und (5.9) bekommen wir:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \, \mathbf{j} \;.} \tag{5.12}$$

Die Integralform von (5.12) erhält man aus dem Stokschen Satz:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \mu_0 I} \;, \tag{5.13}$$

wobei I die Stromstärke des von S umschlossenen Stromes ist. **Bemerkung:**
Umläuft S den Strom n-fach, so ist I durch nI zu ersetzen.
(5.12) und (5.4) bilden die grundlegende Gleichungen (Maxwell Gleichungen) für die Magnetostatik. Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld **E** mit $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ist also das **B**-Feld *nicht wirbelfrei.*

5.3 Vektor-Potential und Eichung

In Kap. 5.1 haben wir eine Hilfsgröße eingeführt, das sogenannte *Vektor-Potential* $\mathbf{A}$, aus dem (ähnlich zum Fall des elektrostatischen Potential Φ) die magnetische Induktion durch Differenzieren gewonnen werden kann. Im Gegensatz zum elektrostatischen Potential Φ, ist $\mathbf{A}$ ein Vektorfeld, und $\mathbf{B}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{B} \; = \; \nabla \times \mathbf{A} \,. \tag{5.14}$$

In (5.11) haben wir für das Vektor-Potential $\mathbf{A}$ eine Differentialgleichung gefunden, aus der sich $\mathbf{A}$ bei gegebener Stromverteilung $\mathbf{j}$ berechnen lässt.

Coulomb-Eichung

Man muss allerdings beachten, dass die Beziehung (5.14) das Vektorpotential für gegebenes $\mathbf{B}$ nicht eindeutig festlegt. Das $\mathbf{B}$ Feld ändert sich nämlich nicht, wenn man eine sogenannte *Eichtransformation*

$$\boxed{\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}' \; = \; \mathbf{A} + \nabla\chi} \tag{5.15}$$

durchführt, wobei χ eine beliebige (mindestens 2-mal partiell differenzierbare) skalare Funktion ist. Denn:

$$\nabla \times \mathbf{A}' \; = \; \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) \; = \; \nabla \times \mathbf{A} + 0. \tag{5.16}$$

(5.15) gibt eine zusätzliche Freiheit in der Wahl von $\mathbf{A}$.
(5.3) ist daher nicht der einzige mögliche Ausdruck für $\mathbf{A}$. Mit (5.3) ist (siehe (5.9)) $\mathbf{A}$ divergenzfrei. Eine Wahl von $\mathbf{A}$, welche (5.9) erfüllt wird als *Coulomb-Eichung.* bezeichnet. Da die Physik nur von $\mathbf{B}$ und nicht von $\mathbf{A}$ abhängig ist, stellt die Wahl einer besonderen Eichung keinerlei Einschränkung dar. In der Coulomb-Eichung (5.9) erfüllt also $\mathbf{A}$ [vgl. (5.8), (5.12) und (5.9)] die Differentialgleichung:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} \; = \; -\mu_0\,\mathbf{j}}_{\,\text{Coulomb}-\text{Eichung}} \,. \tag{5.17}$$

Die vektorielle Gleichung (5.17) zerfällt in ihre 3 Komponenten, welche mathematisch gesehen wieder vom bekannten Typ der Poisson-Gleichung (2.26) sind.

Startet man dagegen von einem Vektorpotential $\mathbf{A}$, das die Coulomb-Eichung nicht erfüllt

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \; \neq \; 0, \tag{5.18}$$

so kann man das *Eichpotential* χ so wählen, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' \; = \; \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla\chi) \; = \; 0 \,, \tag{5.19}$$

so dass $\mathbf{A}$ die Coulomb-Eichung erfüllt. Das gesuchte χ findet man durch Lösen einer Differentialgleichung vom Typ (2.28):

$$\boldsymbol{\nabla}^2\chi \; = \; -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}, \tag{5.20}$$

wo $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als eine gegebene Inhomogenität anzusehen ist.

5.4 Multipolentwicklung

Analog zu der in Abschnitt 1.5 besprochenen Multipolentwicklung für das elektrische Potential Φ interessiert man sich oft für das **B**-Feld in großer Entfernung von der Stromverteilung $\mathbf{j}$. Letztere sei auf dem Volumen V (mit $\mathbf{0} \in V$) beschränkt.

Dann empfiehlt es sich, das Vektor-Potential **A** analog Φ in eine Taylorreihe zu entwickeln. Unter Vewendung von (5.3) und (1.29) erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \ldots \right) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \ldots \tag{5.21}$$

mit dem

1.) Monopolanteil:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \, dV' \tag{5.22}$$

als 1. Term der Entwicklung von **A**. Aus (4.34) mit $f = 1$ und $g = x_i$ folgt unmittelbar

$$\mathbf{A}_0 \;=\; 0 \,. \tag{5.23}$$

Was die Tatsache betont, dass es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt.

2.) Dipolanteil:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \, dV'. \tag{5.24}$$

Das Integral (5.24) kann gemäß (4.38) (mit **B** ersetzt durch **r**) umgeformt werden:

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') \, dV' \;=\; \frac{1}{2} \int_V \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))\, \mathbf{r}' \} \, dV' \;=\; \frac{1}{2} \int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}') \} \, dV'. \tag{5.25}$$

(5.25) in (5.24) gibt

$$\boxed{\boxed{\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{m} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)}} \tag{5.26}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment $\boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \, dV}$ (bereits in (4.40) eingeführt). Man vergleiche das Ergebnis mit (1.32)!

Für das Dipol **B**-Feld erhält man (für $\mathbf{r} \neq 0$)

$$\boxed{\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3\mathbf{r}\ (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\ \mathbf{m})}{r^5}} \,, \tag{5.27}$$

Beweis (für $\mathbf{r} \neq 0$!):

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\mu_0}\,\nabla\times\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \quad &= \nabla\times(\mathbf{m}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}) = \\ &= \underbrace{\mathbf{m}(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3})}_{=0 \text{ für } \mathbf{r}\neq 0} - (\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \\ &= -\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}) - \frac{1}{r^3}(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \\ &= \frac{(3\mathbf{r}\ (\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - r^2\ \mathbf{m})}{r^5} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Das magnetische und elektrostatische Dipolfeld haben also die gleiche Form.

Mangetisches Moment vs. Bahndrehimpuls

Für N Punktladungen q_i lautet $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} \ = \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\ (\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i)\ . \tag{5.29}$$

Weiterhin kann $\mathbf{m}$ in einen einfachen Zusammenhang mit dem Drehimpuls L der N geladenen Massenpunkte gebracht werden, wenn alle Massen $M_i = M$ und alle Ladungen $q_i = q$ gleich sind, oder auch wenn das Verhältnis M_i/q_i konstant ist. In diesem Fall:

$$\boxed{\mathbf{m} \ = \ \frac{q}{2M}\mathbf{L}}\ . \tag{5.30}$$

Mit dem Bahndrehimpuls $\mathbf{L}$ eines Systems geladener (identischer) Teilchen ist also ein magnetisches Moment in Richtung von L verknüpft. Diese Aussage gilt auch im atomaren Bereich, z.B. für die Elektronen eines Atoms.

Umgekehrt lässt sich jedoch nicht jedes magnetische Moment auf einen Bahndrehimpuls gemäß (5.30) zurückführen. Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) besitzen ein *inneres* magnetisches Dipolmoment, welches nicht mit dem Bahndrehimpuls, sondern mit dem *Spin* dieser Teilchen verknüpft ist durch:

$$\mathbf{m}_s \ = \ g\frac{q}{2M}\mathbf{s}, \tag{5.31}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Spin-Vektor ist und g das *gyromagnetische Verhältnis.* Es ist $g \approx 2.0024$ für Elektronen.

5.5 Energie eines Dipols im äußeren, schwach veränderlichen Magnetfeld

Für die Kraft $\mathbf{K}$ eines schwach veränderlichen $\mathbf{B}$-Feldes auf eine um den Punkt $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ lokalisierte Stromverteilung greife man zurück auf (4.27), und entwickle das $\mathbf{B}$-Feld um $\mathbf{r}_0$ (wir setzen $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ **nach** der Ableitung):

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)\times\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})d\,V + \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\times(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0})\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)d\,V + \cdots\ , \tag{5.32}$$

Der erste Term verschwindet, wie in (5.22). Homogene Felder üben damit keine Kräfte auf Ströme aus (Damit wird die Gesamtkraft auf dem Schwerpunkt gemeint). Den zweiten Term formt man folgendermaßen um. Man betrachte zunächst, dass $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0}$ in (5.32) nur auf B wirkt (das ist durch die Variable r_0 verdeutlicht) also:

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0})\mathbf{j}(\mathbf{r})\; d\,V \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)\ . \tag{5.33}$$

Aus (4.35) mit $m \neq n$ geht man wie für (4.37), (4.38) vor und man bekommt

$$\begin{aligned}
&\int_V (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0})\mathbf{j}(\mathbf{r}) d\,V \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \qquad (5.34)\\
&\int_V \frac{1}{2}\left[(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0})\mathbf{j}(\mathbf{r}) - (\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0})\mathbf{r}\right] d\,V \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\
&\left[\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0} \times \underbrace{\int_V (\frac{1}{2}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}) d\,V}_{-\mathbf{m}}\right] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\
&(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\
&\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)) - \mathbf{m}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}_0))}_{=0}\ .
\end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})}. \tag{5.35}$$

(5.35) sollte mit dem Ausdruck für das Drehmoment auf einen Dipol (4.39) verglichen werden. Im letzteren Fall, liefert der erste Term in der Taylor-Entwicklung des **B**-Feldes einen Beitrag. Deswegen enthält (4.39) das **B**-Feld und nicht einen Gradienten, wie in (5.35).

Aus der Kraft lässt sich die Potentialenergie U eines magnetischen Dipols in einem äußeren Magnetfeld ableiten. Da $\mathbf{K} = -\boldsymbol{\nabla} U$, bekommt man

$$U \;=\; -(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}), \tag{5.36}$$

analog zu $-(\mathbf{d}\cdot\mathbf{E})$ als Energie eines elektrischen Dipols im elektrostatischen Feld (2.41). Der Dipol wird sich also bevorzugt in Feldrichtung einstellen, da dies der niedrigst möglichen Energie entspricht.

5.6 Übersicht über die Magnetostatik

1.) Basis: **Ampère'sches Gesetz**

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad \text{mit} \quad \mathbf{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'}$$

für stationäre Ströme, wobei $\nabla\cdot\mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t = 0$.

2.) Feldgleichungen: Aus

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla\times\mathbf{A} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'$$

folgt

a) differentiell:

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{B} \;=\; 0; \qquad\qquad \nabla\times\mathbf{B} \;=\; \mu_0\,\mathbf{j}}$$

b) integral

$$\boxed{\text{Fluß:} \oint_F \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f} \;=\; 0; \qquad \text{Zirkulation:} \quad \oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \;=\; \mu_0 I}$$

3.) Vektor-Potential:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mu_0\mathbf{j} \quad\to\quad \nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\,\mathbf{j}$$

für $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ (Coulomb-Eichung).

Statische Maxwell Gleichungen

$(A) \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$(B) \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$
$(C) \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$	$(D) \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j}$

(5.37)

Lorentz-Kraft

$$\boxed{\mathbf{K} = q\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \Rightarrow \int(\rho\,\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B})\;d\,V} \tag{5.38}$$

Teil III

Grundlagen der Elektrodynamik

Kapitel 6

Die Maxwell'schen Gleichungen

6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Im Folgenden sollen die Grundgleichungen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ für den Fall beliebiger *zeitabhängiger* Ladungs- und Stromverteilungen

$$\rho \;=\; \rho(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{j} \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \tag{6.1}$$

aufgestellt werden. Als Definition der Felder benutzen wir die Lorentz-Kraft

$$(\mathbf{Lorentz-Kraft}) \qquad \mathbf{K} \;=\; q\left[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \; . \tag{6.2}$$

Da ρ und $\mathbf{j}$ nun durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \;=\; 0 \tag{6.3}$$

verknüpft sind, ist klar, daß elektrisches und magnetisches Feld nicht mehr separat behandelt werden können: Die *Maxwell'schen Gleichungen* sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$.

6.2 Unvollständigkeit der statischen Maxwell-Gleichungen

Hier noch einmal die **statischen** Maxwell Gleichungen (im Vakuum), die wir bisher hergeleitet haben.Diese gelten nur für zeitunabhängige Felder.

Statische Maxwell Gleichungen

$(A) \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$(B) \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$	(6.4)
$(C) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$	$(D) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0\, \mathbf{j}$	

In diesen Gleichungen können das **E** und **B** -Feld getrennt betrachtet werden. Dass dies aber nicht korrekt sein kann wurde bereits erwähnt. Es gibt zwei Gründe, warum **E** und **B** Feld gekoppelt sein müssen:

(1) Durch unterschiedliche inertiale Referenzsysteme mischen sich **E** und **B** untereinander.

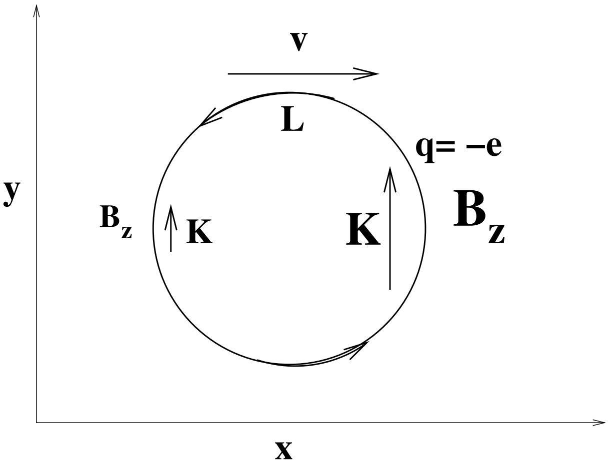
(2) Wegen der Kontinuitätsgleichung sind ρ und $\mathbf{j}$ und daher **E** und **B** gekoppelt.

Wir werden sehen, dass eine genaue Analyse dieser zwei Gründe zu den passenden Ergänzungen von (6.4) führt.

6.3 Faraday'sches Induktionsgesetz

Elektromotorische Kraft

Betrachten wir einen Leiterkreis L, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in einem nichthomogenen **B** -Feld bewegt. Als Beispiel nehmen wir ein in die z-Richtung gerichtetes **B** -Feld, das entlang der x-Richtung anwächst (Skizze). Der Kreis liege auf der $x-y$-Ebene und bewege sich in x-Richtung. Wegen des **B** -Feldes erfahren die freien Ladungen



$q = -e < 0$ auf dem Leiter eine Kraft $\mathbf{K} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ in die $+y$ Richtung. Diese Kraft ist aber stärker auf der rechten Seite des Kreises, wo **B** stärker ist. Deswegen werden die Ladungen im Leiter stärker gegen den Uhrzeigersinn beschleunigt. Mathematisch bedeutet das, dass die Zirkulation der Kraft entlang L ungleich Null ist.

Versetzen wir uns jetzt ins inertiale Bezugssytem des Leiters mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. In diesem System sind die Ladungen unbeweglich, doch sie erfahren die gleiche Kraft (im nicht-relativistischen Fall) wie im Laborsystem. Da die Ladungen unbeweglich sind, kann diese nicht aus dem **B** -Feld, sondern nur aus einem elektrischen Feld $\mathbf{E} = \mathbf{K}/q$ (Lorentzkraft) stammen. Wie die Kraft **K**, hat also auch **E** eine nichtverschwindende Zirkulation, was (6.4)(C) widerspricht. Im Bezugsystem des beweglichen Leiters befindet sich also ein **E** -Feld, das nicht wirbelfrei ist, sowie ein zeitabhängiges **B** -Feld.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen diesen zwei Feldern, also die passende Ergänzung zu (6.4)(C) mathematisch herleiten. Wir benutzen den Index "L" für die Felder im Bezugssystem des Leiterkreises, und keinen Index für das Laborsystem. Das $\mathbf{B}_L$ Feld ist das gleiche wie $\mathbf{B}$, nur räumlich verschoben um $\mathbf{v}t$.
Durch Vergleich der Kräfte in beiden Systemen erhalten wir $\mathbf{E}_L$:

$$\mathbf{K} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{K}_L = q\ \mathbf{E}_L\ . \tag{6.5}$$

Verschiebt sich der Kreis in der Zeit δt um den Abstand $\delta \mathbf{r}$, ändert sich $\mathbf{B}_L$ um

$$\delta \mathbf{B}_L = (\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}_L\ , \tag{6.6}$$

die Zeitableitung des $\mathbf{B}_L$-Feldes im System L ist also gegeben durch

$$\frac{\partial\ \mathbf{B}_L}{\partial\ t} = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}_L\ . \tag{6.7}$$

Der letzte Term kann durch die Beziehung (gültig für homogenes $\mathbf{v}$)

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} - \mathbf{v}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B})}_{=0} = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} \tag{6.8}$$

umgeschrieben werden. Also

$$\boxed{-\frac{\partial\ \mathbf{B}_L}{\partial\ t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_L) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_L}\ , \tag{6.9}$$

wo wir (6.5) benutzt haben. Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen der Zeitableitung von $\mathbf{B}$ und der Rotation von $\mathbf{E}$ dar. (6.9) ist also die gesuchte Ergänzung zur Maxwell-Gleichung (6.4)(C).

Um die Effekte auf den Leiterkreis zu studieren, betrachten wir die Integralform von (6.9) mit Hilfe des Stokeschen Satzes. Die Zirkulation von $\mathbf{E}$ entlang L entspricht einer Induktionsspannung V_{ind} und ist gegeben durch (wir können den Index L weglassen)

$$V_{ind} = \oint_L \mathbf{E}\ d\mathbf{l} = -k\ \frac{d}{d\ t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\ \mathbf{f} \qquad (k = 1)\ . \tag{6.10}$$

Das ist das Faray'sche Induktionsgesetz. (6.10) bedeutet, dass eine Änderung des magnetischen Flusses durch einen geschlossenen Leiterkreis eine Induktionsspannung in dem Leiterkreis erzeugt.

Bemerkungen

- (6.10) und seine Differentialform

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial\ \mathbf{B}}{\partial\ t} = 0} \tag{6.11}$$

gelten allgemein: Die Änderung des Flusses kann sowohl durch eine Bewegung des Leiterkreises (wie oben diskutiert) als auch durch eine reine Zeitabhängigkeit des $\mathbf{B}$ -Feldes erzeugt werden.

- Gleichung (6.10) gilt unabhängig davon, ob der Leiterkreis tatsächlich vorhanden ist, dieser dient nur zum experimentellen Nachweis des induzierten Feldes
- Bildet man die Divergenz von (6.11) erhält man $\frac{\partial \, \boldsymbol{\nabla} \mathbf{B}}{\partial \, t} = 0$. D. h. (6.4)(B) bleibt bestehen. Auch in (6.10) ist es implizit, dass verschiedene Oberflächen, die durch L abgegrenzt sind, den gleichen magnetischen Fluß haben. Das bedeutet, dass der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet (Fig. 6.1).

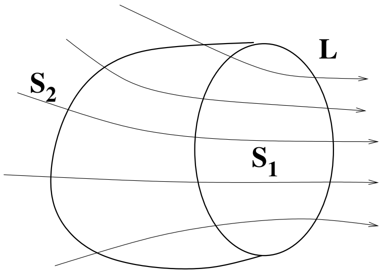
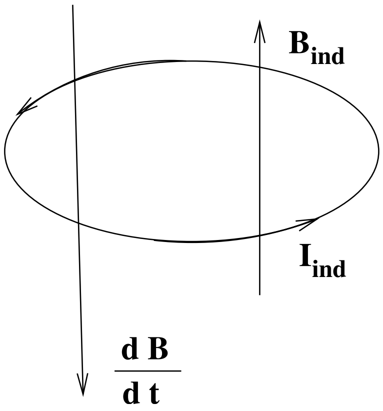


Abbildung 6.1: Der Fluss von **B** durch die Oberflächen S_1 und S_2, beide abgegrenzt durch L, ist nach (6.10) gleich. Daher ist der Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche $S_1 + S_2$ gleich Null.

- Das Vorzeichen in (6.10) spiegelt die **Lenz'sche Regel** wider. Das bedeutet, dass die durch das zeitabhängige **B** -Feld induzierte Spannung, und daher Strom, erzeugt (wegen (4.21)) ein Magnetfeld, das entgegen dem (wachsenden) **B** -Feld gerichtet ist (Skizze).



- Im **cgs**-System ist die Konstante k in (6.10) $k = 1/c$.

Anwendungen:

Betatron: In dem von einem zeitlich veränderlichen **B**-Feld induzierten elektrischen Feld **E** werden geladene Teilchen beschleunigt.

Wechselstrom-Generator: In einer in einem konstanten **B** -Feld rotierenden Spule wird wegen des zeitabhängigen magnetischen Flusses eine Wechselspannung erzeugt.

6.4 Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes

Das Ampère'sche Gesetz der Magnetostatik (6.4)(D)

$$\nabla \times \mathbf{B} \;=\; \mu_0 \, \mathbf{j} \tag{6.12}$$

gilt nur für stationäre Ströme. Bildet man nämlich

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \;=\; \mu_0 \, \nabla \cdot \mathbf{j}, \tag{6.13}$$

so erhält man wegen der Identität

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \;=\; 0, \tag{6.14}$$

gerade $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, d.h. stationäre Ströme. Allgemein gilt jedoch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0, \tag{6.15}$$

so dass (6.12) für nichtstationäre Ströme modifiziert werden muss.

Wie diese Modifikation aussehen muss, wird sofort klar, wenn man das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik ((6.4)(A)) beibehält:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0}} \;, \tag{6.16}$$

was durch die in Abschnitt 1 aufgeführte Ladungsinvarianz gestützt wird. Kombiniert man nun die Kontinuitätsgleichung (6.15) und (6.16), so folgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \;=\; 0. \tag{6.17}$$

Ersetzt man daher

$$\mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{j}_M \equiv \mathbf{j} + \epsilon_0 \, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{6.18}$$

so hat man wieder einen „Strom" mit verschwindender Divergenz wie in der Magnetostatik. Dieser „Strom" $\mathbf{j}_M$ wird Maxwell Verschiebungsstrom genannt. In Einklang mit der Ladungserhaltung erweitern wir also (6.12) wie folgt:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} \;= \mu_0 \, \mathbf{j}_M = \; \mu_0 \, \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \;. \tag{6.19}$$

Das Ampère'sche Gesetz (6.19) findet seine experimentelle Bestätigung in der Existenz elektromagnetischer Wellen (Teil IV).

Selbstinduktion

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung gemäß (6.19) ein **B** (und **E**) Feld. Ändert sich der Fluss dieses **B** -Feldes durch den Leiterkreis, so wird im Leiterkreis ein Induktionsstrom erzeugt (Selbstinduktion), der nach (6.10) dem primären Strom entgegen gerichtet ist (Lenz'sche Regel).

Die Selbstinduktion hängt von der Geometrie des Leiters ab. Für eine quantitative Formulierung greift man zweckmäßigerweise auf die elektromagnetischen Potentiale zurück (Kap. 7).

6.5 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} \;=\; 0}, \tag{6.20}$$

was dem Fehlen magnetischer Monopole entspricht.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;=\; 0}, \tag{6.21}$$

was dem Faraday'schen Induktionsgesetz entspricht.

Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0}}, \tag{6.22}$$

was dem Gauß'schen Gesetz entspricht.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \;=\; \mu_0 \mathbf{j}}\ , \tag{6.23}$$

was dem Ampère-Maxwell'schen Gesetz entspricht.

In (6.22) und (6.23) ist die Ladungserhaltung (6.15) schon implizit enthalten. (6.21) und (6.23) zeigen, daß ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld **B** ein elektrisches Feld **E** bedingt und umgekehrt. Die Gleichungen (6.20) – (6.23) beschreiben zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} \;=\; q\,[\,\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,]\ . \tag{6.24}$$

vollständig die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen im Rahmen der klassischen Physik.

Maxwell Gleichungen im Vakuum

$(A) \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$(B) \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$
$(C) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$(D) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\, \mathbf{j}$

(6.25)

Kapitel 7

Die elektromagnetischen Potentiale

7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Um die gekoppelten Differentialgleichungen (6.20) - (6.23) für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ zu lösen, ist es meist zweckmäßig - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - elektromagnetische Potentiale einzuführen.

Da auch für dynamische Felder

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7.1}$$

gilt, können wir weiterhin ein Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ über die Beziehung

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \tag{7.2}$$

einführen. Dann schreibt sich das Induktionsgesetz (6.25)(C) als

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad . \tag{7.3}$$

$\mathbf{E}$ selber ist nicht mehr wirbelfrei und kann daher nicht mehr als Gradient eines Potentials geschrieben werden. Dafür lässt sich das Vektorfeld in (7.3) als Gradient einer skalaren Funktion $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ darstellen:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \Phi, \tag{7.4}$$

oder

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi}. \tag{7.5}$$

Mit (7.2) und (7.5) sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ auf das Vektorpotential $\mathbf{A}$ und das skalare Potential Φ zurückgeführt.

Gleichungen für A und Φ

Wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen $\mathbf{A}$ und Φ berechnet werden können, wenn ρ und $\mathbf{j}$ vorgegeben sind. Dazu benutzen wir die inhomogenen Gleichungen (6.22) und (6.23). Aus (6.22) folgt mit $\mathbf{E}$ aus (7.5):

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\Phi + \nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{7.6}$$

und aus (6.23) mit (7.2):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mu_0\epsilon_0\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0\mathbf{j}. \tag{7.7}$$

Mit der Identität

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = -\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{a} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) \tag{7.8}$$

geht (7.7) über in:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} \;-\; \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \;=\; -\mu_0\mathbf{j}} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} \;+\; \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{7.9}$$

Damit haben wir die 8 Maxwell-Gleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ überführt in 4 Gleichungen ((7.6) und (7.9)) für die Potentiale $\mathbf{A}$ und Φ, die jedoch untereinander gekoppelt sind.

Eichinvarianz

Zur Entkopplung von ((7.6) und (7.9)) machen wir davon Gebrauch, dass die physikalischen Felder (7.2) und (7.5) (und daher auch die Maxwell-Gleichungen) unter den Eichtransformationen

$$\boxed{\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\nabla\chi}, \tag{7.10}$$

$$\boxed{\Phi\to\Phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}} \tag{7.11}$$

invariant sind. Hierbei ist $\chi(\mathbf{r},t)$ eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion.
Beweis:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \tag{7.12}$$

$$-\mathbf{E} = \frac{\partial\ \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial\ \boldsymbol{\nabla}\chi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\Phi - \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\partial\ \mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{7.13}$$

7.2 Lorentz-Eichung

Gleichung (7.9) legt nahe, χ so zu wählen, daß

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \tag{7.14}$$

was der **Lorentz-Konvention** entspricht. (Dass dies immer möglich ist wird gleich gezeigt).

Man erhält dann aus (7.9), (7.6) und (7.14) entkoppelte Gleichungen:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}. \tag{7.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.16}$$

welche jeweils die gleiche mathematische Struktur besitzen. Sie vereinfachen sich für zeitunabhängige Felder auf die Gleichungen (2.26) und (5.17) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Die Lorentz-Eichung (7.14) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik unter Verwendung von

$$\boxed{\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}} \tag{7.17}$$

benutzt.

Konstruktion von χ
Falls

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} \equiv f(\mathbf{r},t) \neq 0 \tag{7.18}$$

wäre, so führen wir eine Eichtransformation ((7.10),(7.11)) durch und fordern für die transformierten Felder:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}^2\chi + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0. \tag{7.19}$$

Gleichung (7.19) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\boldsymbol{\nabla}^2\chi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r},t). \tag{7.20}$$

Bei gegebener Inhomogenität $-f(\mathbf{r},t)$. ist die Lösung mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.20) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla}^2\chi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \tag{7.21}$$

addiert werden kann.

7.3 Coulomb-Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird χ meist so gewählt, dass

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{7.22}$$

Dann geht (7.6) über in

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.23}$$

mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:[1]

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\,. \tag{7.24}$$

---

[1] (7.24) scheint eine *Fernwirkung* auf das Potential Φ zu sein. Allerdings stellt sich heraus, dass die Wirkung auf die **B** und **E** Felder stets eine Nahwirkung ist.

Aus (7.9) wird

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \epsilon_0\mu_0\,\nabla\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) - \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t)/\partial t\;(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' \qquad (7.25) \\ &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{(\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t))(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'\;,\end{aligned}$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung verwendet haben. Die Gleichung für **A** enthält also nur die Stromdichte **j**.

Elektromagnetische Wellen
In quellenfreien Gebieten mit

$$\rho = 0; \quad \mathbf{j} = 0 \qquad (7.26)$$

reduzieren sich (7.24) und (7.25) dann auf:

$$\Phi = 0; \quad \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \qquad (7.27)$$

Die Lösungen von (7.27) sind elektromagnetische Wellen, z.B. in Form transversaler, ebener Wellen (siehe Teil IV).

Konstruktion von χ
Erfüllt die Lösung **A** von (7.9) nicht die Eichbedingung (7.22), so führen wir die Transformation (7.10), (7.11) durch und fordern (schon gesehen in (5.19),(5.20))

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}^2\chi = 0, \qquad (7.28)$$

oder

$$\boldsymbol{\nabla}^2\chi = -\nabla\cdot\mathbf{A}. \qquad (7.29)$$

Dies ist ein Spezialfall von (7.20) mit $-\nabla\cdot\mathbf{A}$ als Inhomogenität. Mehrdeutigkeit von χ: Zu jeder Lösung von (7.29) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla}^2\chi = 0 \qquad (7.30)$$

addieren.

Kapitel 8

Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

8.1 Energie

In Abschnitt 2.5 hatten wir dem elektrostatischen Feld eine Energie zugeordnet, charakterisiert durch die Energiedichte

$$\omega_{el} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,E^2. \tag{8.1}$$

Analog kann man dem magnetostatischen Feld eine Energie zuordnen. Wir wollen diesen Schritt überspringen und direkt die Energiebilanz für ein beliebiges elektromagnetisches Feld aufstellen.

Wir betrachten dazu zunächst eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in einem EM Feld $\{\mathbf{E},\mathbf{B}\}$ bewegt. Die an dieser Ladung vom Feld geleistete Arbeit ist gegeben durch:

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\; \mathbf{K}\cdot\mathbf{v} \;=\; q\left[\mathbf{E}+(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right]\cdot\mathbf{v} \;=\; q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\ , \tag{8.2}$$

da das Magnetfeld keine Arbeit leistet. Entsprechend gilt für einen Strom der Stromdichte $\mathbf{j}$:

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\; \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\;dV. \tag{8.3}$$

Die an den bewegten Punktladungen vom Feld geleistete Arbeit geht auf Kosten der Energie des EM Feldes, deren explizite Form im Folgenden hergeleitet werden soll.

Wie im statischen Fall wollen wir die Potentialenergien der Ladungen als Feldenergien betrachten. Die Ladungen und Ströme sollen also mit Hilfe der Maxwell Gleichungen eliminiert werden. Wir eliminieren in (8.3) zunächst die sich auf die bewegten Massenpunkte beziehende Stromdichte $\mathbf{j}$ mit Hilfe des Ampère-Maxwell'schen Gesetzes (6.23):

$$\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\;dV \;=\; \int_V \left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\,dV\ . \tag{8.4}$$

Diesen Ausdruck, der nur noch die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ enthält, können wir bzgl. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ symmetrisieren. Wir verwenden

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \;=\; \partial_i\,\epsilon_{ijk}\,E_jB_k \;=\; \epsilon_{ijk}\,(\partial_iE_j)\,B_k+\epsilon_{ijk}\,E_j\,(\partial_iB_k) \;=\; \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

sowie das Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ und finden:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \;=\; \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \;=\; -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{8.5}$$

Setzen wir nun (8.5) in (8.4) ein, so erhalten wir:

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\, dV \;=\; -\int_V \left(\underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}}_{\partial \omega_F / \partial t} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}_{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S}} \right) dV. \tag{8.6}$$

Interpretation

Wir schreiben (8.6) als die Summe von drei Beiträgen:

$$\frac{dW_M}{dt} + \frac{dU_F}{dt} + \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S}\; d\,V \;= 0;, \tag{8.7}$$

mit der **Feldenergie**

$$\boxed{U_F \;=\; \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right)\, dV}\;, \tag{8.8}$$

und dem **Poynting-Vektor**

$$\boxed{\mathbf{S} \;=\; \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}\;. \tag{8.9}$$

In (8.8) können wir nun die **Energiedichte des EM Feldes**

$$\omega_F \;=\; \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \tag{8.10}$$

einführen, welche sich aus einem elektrischen Anteil (vgl. (8.1))

$$\omega_{el} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \tag{8.11}$$

und einem magnetischen Anteil

$$\omega_{mag} \;=\; \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8.12}$$

zusammensetzt.

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes können wir die Divergenz in (8.7) in ein Oberflächenintegral umwandeln:

$$\frac{dU_F}{dt} \;= -\frac{dW_M}{dt} \;- \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}\;. \tag{8.13}$$

(8.13) beschreibt also folgende Energiebilanz: Die Feldenergie U_F in einem Volumen V kann sich dadurch ändern,

(a) dass das EM Feld Arbeit ($\frac{dW_M}{dt}$) an Ladungen (8.3) leistet (U_F wird also in kinetische Energie der Ladungen umgewandelt)

(b) dass Energie in Form von EM Strahlung aus dem Volumen V hinausströmt (hineinströmt, falls das Oberflächenintegral in (8.13) negativ ist). In Analogie zur Ladungserhaltung (Abschnitt 4.1) bezeichnen wir den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ als Energiestromdichte.

Die Energiebilanz zeigt, dass die Energie des abgeschlossenen Systems (Punktladungen plus EM Feld) eine Erhaltungsgröße ist.

Die Energiebilanz (8.13) lautet in Differentialform

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \omega_F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \; = \; 0 \; . \tag{8.14}$$

Für den Fall eines unendlichen Volumens und falls die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ asymptotisch schnell genug abfallen (d. h. ihr Produkt schneller als $1/r^2$ abfällt), verschwindet das Oberflächenintegral. Dann ist die Energiebilanz (8.13) durch die Arbeit und durch die Feldenergie erfüllt. Für statische Felder ist die obige Voraussetzung erfüllt, nicht dagegen für Strahlungsfelder (vgl. Kap. 15). Wie wir sehen werden, wird sozusagen von Strahlungsfeldern Energie „ins Unendliche“ verschleudert.

8.2 Impuls

Dem EM Feld kann man außer Energie auch Impuls zuordnen. Wir werden auch in diesem Fall eine Impulsdichte sowie eine „Impulsstromdichte“ herleiten. Da aber der Impuls ein Vektor ist, benötigen wir eine Stromdichte (die ebenfalls ein Vektor ist) für jede Impulskomponente. Wir werden also sehen, dass die Impulsstromdichte von einem Tensor (dem **Maxwell'sche Spannungstensor**) beschrieben wird.

Wir beginnen wieder mit der Impulsbilanz für eine Punktladung q mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Nach Newton gilt dann für die Änderung des Impulses $\mathbf{p}_M$ der Punktladung:

$$\frac{d\mathbf{p}_M}{dt} \; = \; q \left[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \; . \tag{8.15}$$

Für N Punktladungen, charakterisiert durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ und Ladungsdichte ρ, erhalten wir entsprechend für den Gesamtimpuls $\mathbf{P}_M$ der Ladungen:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \; = \; \int_V \left[\rho \mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \right] \, dV \; . \tag{8.16}$$

Analog zu Abschnitt 8.1 versuchen wir ρ und $\mathbf{j}$ zu eliminieren, so dass die rechte Seite in (8.16) nur noch die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ enthält.

Wir benutzen dazu

$$\rho \; = \; \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \tag{8.17}$$

und

$$\mathbf{j} \; = \; \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \tag{8.18}$$

Das Resultat

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \; = \; \int_V \left[\epsilon_0 \mathbf{E} \, (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \right] dV \tag{8.19}$$

können wir bzgl. **E** und **B** symmetrisieren, indem wir in (8.19) den (verschwindenden) Term

$$\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\,(\nabla\cdot\mathbf{B}) \tag{8.20}$$

hinzufügen und in

$$-\epsilon_0\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}\right) \;=\; -\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})+\epsilon_0\left(\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) \tag{8.21}$$

das Induktionsgesetz

$$\nabla\times\mathbf{E} \;=\; -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.22}$$

ausnutzen. Ergebnis:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \;=\; \int_V\Bigg\{&\epsilon_0\mathbf{E}\,(\nabla\cdot\mathbf{E})+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\,(\nabla\cdot\mathbf{B})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}-\epsilon_0\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})\\ &-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\Bigg\}\;dV.\end{aligned} \tag{8.23}$$

Wir verwenden die Abkürzung $\partial_m\equiv\partial/\partial x_m$ und fassen für die Interpretation von (8.23) einige Terme wie folgt zusammen[1]

$$\begin{aligned}\Big[\mathbf{E}\,(\nabla\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})\Big]_i \;&=\; E_i\partial_m E_m-\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}E_j\partial_l E_m \;=\\ =\; E_i\partial_m E_m-(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\,E_j\partial_l E_m \;&=\; E_i\partial_m E_m-E_m\partial_i E_m+E_m\partial_m E_i\\ =\; -\frac{1}{2}\partial_i E_m^2+\partial_m E_m E_i \;&=\; \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(E_iE_m-\frac{1}{2}E^2\delta_{im}\right)\;.\end{aligned} \tag{8.24}$$

Entsprechend verfahren wir für die **B**-Terme. Ergebnis:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M+\mathbf{P}_F)_i\;+\;\int_V\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}T_{im}\;dV\;=\;0\;,} \tag{8.25}$$

wobei der **Maxwell Spannungstensor** T_{im} durch

$$\boxed{T_{im}\;=\;\epsilon_0\left(\frac{E^2}{2}\delta_{im}-E_iE_m\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{B^2}{2}\delta_{im}-B_iB_m\right)} \tag{8.26}$$

gegeben ist.

$\mathbf{P}_F$ kann als Gesamtimpuls des EM Feldes betrachtet werden und ist gegeben durch

$$\mathbf{P}_F=\int_V\boldsymbol{\pi}_F\,dV \tag{8.27}$$

---

[1] Oder auch mit dem „Nabla-Kalkül“: $\mathbf{E}\,(\nabla\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{E}^2+(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{EE}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{E}^2$.

mit der Impulsdichte

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_F \;=\; \epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B})} \tag{8.28}$$

Im letzten Integral in (8.25) kann der Gauß'sche Satz folgendermaßen angewandt werden: Aus dem Tensor T_{im} können wir für jedes i einen Vektor $\mathbf{T}_i \equiv (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$ bilden. Aus dem Gauß'schen Satz haben wir also

$$\int_V \partial_m\, T_{im}\; dV = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\; \mathbf{T}_i\; dV = \int_F \mathbf{T}_i \cdot d\,\mathbf{f}\;, = \int_F \mathbf{T}_{im}\cdot d\, f_m\;, \tag{8.29}$$

verglichen mit (8.25) kann dieses als Fluss der i-Komponente des EM Impulses durch die Oberfläche $F = \partial V$ interpretiert werden. Dieser „Fluss" entspricht der Menge an Impuls, die durch die Oberfläche F pro Zeiteinheit fließt, also nach Newton auch die (i-Komponente der) Kraft K_i, die vom EM Feld an die Oberfläche F angewandt wird (ob diese Kraft durch die Fläche als Impuls „weitergeleitet" oder von der Fläche absorbiert wird ist von (8.29) nicht beschrieben).

Die übertragene Kraft pro Flächeneinheit hat die Komponenten $K_i = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} = T_{im}n_m$, wo $\mathbf{n}$ die Normale an die Oberfläche ist. Diese Kraft hat sowohl eine Normalkomponente $p = n_i T_{im} n_m$, die als Druck des EM-Feldes (**Strahlungsdruck**) gesehen werden kann, als auch eine Komponente, die parallel zur Fläche F steht.

Der Strahlungsdruck des Lichts wurde von Lebedev und Hull direkt an einer Drehwaage nachgewiesen. An den Balkenenden angebrachte Metallplättchen wurden im Takt der Eigenschwingung jeweils belichtet; es wurden in Resonanz gut beobachtbare Ausschläge erhalten. Das elektromagnetische Feld überträgt auf einen Absorber also nicht nur Energie, sondern auch Impuls.

Ähnlich zur Energiebilanz gibt es also für das EM-Feld eine Impulsbilanz: Der gesamte Impuls des EM Feldes in einem Volumen V kann sich dadurch ändern, (a) dass Impuls an Ladungen übertragen wird, oder (b) dass Kraft an die Randoberfläche übertragen wird. Zusammenfassend lautet (aus (8.25)) die Impulserhaltung in Integralform

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i \;+ \oint_F \sum_{m=1}^{3} T_{im}\, df_m = 0}\;, \tag{8.30}$$

und in differentieller form

$$\boxed{\rho\,\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_F}{\partial t} + \nabla\cdot \underline{\underline{T}} \;=\; 0,}\;. \tag{8.31}$$

Bemerkung
Die Tatsache, dass die sich die Impulsdichte $\boldsymbol{\pi}_F$ und die Energiestromdichte $\mathbf{S}$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden,

$$\boldsymbol{\pi}_F \;=\; \epsilon_0\mu_0\,\mathbf{S} \;=\; \frac{1}{c^2}\mathbf{S}\;, \tag{8.32}$$

ist kein Zufall, sondern ergibt sich zwangsläufig im Rahmen der relativistischen Formulierung.

8.3 Drehimpuls

Die Änderung des Drehimpulses einer Punktladung q im elektromagnetischen Feld ist durch

$$\frac{d\mathbf{l}_M}{dt} \;=\; \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}_M}{dt} \;=\; q\,\mathbf{r}\times\left[\,\mathbf{E}+(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,\right] \tag{8.33}$$

gegeben. Entsprechend gilt für N Punktladungen, welche durch ρ und $\mathbf{j}$ charakterisiert seien, im Volumen V:

$$\frac{d\mathbf{L}_M}{dt} \;=\; \int_V \mathbf{r}\times\left[\,\rho\,\mathbf{E}+(\mathbf{j}\times\mathbf{B})\,\right]\;dV\;. \tag{8.34}$$

Eliminiert man ρ und $\mathbf{j}$ und symmetrisiert man das Resultat bzgl. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, so erhält man analog Abschnitt 8.2

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}_M}{dt} \;=\; \int_V \mathbf{r}\times\Bigg\{&\epsilon_0\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}-\epsilon_0(\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})\\ &-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\Bigg\}\,dV\;.\end{aligned}$$

Fallen die Felder asymptotisch rasch genug ab, d.h. stärker als $1/R$, so bleibt für $V\to\infty$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_M+\mathbf{L}_F)\;=\;0, \tag{8.35}$$

mit

$$\mathbf{L}_F\;=\;\epsilon_0\int_V \mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\;dV=\int_V \mathbf{r}\times\boldsymbol{\pi}_F\;dV \tag{8.36}$$

als **Drehimpuls** des Feldes, was mit der Interpretation von $\boldsymbol{\pi}_F$ als Impulsdichte des Feldes konsistent ist. Die Summe aus dem mechanischen Drehimpuls $\mathbf{L}_M$ und dem des Feldes $\mathbf{L}_F$ ist (in einem unendlichen Volumen) eine Erhaltungsgröße:

$$\mathbf{L}_M+\mathbf{L}_F\;=\;\text{const}\;. \tag{8.37}$$

Für ein endliches Volumen bekommt man ähnlich wie beim Impuls einen Fluss vom Drehimpuls aus der Volumenoberfläche.

8.4 Zusammenfassung

Bei Abwesenheit anderer Kräfte gelten für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls. Da sich Energie, Impuls und Drehimpuls der Punktladungen zeitlich ändern, müssen wir dem Feld selbst Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen, um die Erhaltungssätze für das Gesamtsystem zu garantieren. Die Grundgrößen

Energiedichte

$$\omega_F\;=\;\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2, \tag{8.38}$$

Impulsdichte

$$\boldsymbol{\pi}_F \;=\; \epsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{8.39}$$

und **Drehimpulsdichte**

$$\lambda_F \;=\; \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \;=\; \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}_F \tag{8.40}$$

findet man aus den jeweiligen Bilanzen unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen. Die Tatsache, dass man dem Maxwell-Feld *mechanische* Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen kann, bietet die Grundlage für die im atomaren Bereich benutzte Beschreibung elektromagnetischer Phänomene durch **Teilchen**, welche als **Photonen** bezeichnet werden.

Teil IV

Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

Kapitel 9

Das elektromagnetische Feld im Vakuum

9.1 Homogene Wellengleichungen

Im Vakuum ($\rho = 0$; $\mathbf{j} = 0$) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \;=\; 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} \;=\; 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} \;=\; -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} \;=\; \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{9.1}$$

Zur *Entkopplung* von **E** und **B** bilden wir

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \;=\; -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Das Resultat ist eine homogene Wellengleichung

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} \;=\; 0} \;; \qquad \frac{1}{c^2} \;=\; \epsilon_0 \mu_0. \tag{9.3}$$

Analog verfährt man mit dem **E**-Feld. Mit der Abkürzung

$$\Box \;\equiv\; \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \tag{9.4}$$

für den **d'Alembert-Operator** $\Box$ erhält man dann anstelle von (9.1)

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \mathbf{B} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \Box \mathbf{E} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}} \tag{9.5}$$

Für die zugehörigen Potentiale findet man nach Kapitel 7:

$$\Box \mathbf{A} \;=\; 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \;=\; 0 \tag{9.6}$$

$$\Phi \;=\; 0 \tag{9.7}$$

in der Coulomb-Eichung (was im Quellenfreien Fall auch die Lorentz-Eichungsbedingung (7.14) erfüllt).

Wir haben also Differentialgleichungen vom Typ

$$\Box f(\mathbf{r}, t) \;=\; 0 \tag{9.8}$$

zu lösen, wobei f für irgendeine Komponente von $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ oder $\mathbf{A}$ steht. Die Lösungen für $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{A}$ sind dann noch der Nebenbedingung unterworfen, dass die Divergenz verschwindet (Transversalitätsbedingung).

9.2 Monochromatische Ebene Wellen

Zur Lösung von (9.8) bilden wir den Ansatz

$$f = f_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)). \tag{9.9}$$

(9.8) ergibt

$$(-\mathbf{k^2} + \omega^{\mathbf{2}})\mathbf{f} = \mathbf{0}\;. \tag{9.10}$$

(9.9) ist also eine Lösung von (9.8) vorausgesetzt die **Dispersionsrelation**

$$\boxed{\boxed{\omega^2 \;=\; k^2 c^2}} \tag{9.11}$$

gilt.

Für die elektrische Feldstärke und die Magnetische Induktion haben wir:

$$\mathbf{E} \;= \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \tag{9.12}$$

$$\mathbf{B} \;= \mathbf{B}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \tag{9.13}$$

wo $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ konstante Vektoren sind, die noch einige Bedingungen (siehe unten) erfüllen müssen. Analog ist die Lösung für $\mathbf{A}$.

Komplexe vs. reele Felder

$\mathbf{E}, \mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind als Messgrössen reelle Vektorfelder. Die komplexe Schreibweise in den Gleichungen (9.9,9.12) ist verabredungsgemäß so zu verstehen, dass das physikalische Vektorfeld durch den Realteil von diesen Ausdrücken beschrieben wird. Die komplexe Schreibweise ist oft (z.B. beim Differenzieren) bequemer als die reelle; sie ist problemlos, solange nur lineare Operationen durchgeführt werden.

Vorsicht ist geboten bei der Berechnung physikalischer Größen wie etwa der Energiestromdichte. In diesem Fall treten Produkte von Vektorfeldern auf, wie z.B.

$$\mathbf{E^2}\;. \tag{9.14}$$

Da muß der Realteil **vor** der Quadrierung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 \quad &= \quad (Re\; \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)))^2 && (9.15) \\ &\neq \quad Re\; (\mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)))^2 \quad \text{falsch !} \end{aligned}$$

Zeitliche Mittelwerte $\overline{\ldots}$ solcher Produkte kann man in komplexer Schreibweise wie folgt berechnen: Für zwei Vektorfelder

$$\mathbf{a}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{a}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \qquad \mathbf{b}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{b}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{9.16}$$

gilt für den zeitlichen Mittelwert des Produktes

$$\overline{(Re\mathbf{a})\cdot(Re\mathbf{b})} \;=\; \frac{1}{2}Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^*)\;, \tag{9.17}$$

denn in

$$(Re\mathbf{a})\cdot(Re\mathbf{b}) \;=\; \frac{1}{4}(\mathbf{a}_0\exp(-i\omega t)+\mathbf{a}_0^*\exp(i\omega t))(\mathbf{b}_0\exp(-i\omega t)+\mathbf{b}_0^*\exp(i\omega t)) \tag{9.18}$$

verschwinden die gemischten Terme mit den Zeitfaktoren $\exp(\pm 2i\omega t)$ nach Zeitmittelung und es bleibt

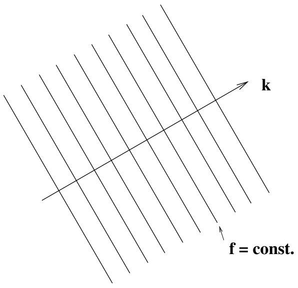
$$\overline{(Re\mathbf{a})\cdot(Re\mathbf{b})} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^*+\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}) \;=\; \frac{1}{2}Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^*)\;. \tag{9.19}$$

Betrachtet man die Konvention, dass der Realteil am Ende gebildet werden soll, können Ausdrücke wie (9.12) sehr bequem differentiert werden. Man kann leicht zeigen (siehe Sec. 9.5), dass man stets diese auf folgender Weise ersetzen kann:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdots\to i\mathbf{k} \qquad \frac{\partial}{\partial\, t}\to -i\omega}\;. \tag{9.20}$$

Eigenschaften der Lösung

i) Ebene Wellen



Funktionen vom Typ (9.12) beschreiben ebene Wellen, deren Wellenfronten Ebenen sind: Die Punkte $\mathbf{r}$, in denen $f(\mathbf{r},t)$ zu einer festen Zeit t den gleichen Wert annimmt, liegen auf einer Ebene (Hesse'sche Normalform)

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \;=\; \text{const}\;, \tag{9.21}$$

welche senkrecht zu $\mathbf{k}$ steht. $\mathbf{k}$ bezeichnet die **Ausbreitungsrichtung**. Je nach Wahl des Vorzeichens von ω erhält man Wellen, die in $\pm\mathbf{k}$-Richtung laufen.

ii) Transversalität der elektromagnetischen Wellen

Aus $\nabla \cdot \mathbf{B}$ folgt mit Hilfe von (9.20)

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \tag{9.22}$$

sowie ähnlich für **E**:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \tag{9.23}$$

d. h., die Felder stehen **transversal** zur Ausbreitungsrichtung. Dasselbe gilt für **A**.

iii) Orthogonalität von **E** und **B**

Aus der Maxwell Gleichung

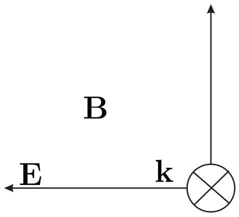
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9.24}$$

folgt mit (9.20)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\omega \mathbf{B} \ . \tag{9.25}$$

also $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und **k** bilden also ein orthogonales Dreibein (siehe Skizze). (9.25) (9.11) legt auch die **Beträge** von **B** und **E** fest, nämlich:

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c \ . \tag{9.26}$$



Bemerkungen

1.) Außer ebenen Wellen sind z.B. auch Kugelwellen Lösungen von (9.8); sie haben die Form:

$$\boxed{\frac{f(r-ct)}{r}}, \tag{9.27}$$

wobei f eine beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktion ist.

2.) Die Existenz von elektromagnetischen Wellen (z.B. Lichtwellen, Radiowellen, Mikrowellen, γ-Strahlung etc.) beweist die Richtigkeit der Relation $\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ im Vakuum, welche entscheidend in die Herleitung der Wellengleichungen eingegangen ist. Sie stellt die experimentelle Bestätigung für das Maxwell-Ampère-Gesetz (6.19) dar.

Terminologie

Wellenvektor	$\mathbf{k}$	
Wellenzahl	k	$k = \lvert\mathbf{k}\rvert$
Kreisfrequenz	ω	$\omega = \pm c\, k$
Frequenz	ν	$\nu = \omega/(2\pi)$
Wellenlänge	λ	$\lambda = (2\pi)/k$
Schwingungsdauer	τ	$\tau = (2\pi)/\omega$

Anhand von (9.12) sieht man, dass τ die zeitliche Periodizität der Welle bei festgehaltenem Ort $\mathbf{r}$ beschreibt,

$$\exp(i\omega(t+\tau)) \;=\; \exp(i\omega t + 2\pi i) \;=\; \exp(i\omega t); \tag{9.28}$$

analog gibt die Wellenlänge λ die räumliche Periodizität an:

$$\exp(ik(z+\lambda)) \;=\; \exp(ikz + 2\pi i) \;=\; \exp(ikz) \tag{9.29}$$

für eine Welle in z-Richtung zu fester Zeit t.

Phasengeschwindigkeit

Die Größe

$$\phi \;=\; \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t \tag{9.30}$$

nennt man die *Phase* der Welle. Unter der Phasengeschwindigkeit v_{ph} versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpunkt mit vorgegebener fester Phase bewegt. Um v_{ph} zu bestimmen, betrachten wir wieder eine ebene Welle in z-Richtung und bilden das totale Differential von $\phi(z,t)$:

$$d\phi \;=\; kdz - \omega dt. \tag{9.31}$$

Für $\phi = \text{const.}$ folgt dann:

$$v_{ph} \;=\; \frac{dz}{dt} \;=\; \frac{\omega}{k} \;=\; c; \tag{9.32}$$

die Phasengeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit c.

9.3 Energie- und Energiestromdichte

Streng genommen ist eine ebene Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt; jede praktisch realisierbare Welle dagegen begrenzt. Die ebene Welle ist jedoch eine sinnvolle Approximation, wenn die Ausdehnung der realen Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung groß ist im Vergleich zu ihrer Wellenlänge und zu irgendwelchen *Hindernissen* (z.B. Spalte), durch die sie *gestört* werden kann.

Für monochromatische ebene Wellen gehen die Beziehungen

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla\times\mathbf{A}; \quad \mathbf{E} \;=\; -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \tag{9.33}$$

in der komplexen Darstellung über in

$$\boxed{\mathbf{B} \;=\; i(\mathbf{k}\times\mathbf{A}); \quad \mathbf{E} \;=\; i\omega\mathbf{A}}. \tag{9.34}$$

Mit (9.34) und (9.17) lassen sich Energie (und auch Impuls) der Welle leicht ausrechnen. Der zeitliche Mittelwert der Energiedichte (reelle Darstellung) ist:

$$\overline{\omega}_F \;=\; \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \omega_F \, dt \;, \tag{9.35}$$

wobei die Energiedichte ω_F (mit $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$) durch

$$\omega_F \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right) \tag{9.36}$$

gegeben ist. Mit $\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = 0$ finden wir:

$$\boxed{\overline{\omega}_F} \;=\; \frac{\epsilon_0}{4}Re(\omega^2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^* + \underbrace{c^2k^2}_{\omega^2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^*) \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\omega^2|\mathbf{A}_0|^2 \;=\; \boxed{\frac{\epsilon_0}{2}|\mathbf{E}_0|^2} \;. \tag{9.37}$$

Energiestromdichte

Entsprechend zu (9.37) gilt (mit $\mathbf{q} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ für die Energiestromdichte (8.9)

$$\boxed{\overline{\mathbf{S}}} \;=\; \frac{\omega}{2\mu_0}|\mathbf{A}_0|^2\;\mathbf{k} \;=\; \frac{\omega\mathbf{k}}{2\mu_0}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\omega^2} \;=\; \frac{\mathbf{k}}{2\mu_0}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{ck} \;=\; \boxed{\frac{\epsilon_0 c}{2}|\mathbf{E}_0|^2\;\mathbf{q}} \tag{9.38}$$

und direkt über (8.32) für die Impulsdichte [1]

$$\boldsymbol{\pi}_F \;=\; \frac{\epsilon_0}{2c}|\mathbf{E}_0|^2\;\mathbf{q} = \frac{1}{c^2}\overline{\mathbf{S}} \;. \tag{9.39}$$

Vergleicht man (9.37) mit (9.38), so findet man

$$|\overline{\mathbf{S}}| \;=\; c\,\overline{\omega}_F; \qquad c\,|\overline{\boldsymbol{\pi}}_F| \;=\; \overline{\omega_F}.$$

Die linke Gleichung zeigt, dass Energie des elektromagnetischen Feldes mit der Geschwindigkeit c transportiert wird. Die rechte Gleichung weist aufgrund der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E = \sqrt{m_o^2c^4 + p^2\;c^2}, \qquad\qquad \big(E = cp\big)_{m_0=0}$$

auf Ruhemasse-lose Teilchen (Photonen) hin.

9.4 Polarisation

Wegen der Transversalität und der Orthogonalität von **E** und **B** können wir eine monochromatische ebene Welle der Form (9.12) beschreiben durch:

$$\mathbf{E} \;=\; \mathbf{e}_1E_0\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)); \qquad \mathbf{B} \;=\; \mathbf{e}_2B_0\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)) \tag{9.40}$$

---

[1] die Impuls der Felder wird in der Vorlesung „Elektromagnetische Felder“ nicht behandelt. Wir benutzen hier das Ergebnis (8.32) für die Impulsdichte der Felder $\boldsymbol{\pi}_F = \mathbf{S}/c^2$.

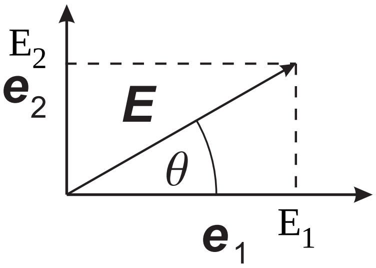
mit

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \;=\; \delta_{ij}; \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k} \;=\; 0. \tag{9.41}$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k}$ bilden also ein orthogonales Koordinatensystem. Eine solche Welle nennt man linear polarisiert. Eine zu (9.40) *gleichberechtigte*, linear unabhängige ebene Welle zu gleichem Wellenvektor $\mathbf{k}$ erhält man, indem man $\mathbf{E}$ in $\mathbf{e}_2$-Richtung und $\mathbf{B}$ in $\mathbf{e}_1$-Richtung wählt. Der allgemeine Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle ergibt sich dann nach dem Superpositionsprinzip, z.B. für das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} \;=\; (\mathbf{e}_1 \tilde{E}_1 + \mathbf{e}_2 \tilde{E}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \tag{9.42}$$

mit $\tilde{E}_l$ ($l = 1{,}2$) als beliebigen komplexen Zahlen $\tilde{E}_l \;=\; E_l \exp(i\phi_l)$, mit reellem E_l. Gleichung (9.42) beschreibt alle möglichen Polarisationszustände:



Spezialfälle

1.) Lineare Polarisation liegt vor, wenn **die Phasen beider Komponenten gleich sind**

$$\phi_1 \;=\; \phi_2. \tag{9.43}$$

Richtung und Betrag von $\mathbf{E}$ sind dann gegeben durch (s. Skizze)

$$\theta \;=\; \arctan(\frac{E_2}{E_1}); \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \tag{9.44}$$

2.) Zirkuläre Polarisation:

$$E_1 \;=\; E_2 \equiv E_0; \quad \phi_1 - \phi_2 \;=\; \pm\frac{\pi}{2}; \tag{9.45}$$

dann wird nämlich (wir können o.b.d.a. $\phi_1 = 0$ setzen)

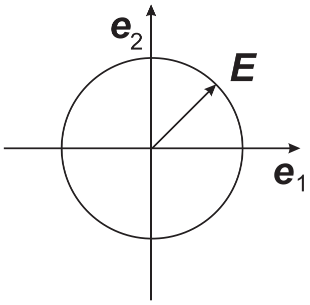
$$\mathbf{E} \;=\; E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \tag{9.46}$$

oder in reeller Darstellung (mit $\mathbf{k}$ in z-Richtung)

$$E_x \;=\; E_0 \cos(kz - \omega t); E_y \;=\; \mp E_0 \sin(kz - \omega t)\;. \tag{9.47}$$

Der Drehsinn ist durch die Wahl des Vorzeichens in (9.46) festgelegt; man erhält links- bzw. rechts-zirkulare Polarisation.

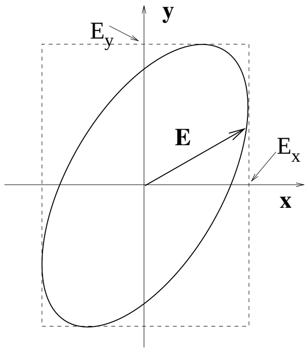
Allgemeiner Fall



3.) Elliptische Polarisation tritt auf für

$$E_1 \neq E_2; \quad \phi_1 - \phi_2 \neq 0. \tag{9.48}$$

E beschreibt dann für festes z eine Ellipsenbahn, deren Lage relativ zu $\mathbf{e}_1$ durch $\phi_1 - \phi_2$ und deren Hauptachsenverhältnis durch E_1/E_2 bestimmt ist (Skizze).



9.5 Ergänzung: Differentialoperatoren auf Ebene Wellen: Diskussion und Beispiele

Wir wollen Ergebnisse wie (9.20), ausführlicher herleiten und mit Beispielen belegen.

Wir haben eine **monochromatische ebene Welle**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \text{Re}\ \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \tag{9.49}$$

mit

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}\ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega\ t)}\ . \tag{9.50}$$

Der Realteil (Re) muss genommen werden, weil EM Felder reel sind. Die Realteilbildung ist allerdings für lineare Operationen kein Problem. Die Ableitungen bzgl. reeller Variabel, also $\boldsymbol{\nabla}$, $\partial/\partial t$, „vertauschen“ mit Re, da

$$\frac{\partial}{\partial\ r_i}\text{Re}\ f(\mathbf{r}) = \text{Re}\ \frac{\partial}{\partial\ r_i}\ f(\mathbf{r})\ , \tag{9.51}$$

wie man sich mit Hilfe der Definition der Ableitungen überzeugen kann. Das bedeutet, dass bei Anwendung eined linearen Operators an (9.49), dieses zunächst an die einfache Form (9.50) anwenden und *erst am Ende der Rechnung den Realteil bilden.* Das gilt *nur für lineare Operatoren.*

Wir haben also z. B.

$$\boldsymbol{\nabla}\times\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = i\ \mathbf{k}\times\mathbf{u}\ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega\ t)}\ . \tag{9.52}$$

Oder

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{k}\times\text{Re}\ i\ \mathbf{u}\ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega\ t)}\ . \tag{9.53}$$

Es ist ratsam, $\mathbf{u}$ „rechts“ des Realteils zu behalten, da u.U. $\mathbf{u}$ komplex sein kann. Ein komplexes $\mathbf{u}$ beschreibt verschiedene Polarizationszustände, siehe Absch. 9.4.

Also, für monochromatische ebene Wellen (9.49), die als der Realteil von (9.50) definiert werden, können Differentialoperatoren durch multiplikative Faktoren, wie in (9.20) gezeigt, ersetzt werden. *Mit der Konvention, dass am Ende der Realteil gebildet werden muss.*

Triviale Bemerkung: Ebene Wellen haben auch evtl. ein $+\omega$ statt des $-\omega$ im Exponential von (9.50). In dem Fall ändert sich entsprechend das Vorzeichen vor ω in (9.20). Ähnliches kann mit dem Vorzeichen von $\mathbf{k}$ vorkommen: Vorsicht ist geboten!

Betrag von r

Nicht ganz so einfach ist der Fall eines Vektorfeldes der Form (z. B.)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}\ f(q|\mathbf{r}| + c\ t)\ , \tag{9.54}$$

oder, etwas wie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}\ \frac{f(q|\mathbf{r}| + c\ t)}{|\mathbf{r}|}\ , \tag{9.55}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{r}\ \frac{f(q|\mathbf{r}| + c\ t)}{|\mathbf{r}|}\ , \tag{9.56}$$

oder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u} \times \mathbf{r}\ \frac{f(q|\mathbf{r}| + c\ t)}{|\mathbf{r}|}\ . \tag{9.57}$$

Wir betrachten den einfachsten Fall (9.54). Die Kettenregel gibt

$$\boldsymbol{\nabla}\ f(q|\mathbf{r}| + c\ t) = f'(q|\mathbf{r}| + c\ t)\boldsymbol{\nabla}(q|\mathbf{r}| + c\ t) = f'(q|\mathbf{r}| + c\ t)q\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\ . \tag{9.58}$$

Im Fall (9.54) haben wir also die „Regel“

$$\boldsymbol{\nabla} \cdots \to q\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\frac{\partial}{\partial\xi}\cdots \qquad (\xi = q|\mathbf{r}| + c\ t)\ . \tag{9.59}$$

So was ähnliches hatten wir schon in den Übungsaufgaben gesehen, nämlich

$$\boldsymbol{\nabla} f(|\mathbf{r}|) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}f'(|\mathbf{r}|)\ . \tag{9.60}$$

Die Zeitableitung ist einfacher.

Bei Formen wie (9.55), (9.56), (9.57) benutzt man die Produktregel und wendet $\boldsymbol{\nabla}$ an die verschiedenen Terme getrennt an.

Z.B.:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\ f(q|\mathbf{r}| + c\ t)\right) = \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} = \\
&= 3\ \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} + (\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|})\frac{\partial}{\partial|\mathbf{r}|}\frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} = \\
&= 3\ \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} + \frac{f'(\xi)\ q|\mathbf{r}| - f(\xi)}{|\mathbf{r}|} \\
&(\xi = q|\mathbf{r}| + c\ t)
\end{aligned} \tag{9.61}$$

Kapitel 10

Wellenpakete im Vakuum

10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen

Ein wichtiger Anwendungsbereich elektromagnetischer Strahlung ist die Informationsübertragung. Monochromatische ebene Wellen sind dazu ungeeignet, da sie praktisch keine Information außer ihrer Periode (ω) vermitteln können. Man kann monochromatische ebene Wellen jedoch **modulieren** und so Information übertragen. Im einfachsten Fall bildet man eine Überlagerung aus 2 monochromatischen Wellen:

$$f(t) \;=\; f_0 \cos(\omega_1 t) + f_0 \cos(\omega_2 t)\ . \tag{10.1}$$

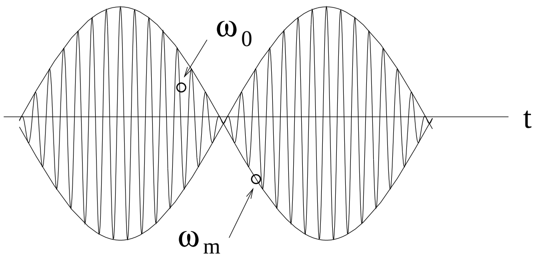
Alternativ kann (10.1) kann als **amplituden-modulierte Schwingung** dargestellt werden:

$$f(t) \;=\; 2 f_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) \tag{10.2}$$

mit

$$\omega_m \;=\; \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}; \qquad \omega_0 \;=\; \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{10.3}$$

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ gewählt wird, dann ist (10.2) eine fast harmonische Schwingung der Frequenz ω_0 (**Trägerfrequenz**), deren Amplitude sich mit der **Modulationsfrequenz** ω_m ändert. Man erhält das Bild einer *Schwebung*.



Kompliziertere Schwingungsformen und damit mehr Möglichkeiten zur Informationsübertragung ergeben sich durch Überlagerung mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen.

10.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Ausgehend von einer Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bildet man

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-i\omega_n t)} \qquad \omega_n = n\omega. \tag{10.4}$$

Die Fourier-Reihe (10.4) konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise), wenn $f(t)$ periodisch mit der Periode T und stückweise glatt ist. Die (schwächere) Forderung der Konvergenz im quadratischen Mittel ist erfüllt für periodische, in $[0, T]$ stetige Funktionen $f(t)$.

Fourier-Koeffizienten

Die Fourier-Koeffizienten f_n sind durch

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(i\omega_n t)\; dt. \tag{10.5}$$

gegeben. Für den Beweis verwenden wir (ÜB)

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega(m-n)t)\; dt = \delta_{mn} \tag{10.6}$$

und finden

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(i\omega_m t)\; dt = T\sum_n f_n\delta_{mn} = T\; f_m. \tag{10.7}$$

Fourier-Integrale

Nicht-periodische Funktionen lassen sich i.a. durch Fourier-Integrale darstellen, die sich aus (10.4) im Limes $T \to \infty$ ergeben.
Sei $\Delta\omega = 2\pi/T$ der Abstand benachbarter Frequenzen ω_n, so ist

$$f(t) = \sum_n \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega} f_n \exp(-i\omega_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_n)\exp(-i\omega_n t)\; \Delta\omega \tag{10.8}$$

mit

$$\tilde{f}(\omega_i) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{f_i}{\Delta\omega}\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{T}{2\pi}f_i\right). \tag{10.9}$$

Also kann man (10.8) als **Riemann-Summe** des **Fourier-Integrals**

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\exp(-i\omega t)\; d\omega} \tag{10.10}$$

auffassen. Für die Umkehrung von (10.10) zeigt der Vergleich von (10.5) und (10.9):

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) \; dt} \; . \tag{10.11}$$

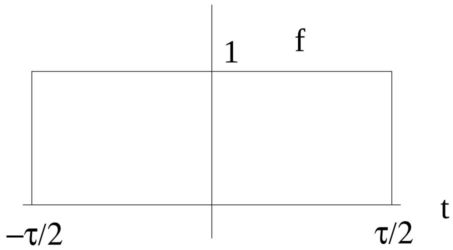
$\tilde{f}(\omega)$ heißt die **Fourier-Transformierte** zu $f(t)$. Sie existiert und (10.10) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrablen Funktionen $f(t)$, für die

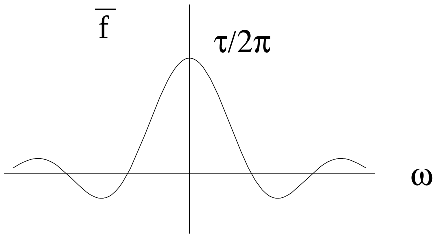
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \; dt \; < \; \infty; \tag{10.12}$$

$\tilde{f}(\omega)$ ist dann auch quadratintegrabel.

Beispiel: Rechteckimpuls

$$f(t) \; = \; 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \qquad f(t) \; = \; 0 \quad \text{sonst.} \tag{10.13}$$





Dann wird

$$\tilde{f}(\omega) \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(i\omega t) \; dt \; = \; \frac{1}{\pi\omega} \frac{\exp(i\omega t)}{2i} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \; = \; \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\pi\omega}. \tag{10.14}$$

Die Breite $\Delta\omega$ von $\tilde{f}(\omega)$ schätzt man aus obiger Figur ab zu:

$$\Delta\omega \; \approx \; \frac{2\pi}{\tau} \qquad \text{oder} \qquad \Delta\omega\Delta t \; \approx \; 2\pi. \tag{10.15}$$

Je schmaler (breiter) das Signal $f(t)$ werden soll, desto breiter (schmaler) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt. Diese **Unschärferelation** ist nicht an das Beispiel (10.13) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fourier-Transformation.

Bemerkung

Oft wird die Fourier-Transformation in der symmetrischen Form

$$f(t) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) \; d\omega \tag{10.16}$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t)\; dt \tag{10.17}$$

benutzt.

In drei Dimensionen wird die Fourier-transformation für jede Komponente durchgeführt. Die Transformation erfolgt also vom Ortsraum $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ zum Wellenvektorraum $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$:

$$g(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{g}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\; d^3\mathbf{k} \tag{10.18}$$

mit

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\; d^3\mathbf{r}\;. \tag{10.19}$$

Das „plus“ oder „minus“ Vorzeichen im Exponenten der Gl. 10.18 bzw. Gl. 10.19 ist eine Konventionssache. Die inversen Transformation Gl. 10.19 muss aber das entgegengesetzte Vorzeichen als Gl. 10.18 haben.

10.3 δ-Distribution

Die Fourier-Transformation (10.10), (10.11) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man (10.11) in (10.10) ein, so muss (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i\omega(t-t'))d\omega dt' \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')\; dt' \tag{10.20}$$

mit

$$\boxed{\delta(t-t') \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(t-t'))\; d\omega} \tag{10.21}$$

(plus oder minus Zeichen im Exponenten ist egal). für beliebige quadratintegrable Funktionen $f(t)$ gelten. Die hier eingeführte Größe $\delta(t-t')$ ist offensichtlich keine gewöhnliche Funktion, sondern eine **Distribution**, welche streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbinding mit der Integration in (10.20) erklärt ist.

Darstellungen

Die δ-Distribution, als deren Definition wir im folgenden (10.20) betrachten wollen, kann durch jede Folge stetiger Funktionen δ_n, für die

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta_n(t-t')\; dt' \;=\; f(t) \tag{10.22}$$

gilt, dargestellt werden. Beispiele:

1.) Rechteck

$$\delta_n(t) \; = \; n \quad \text{für} \quad |t| < \frac{1}{2n}; \qquad \delta_n(t) \; = \; 0 \quad \text{sonst.} \tag{10.23}$$

2.) Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) \; = \; n \exp(-\pi t^2 n^2). \tag{10.24}$$

3.) Die Darstellung

$$\delta_n(t) \; = \; \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nt)}{t} \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \exp(i\omega t) \; d\omega \tag{10.25}$$

führt gerade auf die Schreibweise (10.21).

Vorsicht: Die Gleichungen (10.22) - (10.25) sind so zu verstehen, dass die t'-Integration vor der Limes-Bildung $n \to \infty$ auszuführen ist!

Rechenregeln (ÜB)

1.) $\delta(t) \; = \; \delta(-t)$

2.) $\delta(at) \; = \; \frac{1}{|a|}\delta(t)$

3.) $\delta(t^2 - a^2) \; = \; \left[\delta(t+a) + \delta(t-a) \right] / \, (2|a|); \qquad a \neq 0$.

4.) im allgemeinen: $\delta(f(t)) \; = \; \sum_{\{t_i | f(t_i)=0\}} \frac{1}{|f'(t)|} \delta(t - t_i)$

10.4 Wellenpakete

Signale endlicher Energie erhält man nur für raum-zeitlich begrenzte Felder (Wellenpakete), die wir aus monochromatischen ebenen Wellen durch Superposition aufbauen können. Für das Vektorpotential erhalten wir (in Erweiterung der Fourier-Transformation auf 3 Dimensionen):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \; \frac{1}{2} \sum_{\eta = \pm 1} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) \, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \eta\omega t)} \; , \tag{10.26}$$

mit der Vereinbarung

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| \; . \tag{10.27}$$

In (10.26) haben wir eine Summe über $\eta = \pm 1$ eingeführt, um beide Basislösungen (9.12) ($exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \eta\omega t))$) zu berücksichtigen. Da $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ reell sein soll haben wir aber

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) = \mathbf{A}(-\mathbf{k}, -\eta)^* \equiv \mathbf{A}(\mathbf{k}) \; . \tag{10.28}$$

Dann können wir (10.26) umschreiben als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ Re\ \left[\mathbf{A}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right]\ , \tag{10.29}$$

was die Superposition von monochromatischen, ebenen Wellen ersichtlich macht

Wegen $\omega = c|\mathbf{k}|$ kommen in (10.26) alle Frequenzen ω vor. (10.26) ist eine beliebige Kombination der linear unabhängigen, monochromatischen, ebenen Wellen und stellt daher die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung (9.6) dar. In der **Coulomb-Eichung** fordert man zusätzlich

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{k}) \;=\; 0\ . \tag{10.30}$$

Photonen-Addition der Erhaltungsgrössen

Wichtig für den Aufbau der Quantenmechanik, welche das elektromagnetische Feld durch Photonen beschreibt, ist die Eigenschaft, dass Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes sich additiv aus den Beiträgen der einzelnen monochromatischen ebenen Wellen zusammensetzen (wie z.B. (9.37)). Das ist nicht trivial, da diese Größen *quadratische* Funktionen der Felder sind. Trotzdem kann die Additivität dieser Größen auf folgende allgemeinen Eigenschaft der Fouriertransformation (10.26) zurückgeführt werden. Wir betrachten ein Integral der Form

$$\int |\mathbf{A}(\mathbf{r},t)|^2\ d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4\ (2\pi)^3}\int d^3\mathbf{r}\int d^3\mathbf{k}'\int d^3\mathbf{k}\sum_{\eta',\eta=\pm1}\mathbf{A}(-\mathbf{k}',-\eta')\cdot\mathbf{A}(\mathbf{k},\eta)e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-i(\eta\omega-\eta'\omega')t}\ , \tag{10.31}$$

mit $\omega = c|\mathbf{k}|$ und $\omega' = c|\mathbf{k}'|$. Die Verallgemeinerung von (10.21) auf drei Dimensionen gibt

$$\int d^3\mathbf{r}\ e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\ . \tag{10.32}$$

(10.31) wird also vereinfacht ($\mathbf{k} = \mathbf{k}'\ \omega = \omega'$):

$$\int |\mathbf{A}(\mathbf{r},t)|^2\ d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4}\int d^3\mathbf{k}\sum_{\eta,\eta'=\pm}\mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta')\cdot\mathbf{A}(\mathbf{k},\eta)e^{-i(\eta-\eta')\omega t} \tag{10.33}$$

Für Energie, Impuls, etc. müssen wir zusätzlich Differentialoperatoren auf $\mathbf{A}$ anwenden. Wir haben folgende einfache Regel für die Anwendung eines beliebigen Differentialoperator (bezüglich $\mathbf{r}$ und t) in der Form $f(\nabla,\partial/\partial t)$ an $\mathbf{A}$:

$$f(\nabla,\partial/\partial t)\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{2\ (2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \sum_{\eta} f(i\ \mathbf{k},-i\ \eta\omega)\mathbf{A}(\mathbf{k},\eta)\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\eta\omega t)} \qquad \omega = c|\mathbf{k}|\ . \tag{10.34}$$

Die Fouriertransformation wird also lediglich mit der selben Funktion von $i\ \mathbf{k}, -i\ \eta\omega$ **multipliziert**. Wir können diese Regel für die Berechnung der Feldenergie anwenden.

Nach (8.8) haben wir

$$U_F \ = \int \left[\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2}_{\mathbf{E}^2} + \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{A})^2}_{\mathbf{B}^2} \right] d^3r \ . \tag{10.35}$$

Diese kann mit Hilfe von (10.34) und (10.33) umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} U_F \ = \quad & \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta,\eta'} \Big[\frac{\epsilon_0}{2} (-i^2 \ \eta\eta'\omega^2) \ \mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta) + \qquad (10.36) \\ & + \frac{1}{2\mu_0} \left(-i \ \mathbf{k} \times \mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta')\right) \cdot \left(i \ \mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta)\right) \Big] \ . \end{aligned}$$

In der Coulomb Eichung ist $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta) = 0$, so dass $(\mathbf{k} \times \mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta')) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta)) = k^2 \ \mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta)$. Wir verwenden noch $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ und erhalten

$$U_F \ = \frac{\epsilon_0}{8} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta,\eta'} \ \mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta) \left(\eta\eta'\omega^2 + \omega^2\right) = \frac{\epsilon_0}{4} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta} \omega^2 \ \mathbf{A}(-\mathbf{k},-\eta) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k},\eta) \tag{10.37}$$

da nur Terme mit $\eta' = \eta$ bleiben. Wir können Terme mit $\eta = \pm 1$, die wegen (10.28) den selben Beitrag liefern zusammenfassen:

$$\boxed{U_F \ = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} \ \omega(\mathbf{k})^2 \ |\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} \ |\mathbf{E}(\mathbf{k})|^2} \ . \tag{10.38}$$

wo wir $\omega(\mathbf{k})$ nach (10.27) explizit geschrieben haben.

Gleichung (10.38) beschreibt die Feldenergie als Summe (Integral) der Einzelbeiträge (9.37) der beteiligten monochromatischen Wellen. Sie stellt, zusammen mit den entsprechenden Gleichungen für Impuls und Drehimpuls, die Grundlage für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch unabhängige *Teilchen* (Photonen) dar. U_F ist selbst zeitunabhängig in Einklang mit der Energieerhaltung.

10.5 I Übersicht Elektrodynamik

Felder und Gleichungen

Maxwell Gleichungen

$(A) \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$(B) \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$
$(C) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$(D) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \, \mathbf{j}$

Elektrodynamische Potentiale

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

Eichinvarianz

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla \chi \qquad \Phi \to \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

Lorentz-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

Gleichungen:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Erhaltungssätze

Energie

$$\frac{dU_F}{dt} + \frac{dW_M}{dt} + \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = 0 \; .$$

$$U_F = \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) \, dV \; ,$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \; .$$

Impuls

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i + \oint_F \sum_{m=1}^{3} T_{im} \, df_m = 0 \; ,$$

$$\mathbf{P}_F = \int_V \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \, dV$$

$$T_{im} = \epsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \delta_{im} - E_i E_m \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \delta_{im} - B_i B_m \right)$$

Drehimpuls

$$\mathbf{L}_F = \int_V \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \, dV$$

Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{X} \;=\; 0 \qquad\qquad (\mathbf{X} = \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{A})$$

Ebene Wellen

$$\mathbf{X}(\mathbf{r},t) = \mathbf{X}_0\ f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \mp \omega t) \qquad \mathbf{X}_0 = \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{A}_0 \qquad \omega = c|\mathbf{k}|$$

$$\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k} = \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{k} = \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0 = 0 \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 \propto \mathbf{B}_0$$

Monochromatische Ebene Wellen

$\mathbf{X}(\mathbf{r},t) = \mathbf{X}_0\ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)}$ Komplexes Feld

$\mathrm{Re}\ \mathbf{X}(\mathbf{r},t)$ Physikalisches Feld

$$\boldsymbol{\nabla} \to i\ \mathbf{k} \qquad \frac{\partial}{\partial\ t} \to \mp i\ \omega$$

Wellenpakete

$$\mathbf{X}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\ \widetilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k},t)$$

mit

$$\widetilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k},t) \equiv \frac{1}{2}\sum_{\eta=\pm 1}\mathbf{X}(\mathbf{k},\eta)\mathrm{e}^{-i\eta\ \omega_k\ t} \qquad \omega_k = c\ k \tag{10.39}$$

Zeitgemittelte Energiedichte, Pointingvektor, Impuls

$$\overline{\omega}_F = \frac{\epsilon_0}{2}|\mathbf{E}_0|^2 \qquad \overline{\mathbf{S}} = c\ \frac{\mathbf{k}}{k}\ \overline{\omega}_F = c^2\ \overline{\boldsymbol{\pi}}_F$$

Inversion der Fouriertransformation

$$\text{aus} \quad \int d^3\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} = (2\ \pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

$$\widetilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}', t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{r}\ \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})}\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$$

Wegen (10.39) können die $\mathbf{X}(\mathbf{k}, \eta = +\mathbf{1})$ und $\mathbf{X}(\mathbf{k}, \eta = -\mathbf{1})$ aus $\widetilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, t)$ für zwei Werte von t oder aus $\widetilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, t)$ und seine Zeitableitung bestimmt werden.

Teil V

Das elektromagnetische Feld in Materie

Kapitel 11

Makroskopische Felder

Im Prinzip erlauben die Maxwell-Gleichungen von Teil III das elektromagnetische Feld beliebiger Materieanordnungen zu berechnen, sobald die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ exakt bekannt sind. In einer solchen *mikroskopischen* Theorie wird die gesamte Materie in dem betrachteten Raumbereich in Punktladungen (Elektronen und Atomkerne) zerlegt, deren Bewegungszustand dann Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ definiert. Für Materieanordnungen von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. Kondensator mit Dielektrikum oder stromdurchflossene Spule mit Eisenkern) ist eine *mikroskopische* Rechnung in der Praxis weder durchführbar noch erstrebenswert, da experimentell doch nur räumliche und zeitliche Mittelwerte der Felder kontrollierbar sind. Wir werden uns daher im Folgenden mit raum-zeitlichen Mittelwerten befassen.

11.1 Makroskopische Mittelwerte

Wenn man an mikroskopischen Details nicht interessiert ist, kann man sie durch eine räumliche Mittelung über viele Atomabstände oder Gitterkonstanten eliminieren. Die Mittelung von einem Feld $A(\mathbf{r},t)$ wird durch die Faltung mit einer geeigneten Funktion $f(\mathbf{r})$ definiert,

$$< A > (\mathbf{r},t) = \int d^3\mathbf{r}'\; A(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)\; f(\mathbf{r}') \qquad \text{mit} \qquad \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{r}') = 1\;. \tag{11.1}$$

Die Funktion f sei bei $\mathbf{r}' = 0$ zentriert und nicht negativ. Die einfachste Wahl hat die Form einer „Kasten“-Funktion:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{b^3}\,\theta(b/2-|r_x|)\;\theta(b/2-|r_y|)\;\theta(b/2-|r_z|)\;, \tag{11.2}$$

also einem kubischen Kasten mit dem Volumen $\Delta V = b^3$ und mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Um Unstetigkeiten zu vermeiden kann u.U. eine stetige Funktion, wie z.B. eine Gaußfunktion geeigneter sein:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2}\;b^3}\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{b^2}\right)\;. \tag{11.3}$$

Die Mittelungslänge b soll sehr groß gegenüber der Skala der mikroskopischen Ladungsfluktuationen in einem Material (also der Größe der Elementarzellen) aber klein gegenüber der Skala, auf der die zu studierenden Phänomene variiren, also typischerweise kleiner als die Wellenlänge λ, sein.

Auf ähnliche Weise werden die Felder auch über die Zeit gemittelt, damit Fluktuationen mit sehr kurzen Zeitskalen (wie z.B. Schwingungen von Molekülen) vernachlässigt werden können. Die Form dieser Zeitmittelung ist ähnlich zu (11.1). Hier führt man eine „Mittelungsfunktion" $\bar{f}(t)$, die durch eine Mittelungszeit τ characterisiert ist, die sehr groß gegenüber der Skala der mikroskopischen Zeitfluktuationen.

Wir wollen im Folgenden Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten (11.1) für Ladungs- und Stromdichte einerseits und den Feldern andererseits herstellen. Ausgangspunkt sind die *mikroskopischen* Maxwell-Gleichungen.

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \tag{11.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{11.5}$$

Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \tag{11.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{11.7}$$

Makroskopische Felder

Wenn wir annehmen, dass in (11.1) Differentiationen nach $\mathbf{r}$ und t unter dem Integral ausgeführt werden dürfen, dann bekommen wir unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial t} < A > (\mathbf{r}, t) = < \frac{\partial A}{\partial t} > (\mathbf{r}, t); \qquad \frac{\partial}{\partial r_i} < A > (\mathbf{r}, t) = < \frac{\partial A}{\partial r_i}(\mathbf{r}, t) >; \qquad \text{etc.,} \tag{11.8}$$

so erhalten wir aus (11.4)-(11.7) völlig analoge Gleichungen für die Mittelwerte:

$$\nabla \cdot < \mathbf{B} > = 0; \qquad \nabla \times < \mathbf{E} > + \frac{\partial < \mathbf{B} >}{\partial t} = 0 \tag{11.9}$$

und

$$\nabla \cdot < \mathbf{E} > = \frac{< \rho >}{\epsilon_0}; \qquad \nabla \times < \mathbf{B} > - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial < \mathbf{E} >}{\partial t} = \mu_0 < \mathbf{j} > \ . \tag{11.10}$$

Die homogenen Gleichungen (11.9) bleiben beim Übergang von den *mikroskopischen* Feldern $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ zu den *makroskopischen* Feldern

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \equiv < \mathbf{E} >; \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv < \mathbf{B} > \tag{11.11}$$

erhalten. Diese Eigenschaft folgt aus der Linearität der Maxwellgleichungen.

In den inhomogenen Gleichungen (11.10) wollen wir nun $< \rho >$ und $< \mathbf{j} >$ geeignet aufteilen.

11.2 Freie und gebundene Ladungsträger

Wir befassen uns zunächst in (11.10) mit dem Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ und seinen Quellen. Dazu zerlegen wir

$$< \rho > = \rho_b + \rho_f, \tag{11.12}$$

wobei ρ_b die im Sinne von (11.1) gemittelte Dichte der *gebundenen* Ladungsträger (b steht für *'bound'*) darstellt, ρ_f die gemittelte Dichte der *freien* Ladungsträger (f steht für *'free'*).

Freie Ladungsträger sind z.B. Leitungselektronen in Metallen, Ionen in Gasen oder Elektrolyten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie unter dem Einfluss eines äußeren Feldes einen makroskopischen Strom bilden.

Gebundene Ladungsträger sind z.B. die Gitterbausteine eines Ionen-Kristalls (wie $NaCl$ mit den Gitterbausteinen Na^+ und Cl^-) oder die Elektronen von Atomen und Molekülen. Gebunden bedeutet dabei nicht, dass die Ladungsträger total unbeweglich sind, sondern nur, dass sie durch starke rücktreibende Kräfte an bestimmte *Gleichgewichtslagen* gebunden sind. Unter dem Einfluss des äußeren elektrischen Feldes werden diese Ladungen lediglich um kleine Abstände verschoben, also polarisiert. Es ensteht eine sogenannte

Dielektrische Polarisation.

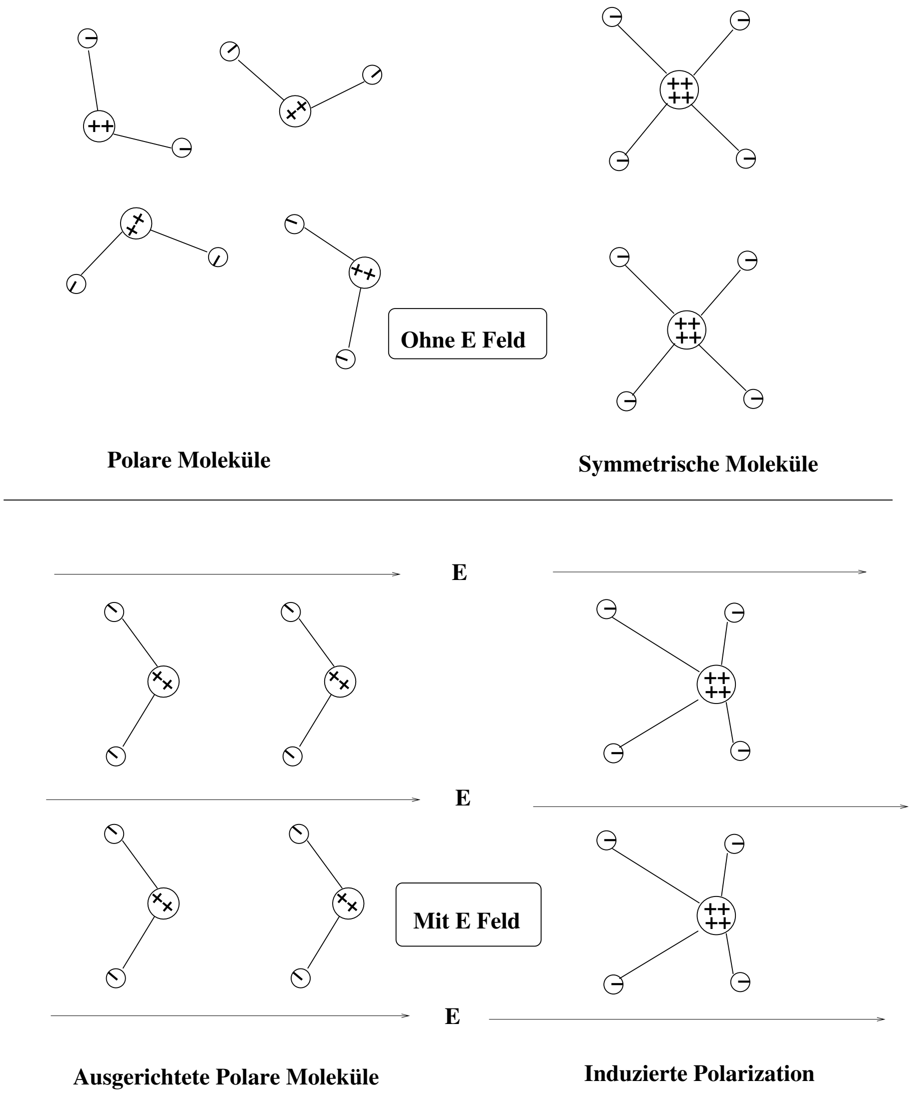
Die Polarisation kann einerseits durch die Ausrichtung der Moleküle erfolgen, die bereits eine asymmetrische Ladungsverteilung zeigen (sog. polare Moleküle: (Fig. 11.2 links)). Anderseits können in ursprünglich symmetrischen Molekülen Ladungen verschoben und somit Dipolmomente induziert werden, die sich dem äußeren Feld entsprechend ausrichten (Fig. 11.2 rechts).

Die makroskopische Ladungsdichte ist gegeben (wegen (11.1)) durch die Ladungsdichte, gemittelt über ein Volumen $\Delta V =\sim b^3$, das sehr viele Moleküle enthält. In so einem Volumen kompensieren sich positive und negative Ladungen: die gemittelte Ladungsdichte scheint also auch in Präsenz eines $\mathbf{E}$ -Feldes zu verschwinden.

Betrachten wir dagegen das *Dipolmoment* der einzelnen Moleküle in Präsenz eines externen $\mathbf{E}$ -Feldes (Fig. 11.2 unten) sieht man, dass dieser Vektor (ungefär) die gleiche Richtung für alle Moleküle hat. Bildet man die vektorielle Summe der einzelnen Dipolmomente in dem Volumen ΔV erhält man ein Gesamtdipolmoment $\mathbf{d}$, das proportional zur Anzahl der Moleküle, also zum Volumen ΔV anwächst. Deswegen verschwindet sein Mittelwert berechnet nach (11.1) nicht.

Nach (1.32) erzeugt in $\mathbf{r}$ ein elektrischer Dipol $\mathbf{d}$ ein Potential

$$\Phi_{\Delta V}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \tag{11.13}$$



wo $\mathbf{r}'$ ein Punkt innerhalb ΔV ist.[1]

In völliger Analogie zur Ladungs- und Stromdichte kann man die *dielektrische Dipoldichte* oder *Polarisation* $\boldsymbol{P}$ definieren als

$$\boldsymbol{P} = \frac{\textbf{elektrisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}} \,. \tag{11.14}$$

Im Prinzip sollte in (11.14) der Limes Volumen → 0 gebildet werden. Da wir aber ohnehin nur an makroskopischen Mittelwerten interessiert sind, reicht es in der Praxis wenn, wie oben erwähnt, das Volumen $\Delta V \sim b^3 \ll \lambda^3$.

Die Polarisation eines nichtleitenden Materials (*Dielektrikum*) ist charakterisiert durch eine Polarisationsdichteverteilung $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ in jedem Punkt $\mathbf{r}$ des Materials. Das Potential einer solchen Dipolverteilung ist durch die Summe über alle Volumina ΔV von Beiträgen

---

[1] Voraussetzung ist $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg b \sim (\Delta V)^{1/3}$, d. h. nochmals brauchen wir Abstände, die viel größer als atomare Längen sind

wie (11.13) gegeben. Diese Summe kann durch ein Integral über das Gesamtvolumen ersetzt werden wobei $\mathbf{d} = \boldsymbol{P}(\mathbf{r}')\ dV'$ ist:

$$\Phi(\mathbf{r}) \ = \ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \ \frac{\boldsymbol{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \ . \tag{11.15}$$

Dieser Ausdruck kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) \quad &= \ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \ \boldsymbol{P}(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \left[\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \cdot \boldsymbol{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\boldsymbol{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ df' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \ \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \cdot \boldsymbol{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ , \end{aligned} \tag{11.16}$$

wobei $\mathbf{n}'$ der nach außen gerichtete Normaleinheitsvektor des Flächenelements $d\mathbf{f}' = \mathbf{n}'\ df'$ ist. Hierin kann das Oberflächenintegral des 1. Terms als Potential einer Flächenladungsdichte und das Volumenintegral des 2. Terms als Potential einer Volumenladungsdichte betrachtet werden.

Aus (11.16) können wir also das elektrostatische Potential einer Dipolverteilung (11.16) als Überlagerung des Potentials der Ladungsdichte der gebundenen Ladungsträger

$$\boxed{\rho_b(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}(\mathbf{r})} \tag{11.17}$$

und der Flächenladungsdichte

$$\boxed{\sigma_b(\mathbf{r}) = \boldsymbol{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}} \tag{11.18}$$

betrachten. Für das entsprechende **E**-Feld erhalten wir aus (11.16)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \ \sigma_b(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \ df' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \ \rho_b(\mathbf{r}') \ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \ . \tag{11.19}$$

Nimmt man ein genügend großes Volumen, auf dessen Oberfläche keine gebundene Ladungen sind, dann verschwinden die Oberflächenintegrale in (11.16) und (11.19).

Wir haben mit (11.17) den Zusammenhang zwischen der Ladungsdichte der gebundenen Ladungsträger und der Polarisationsladungsdichte hergestellt. Wir benutzen (11.17) zusammen mit (11.10) (links) und erhalten

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} \ + \ \boldsymbol{P}) = \rho_f \tag{11.20}$$

oder nach Einführung der *dielektrischen Verschiebung*, $\boldsymbol{\mathcal{D}}$,

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}} \ = \ \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} \ + \ \boldsymbol{P}} \tag{11.21}$$

erhalten wir

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} \ = \ \rho_f \ .} \tag{11.22}$$

(11.22) ersetzt also die erste inhomogene Gleichung (11.10), wobei nur die *freien* Ladungsträger als Quellen der dielektrischen Verschiebung dienen.

11.3 Mikroskopische Ströme

Wir wollen nun noch die zweite inhomogene Gleichung in (11.10) umformen. Analog zu (11.12) teilen wir auf:

$$< \mathbf{j} > = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b \, . \tag{11.23}$$

Dabei ist:

$\boxed{\mathbf{j}_f}$ die von der Bewegung der freien Ladungsträger herrührende, gemäß (11.1) gemittelte, Stromdichte.

$\boxed{\mathbf{j}_b}$ die von der Bewegung der gebundenen Ladungsträger herrührende (gemittelte) Stromdichte.

Solange freie und gebundene Ladungen nicht untereinander mischen, gilt der Ladungserhaltungssatz für freie und gebundene Ladungen unabhängig. Entsprechend gilt also die *Kontinuitätsgleichung für freie und gebundene Ladungen und deren Strömen getrennt.* Betrachten wir also die Zeitableitung von (11.17) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung für gebundene Ladungsträger

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_b = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_b \, . \tag{11.24}$$

Diese Gleichung legt es nahe einen Strom

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \, . \tag{11.25}$$

einzuführen und diesen für $\mathbf{j}_b$ zu nehmen. Allerdings stellt $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P$ nicht die allgemeine Lösung von (11.24) dar. Man kann in der Tat einen beliebigen divergenzfreien Strom addieren.

Wir schreiben also

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M \tag{11.26}$$

mit

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_M = 0 \, . \tag{11.27}$$

Nach (11.25) stellt $\mathbf{j}_P$ den Strom dar, der aus der Bewegung elektrischer Dipole stammt.

Der Stromanteil $\mathbf{j}_M$ stammt dagegen aus den molekularen Kreisströmen d. h. solchen, welche magnetische Dipole erzeugen. In Analogie zu (11.14) definieren wir die *magnetische Dipoldichte* oder *Magnetisierung* als

$$\mathbf{M} = \frac{\textbf{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}} \, . \tag{11.28}$$

Nach (5.26) erzeugt in $\mathbf{r}$ ein magnetisches Dipolmoment $\mathbf{m}$ in $\mathbf{r}'$ ein Vektorpotential

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\, \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \, . \tag{11.29}$$

Analog zu (11.16) erhalten wir für eine Verteilung magnetischer Dipole $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) &= \int dV'\ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= \int dV'\ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \int_V dV' \left[-\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right]
\end{aligned} \tag{11.30}$$

Mittels der vektoriellen Version des Gauß'schen Satzes[2] kann man das erste Integral in ein Integral über die Oberfläche umwandeln

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, df' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV'\ \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ . \tag{11.31}$$

Analog zum Fall der dielektrischen Polarisation, können wir das Vektorpotential einer Verteilung magnetischer Dipole(11.31) als Überlagerung des Vektorpotentials einer *Magnetisierungsstromdichte*

$$\boxed{\mathbf{j}_M = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}} \tag{11.32}$$

mit dem Vektorpotentials einer *Magnetisierungsflächenstromdichte*

$$\boxed{\mathbf{i}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}} \tag{11.33}$$

betrachten. Es ist offensichtlich, dass aus (11.32) (11.27) folgt.

In Analogie zu (11.21) definieren wir das *Makroskopische Magnetfeld*

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} \equiv \frac{\boldsymbol{\mathcal{B}}}{\mu_0} - \mathbf{M}\ . \tag{11.34}$$

Aus (11.32), (11.21), (11.25) und der zweiten von (11.10) erhalten wir

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} - \mathbf{j}_M = (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} - \mathbf{j}_M = (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P) + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\ . \tag{11.35}$$

Also

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f\ , \tag{11.36}$$

was die zweite nichthomogene Gleichung im Vakuum (11.10) ersetzt, wobei nur die *freien* Ströme als Quellen des Magnetfeldes $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ dienen.

Bemerkungen

1.) Ein mikroskopisches Analogon besitzen nur die Felder $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, nämlich $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ (vgl. (11.11)). $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ sind nur *Hilfsfelder*, die wir einführen, um komplizierte elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie pauschal zu erfassen.

---

[2] (siehe Vorlesung „Vektoralgebra"). Verwenden Sie den Gauß'schen Satz $\int_V dV\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\ df$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{e}$ und $\mathbf{e}$ einen beliebigen konstanten Vektor.

2.) Wie im Fall der dielektrischen Polarisierung wird in der Regel eine makroskopische magnetische Polarisation (oder Magnetisierung) dadurch zustandekommen, dass vorhandene elektrische (oder magnetische) Dipole im Feld *ausgerichtet* werden oder dass Dipole vom Feld *induziert* werden (vgl. Fig. 11.2). Im Normalfall sind *permanente* magnetische Dipole ohne äußeres Feld statistisch verteilt und ergeben nach Mittelung über ein makroskopisches Volumen keine Polarisation (oder Magnetisierung).

Ausnahmen dazu sind *ferromagnetische Materialien*, in denen eine makroskopische Magnetisierung ohne äußeres Feld vorhanden ist.

3.) Die homogene Gleichungen (11.9) gelten nur für die Felder $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ aber im Allgemeinen nicht für $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

4.) Beachten Sie, dass die Lorentzkraft weiterhin die $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ oder wenn gemittelt die $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ Felder enthält:

$$< \mathbf{F} >= q(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) \ . \tag{11.37}$$

Zusammenfassend werden in der Materie die Gleichungen (11.9)-(11.10) ersetzt durch folgende **Makroskopischen Feldgleichungen**

Homogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} \ = \ 0; \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \ = \ 0} \tag{11.38}$$

Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} \ = \ \rho_f; \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} \ = \ \mathbf{j}_f} \tag{11.39}$$

Mit den Verknüpfungen

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}} \ = \ \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{P}; \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} \ = \ \mu_0 \boldsymbol{\mathcal{H}} + \mu_0 \mathbf{M}} \tag{11.40}$$

Die Gleichungen (11.38)-(11.39) haben formal eine ähnliche Struktur wie (11.4)-(11.7). Allerdings reichen diese Gleichungen noch nicht aus, um - bei gegebener freier Ladung- und Stromdichte $\rho_f, \mathbf{j}_f$ - die vier Felder $\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}$ zu bestimmen.

Auch die Verknüpfungen (11.40) helfen nicht weiter, wenn man die Polarisationen $\boldsymbol{P}$ und $\mathbf{M}$ nicht kennt. Die Schwierigkeit ist eben, dass diese Polarisationen nicht von außen vorgegeben werden, sondern wiederum von den Feldern $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ abhängig sind. Diese Verknüpfungen können im Prinzip beliebig kompliziert ausfallen.

Lineare Medien

Zum Glück kann man für die meisten Substanzen ein linearen Zusammenhang annehmen, der zu einer deutlichen Vereinfachung der Gleichungen (11.38)-(11.40) führt. Für viele Materialien ist in der Tat die dielektrische Polarisation proportional zu $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, d. h.

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{11.41}$$

wobei χ_e die *dielektrische Suszeptibilität* ist. Daraus folgt die Proportionalität zwischen $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon\ \boldsymbol{\mathcal{E}}} \tag{11.42}$$

mit der Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon = (1 + \chi_e)\ \epsilon_0\ . \tag{11.43}$$

Die Dielektrizitätskonstante ist eine Eigenschaft des Materials. In den nächsten Kapiteln werden wir einfache Modelle zur Bestimmung dieser Konstante studieren. ϵ ist ein Skalar nur in isotropen Medien: in anisotropen Medien ist diese Konstante ein Tensor 2. Stufe. Für höhere Frequenzen hängt ϵ auch von der Frequenz (und evtl. vom Wellenvektor) ab.

Gleichermaßen gilt für die magnetische Polarisation in vielen Materialien

$$\mathbf{M} = \chi_m\ \boldsymbol{\mathcal{H}}\ . \tag{11.44}$$

Die Proportionalitätskonstante χ_m heißt *magnetische Suszeptibilität.* Aus (11.44) erhalten wir einen linearen Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{H}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu\ \boldsymbol{\mathcal{H}}}\ , \tag{11.45}$$

mit der *magnetischen Permeabilität*

$$\mu = (1 + \chi_m)\ \mu_0\ . \tag{11.46}$$

Die Verknüpfungen (11.40), sowie (11.42) und (11.45) sind höchst unglücklich, weil sie für **E** und **B** Felder asymmetrisch sind. Auf dem selben Grund haben Formeln in der Magnetostatik μ_0 im *Zähler*, während die entsprechende Formel in der Elektrostatik ϵ_0 im *Nenner* haben. Diese Asymmetrie hat allerdings seine praktische Bedeutung: in (11.40), (11.42) und (11.45) sind $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ die unabhängigen Felder, weil diese experimentell am besten kontrollierbar sind. In der Elektrostatik ist es einfacher das $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ Feld, durch z.B. Spannungen, zu kontrollieren. In der Magnetostatik dagegen ist es einfacher $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ durch Ströme zu kontrollieren.

Kapitel 12

Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen

Betrachtet man ϵ und μ als frequenzunabhängige, skalare Konstanten, dann lassen sich formell die Maxwell Gleichungen in einem linearen, isotropen Medium (11.38), (11.39) mit Hilfe von (11.42) und (11.45) in der gleichen Form wie die Maxwell Gleichungen im Vakuum (6.25) schreiben, wobei $\mu_0 \to \mu$ und $\epsilon_0 \to \epsilon$ und die freie Ladungs- und Stromdichte erscheinen. Betrachtet man Effekte innerhalb eines *einzigen* Dielektrikums (also keine Effekte an den Grenzflächen) lassen sich die bereits herleiteten Ergebnisse für Felder im Vakuum auf die in einem Dielektrikum mit der einfachen Transformation $\mu_0 \to \mu$ und $\epsilon_0 \to \epsilon$ erweitern. Unter anderem ist die Phasengeschwindigkeit der EM Wellen in einem Medium ((12.34) unten) nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Neue physikalische Effekte bekommt man, wenn die Frequenzabhängigkeit von ϵ und μ (Dispersion) oder der Übergang zwischen zwei Dielektrika mit unterschiedlichen Konstanten im Spiel kommen. Wir betrachten zunächst den letzteren Effekt.

12.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften.

1.) Normalkomponenten von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{D}$

Wir hatten im Absch. 3.2 bereits mit Hilfe des Gauß'schen Satzes für $\mathbf{E}$ gezeigt, dass aus $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ folgt, dass die Normalkomponente des $\mathbf{E}$ -Feldes eine Unstetigkeit[1] $\frac{\gamma}{\epsilon_0}$ durch eine Grenzfläche hat, auf der eine Flächenladungsdichte γ liegt (vgl. (3.14)). Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes hatten wir dagegen gezeigt, dass aus $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$ folgt, dass die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ stetig ist.

Auf identische Weise folgt aus

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0; \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} \;=\; \rho_f \tag{12.1}$$

---

[1] wir bezeichnen nun die Flächenladungsdichte mit γ statt σ, um diese von der Leitfähigkeit zu unterscheiden.

dass die Normalkomponente B_n von $\boldsymbol{B}$ stetig durch die Grenzfläche hindurch ist:

$$\boxed{B_n^{(1)} = B_n^{(2)}}\ , \tag{12.2}$$

während die Normalkomponente von $\boldsymbol{D}$ eine Unstetigkeit γ_f hat[2]

$$\boxed{D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \gamma_f}\ , \tag{12.3}$$

mit γ_f der Flächeladungsdichte der freien Ladungsträger auf der Grenzfläche. Für Dielektrika mit $\gamma_f \ \ = 0$ ist die Normalkomponente von $\boldsymbol{D}$ stetig. Dagegen ist die Normalkomponente von $\boldsymbol{E}$ auf der Grenzfläche eines Dielektrikums unstetig, wie wir sehen werden. Natürlich springt D_n beim Übergang zwischen einem Metall und einem Isolator um γ_f.

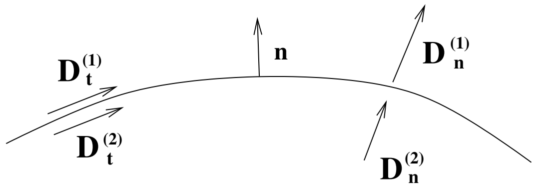
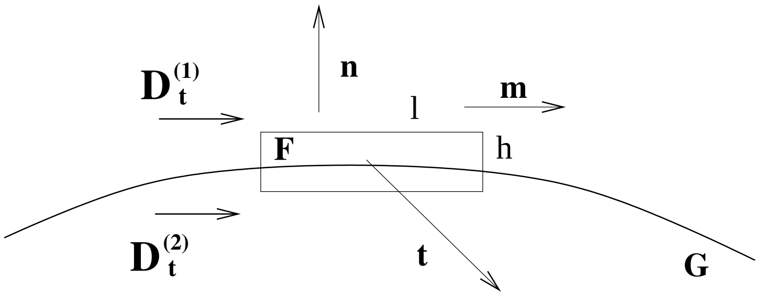


Abbildung 12.1:

2.) Tangentialkomponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$
Wir benutzen:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} \ = \ -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} \ = \ \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f\ , \tag{12.4}$$

und wenden den Integralsatz von Stokes auf eine rechteckige Fläche F (Skizze) an. Die



Fläche F habe Kanten der Länge l tangential zur Grenzfläche G und der Länge h senkrecht dazu. $\mathbf{n}$ sei die Normale zu G und $\mathbf{t}$ die Normale zu F (also $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$), dann ist die Kante l parallel zum Einheitsvektor $\mathbf{m}$, wobei

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}\ . \tag{12.5}$$

---

[2] **Zu Beachten:** Die Konvention für die Indizes (1) und (2) für $\boldsymbol{D}$ und für die unten besprochene Vektorfelder ist folgende: $\boldsymbol{D}^{(1)}$ ist das Feld auf der Außenseite und $\boldsymbol{D}^{(2)}$ das Feld auf der Innenseite der Grenzfläche (Fig. 12.1). Der Index „n“ steht für „Normalkomponente“, „t“ für „Tangentialkomponente“.

Der Satz von Stokes gibt für die erste von (12.4)

$$\int_F (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\mathbf{f} \;=\; \oint_{\partial F} \boldsymbol{E} \cdot d\mathbf{s} \;=\; -\int_F \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{f} \tag{12.6}$$

Wir nehmen l und h beliebig klein, so dass die Fläche F innerhalb von F nahezu glatt und die Felder konstant sind, allerdings sei $h \ll l$. In diesem Limes gibt (12.6)

$$l\ (\boldsymbol{E}_t^{(2)} - \boldsymbol{E}_t^{(1)}) \cdot \mathbf{m} = -h\ l\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ . \tag{12.7}$$

Für $h \to 0$ verschwindet der Teil mit $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$. Da $\mathbf{m}$ beliebig gewählt werden kann (auf der Oberfläche), folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\boldsymbol{E}$:

$$\boxed{\boldsymbol{E}_t^{(1)} \;=\; \boldsymbol{E}_t^{(2)}}\ , \tag{12.8}$$

Ganz analog ergibt die zweite Gleichung von (12.4) (wir lassen von vornerein den $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$-Teil weg):

$$l\ (\boldsymbol{H}_t^{(2)} - \boldsymbol{H}_t^{(1)}) \cdot \mathbf{m} = I_f \tag{12.9}$$

wo I_f die Stromstärke der durch F fließenden (freien) Ströme ist. Für endliche Stromdichten würde dieser Term im Limes $h \to 0$ verschwinden, aber nicht im Fall einer endlichen Flächenstromdichte (freier Ladungen) $\mathbf{i}_f$. Analog zur Flächenladungsdichte γ definiert man eine Flächenstromdichte $\mathbf{i}$ als

$$\mathbf{i} = \lim_{h \to 0}\ h\, \mathbf{j}\ . \tag{12.10}$$

Im Limes $h \to 0$ haben wir also

$$\frac{I_f}{l} = h\ \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{t} \to \mathbf{i}_f \cdot \mathbf{t}\ . \tag{12.11}$$

(12.9) mit (12.11) und (12.5) gibt also

$$-(\boldsymbol{H}_t^{(1)} - \boldsymbol{H}_t^{(2)}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \times (\boldsymbol{H}_t^{(1)} - \boldsymbol{H}_t^{(2)})) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_f \tag{12.12}$$

für beliebige Vektoren $\mathbf{t}$ (tangential zu G) gibt das

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\boldsymbol{H}_t^{(1)} - \boldsymbol{H}_t^{(2)}) = \mathbf{i}_f\ .} \tag{12.13}$$

Der Sprung in der Tangentialkomponente von $\boldsymbol{H}$ ist gleich der Flächenstromdichte in die Richtung senkrecht zu $\boldsymbol{H}$. Für ein normales Dielektrikum (also kein Leiter oder Supraleiter) verschwindet $\mathbf{i}_f$, so dass die Tangentialkomponente von $\boldsymbol{H}$ stetig ist.

Zusammenfassend erhalten wir also für ein *normales* Dielektrikum **(ohne Flächeladungs- und Flächenstromdichten)**, dass die folgenden Komponenten durch die Oberfläche zwischen zwei Dielektrika hindurch [3] stetig sind:

$$\boxed{B_n, \qquad D_n, \qquad \boldsymbol{E}_t, \qquad \boldsymbol{H}_t}\ . \tag{12.14}$$

---

[3] das Vakuum kann auch als Dielektrikum mit $\mu = \mu_0$ und $\epsilon = \epsilon_0$ betrachtet werden

12.2 Lineare, isotrope Medien

Falls

$$\boldsymbol{B} \;=\; \mu \boldsymbol{H}; \quad \boldsymbol{D} \;=\; \epsilon \boldsymbol{E} \tag{12.15}$$

gilt, findet man aus (12.2), (12.8), (12.3) und (12.13):

$$\boxed{\mu_1 H_n^{(1)} \;=\; \mu_2 H_n^{(2)}}\;; \qquad \boxed{\frac{\boldsymbol{D}_t^{(1)}}{\epsilon_1} \;=\; \frac{\boldsymbol{D}_t^{(2)}}{\epsilon_2}} \tag{12.16}$$

und

$$\boxed{\epsilon_1 E_n^{(1)} \;-\; \epsilon_2 E_n^{(2)} \;=\; \gamma_f}\;; \qquad \boxed{\mathbf{n} \times \left(\frac{\boldsymbol{B}_t^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\boldsymbol{B}_t^{(2)}}{\mu_2} \right) \;=\; \mathbf{i}_f}\;. \tag{12.17}$$

Beispiel: Dielektrikum im Plattenkondensator

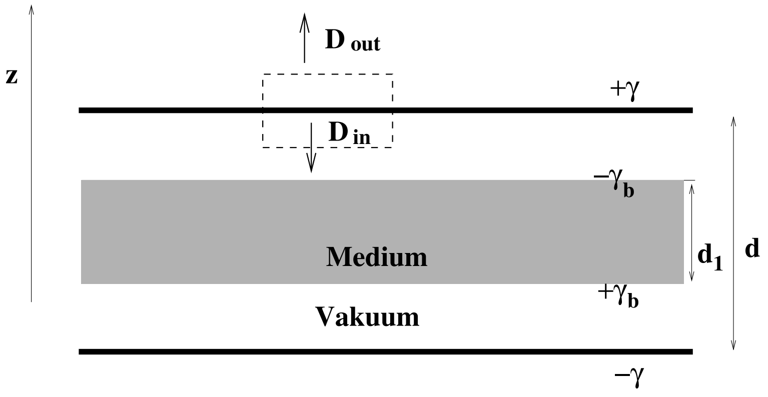


Abbildung 12.2: Plattenkondensator

Wir betrachten einen Plattenkondensator Fig. 12.2 bestehend aus zwei (im Prinzip unendlich ausgedehnten) Metallplatten mit den Flächenladungsdichten $+\gamma$ und $-\gamma$. In der Mitte zwischen den Platten befinde sich ein Dielektrikum (Konstanten ϵ, μ). Aus Symmetriegründen zeigt $\boldsymbol{D}$ (und daher $\boldsymbol{E}$) überall in z-Richtung und hängt nur von z ab. Damit $\boldsymbol{D}$ im Unendlichen verschwindet, muss $\boldsymbol{D}$ überall außerhalb der Platten verschwinden: $\boldsymbol{D}_{out} = 0$ (konsistent mit dem Gauß'schen Theorem, da die Gesamtladung im Kondensator 0 ist).

Innerhalb des Kondensator ergibt das Gauß'sche Theorem $\boldsymbol{D}_{in} = -\gamma \mathbf{e}_z$. Da D_n stetig ist, gilt das auch innerhalb des Dielektrikums. Also ist im Dielektrikum $\boldsymbol{E} = -\frac{\gamma}{\epsilon}\mathbf{e}_z$. Auf der Oberfläche des Dielektrikums hat daher $\boldsymbol{E}$ eine Unstetigkeit (von unten nach oben), die einer Flächendichte gebundener Ladungen γ_b entspricht:

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} + \frac{\gamma}{\epsilon} = -\frac{\gamma(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0 \epsilon} \equiv \frac{\gamma_b}{\epsilon_0} < 0\;. \tag{12.18}$$

Die Ladungsdichte γ_b schirmt die Ladung der Platten ab.
Die Spannung des Kondensators ist

$$V = (d - d_1)\frac{\gamma}{\epsilon_0} + d_1\frac{\gamma}{\epsilon}\ . \tag{12.19}$$

Die Kapazität eines Kondensators ist definiert als Q/V, also für unseren Kondensator mit Fläche F

$$C = \frac{\gamma F}{V}\ . \tag{12.20}$$

Die Kapazität eines Kondensators wird in Farad (F) gemessen $Farad = Coulomb/Volt$.
Das Verhältnis zwischen den Kapazitäten eines Kondensators, der mit Dielektrikum vollständig gefüllt ist ($d_1 = d$) und eines mit Vakuum ($d_1 = 0$) gibt die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums

$$\frac{C_{Diel}}{C_{Vak}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\ . \tag{12.21}$$

12.2.1 Elektrische Leitfähigkeit in Metallen

In *reellen* (also nicht-idealen) Metallen erzeugt ein **E**-Feld einen Strom innerhalb des Metalles. Die Größe und Richtung des Stromes hängt im Prinzip auf komplexe Weise von **E** ab, doch, wie im Fall von Dielektrika, gilt für nicht zu große **E** eine lineare Abhängigkeit (Ohm'sches Gesetz)

$$\mathbf{j}_f \ = \ \sigma\boldsymbol{E}\,, \tag{12.22}$$

wo die *Leitfähigkeit* σ oft als konstanter Skalar betrachtet werden kann, kann aber (wie bei ϵ) von der Frequenz abhängig sein und für anisotrope Metalle ein Tensor sein. Aus (12.22) und (12.8) folgt für die Tangentialkomponente von $\mathbf{j}_f$:

$$\boxed{\frac{\mathbf{j}_{ft}^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{ft}^{(2)}}{\sigma_2}}\ . \tag{12.23}$$

Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}_f + \frac{\partial\rho_f}{\partial t} \ = \ 0 \tag{12.24}$$

bei Anwendung des Gauß'schen Satzes (wie in (12.3))

$$\boxed{j_{fn}^{(1)} - j_{fn}^{(2)} \ = \ -\frac{\partial\gamma_f}{\partial t}}\ . \tag{12.25}$$

Speziell für stationäre Ströme folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\nabla\cdot\mathbf{j}_f \ = \ 0 \qquad \Rightarrow \qquad j_{fn}^{(1)} \ = \ j_{fn}^{(2)}\ . \tag{12.26}$$

Dann folgt aus (12.3), dass auf der Oberfläche zwischen zwei Metallen, durch die ein

Strom j_f fließt, sich eine Flächenladungsdichte

$$\gamma_f = j_{fn}\left(\frac{\epsilon^{(1)}}{\sigma^{(1)}} - \frac{\epsilon^{(2)}}{\sigma^{(2)}}\right) \tag{12.27}$$

bildet.

Übergang Leiter (1) - Nichtleiter (2)

Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, folgt aus (12.26)

$$j_{fn}^{(1)} \;=\; j_{fn}^{(2)} \;=\; 0 \;, \tag{12.28}$$

und damit über (12.22)

$$E_n^{(1)} \;=\; 0 \;, \tag{12.29}$$

da $\sigma_1 \neq 0$. Dagegen folgt für $E_n^{(2)}$ aus (12.17):

$$\epsilon_2 E_n^{(2)} \;=\; -\gamma_f \;. \tag{12.30}$$

Insbesondere *für die Elektrostatik* ist, wegen $\mathbf{j}_f = 0$, auch

$$\boldsymbol{E}_t^{(1)} \;=\; 0 \;; \tag{12.31}$$

dann fordert (12.8)

$$\boldsymbol{E}_t^{(2)} \;=\; 0, \tag{12.32}$$

also steht das $\boldsymbol{E}$-Feld senkrecht zur Leiteroberfläche; es ist null innerhalb des Leiters, wie wir bereits gesehen haben.

12.3 Reflexion und Brechung von Licht

Wie bereits erwähnt können die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (11.38),(11.39) in linearen, isotropen Medien auf die gleiche Weise wie im Vakuum behandelt werden. In Abwesenheit freier Ladungen ($\rho_f = 0 = \mathbf{j}_f$) lassen sich z.B. die Gleichungen (11.38) wie in Kap. 9 entkoppeln. Man erhält die Wellengleichungen

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} \;=\; 0; \qquad \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{H} - \frac{1}{c'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} \;=\; 0, \tag{12.33}$$

wobei c' die Phasengeschwindigkeit im Medium ist

$$\boxed{\frac{1}{c'^2} \;=\; \epsilon\mu} \tag{12.34}$$

Monochromatische, ebene Wellen

Da wir im Folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir spezielle Lösungen von (12.33) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\boldsymbol{E} \;=\; \boldsymbol{E}_0\;\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}\;, \tag{12.35}$$

wobei zwischen ω und $\mathbf{k}$ die Beziehung

$$\omega \;=\; c' k \;=\; \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{12.36}$$

gelten muss. Wie in Kap. 9 findet man, dass $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ und $\mathbf{k}$ senkrecht zueinander stehen.

Gleichung (12.36) unterscheidet sich von (9.11) dadurch, dass in der letzteren c eine Konstante ist, während c' im Allgemeinen von ω abhängt, da $\epsilon = \epsilon(\omega)$.
Die Komponenten verschiedener Frequenz ω in einer monochromatischen ebenen Welle laufen mit verschiedener Geschwindigkeit $c' = c'(\omega)$: das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei (**Zerfließen oder Dispersion** von Wellenpaketen; vgl. hierzu Abschnitt 10.3).

Phasen- vs. Gruppengeschwindigkeit

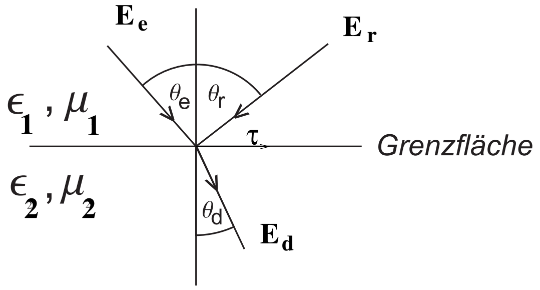
Je nach Verlauf von $\epsilon(\omega)$ kann $c' > c$ werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die *Phasengeschwindigkeit* $v_{ph} = c'$ nicht identisch ist mit der *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_g \;=\; \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} \tag{12.37}$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl k_0 konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch v_g und nicht durch v_{ph} bestimmt.

Koplanarität

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (12.35), an einer ebenen Grenzfläche (Skizze): Aus (12.8) folgt



$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_r) \;=\; \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{E}_d \tag{12.38}$$

für alle Zeiten t und alle Vektoren $\mathbf{r}$ der Grenzfläche; $\boldsymbol{\tau}$ sei ein Einheitsvektor parallel zur Grenzfläche, $\boldsymbol{E}_e, \boldsymbol{E}_r$ und $\boldsymbol{E}_d$ bezeichnen die elektrische Feldstärke der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Lichtwelle. Legt man den Koordinatenursprung in die Grenzfläche, so folgt aus (12.38) und (12.35) für $\mathbf{r} = 0$ die Erhaltung der Frequenz,

$$\omega_e \;=\; \omega_r \;=\; \omega_d. \tag{12.39}$$

Für t=0 ergibt sich ((12.38) soll für alle $\mathbf{r}$ in der Grenzfläche gelten) aus der Phasengleichheit

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} \;=\; \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} \;=\; \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} \tag{12.40}$$

für ein *beliebiges* $\mathbf{r}$ auf der Grenzfläche, es folgt also $\mathbf{k}_{et} = \mathbf{k}_{rt} = \mathbf{k}_{dt}$ *(Koplanarität)* [Das kann man so sehen: Wählt man speziell $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ so, dass $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = 0$, so müssen gemäß (12.40) die 3 Vektoren $\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$ senkrecht zu $\mathbf{r}_0$ sein, was nur möglich ist, wenn $\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$ in einer Ebene liegen].

Reflexionsgesetz
Aus (12.40) folgt

$$k_e \sin\theta_e \;=\; k_r \sin\theta_r \;, \tag{12.41}$$

mit (12.39), $k_e = k_r$, das *Reflexionsgesetz*:

$$\theta_e \;=\; \theta_r \;. \tag{12.42}$$

Brechungsgesetz
Aus (12.39) ergibt sich $k_e\ c_e = \omega = k_d\ c_d$, also

$$\frac{k_e}{k_d} \;=\; \frac{c_d}{c_e} = \frac{\sqrt{\epsilon_e \mu_e}}{\sqrt{\epsilon_d \mu_d}} \;=\; \frac{n_e}{n_d}, \tag{12.43}$$

so dass mit (12.40), also $k_e \sin\theta_e = k_d \sin\theta_d$, das *Brechungsgesetz*

$$n_e\ \sin\theta_e = n_d\ \sin\theta_d \tag{12.44}$$

folgt. Hier ist

$$n_a = \frac{c}{c_a} = \frac{\sqrt{\epsilon_a\ \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_0\ \mu_0}} \tag{12.45}$$

der Brechungsindex eines Mediums mit konstanten ϵ_a, μ_a.
Wertet man die in (12.38) noch enthaltenen Bedingungen für die Amplituden aus, so erhält man die **Fresnel'schen Formeln**, das **Brewster'sche Gesetz** (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und die **Totalreflexion** (Faser-Optik) (ÜB).

Bemerkung
Wir werden sehen, dass $\epsilon(\omega)$ im Allgemeinen komplex sein kann, also auch k ist komplex. Das bedeutet, dass eine elektromagnetische Welle im Medium geschwächt wird (Absorption).

12.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden Materialien

Wir betrachten einen Ohm'schen Leiter mit ebener Grenzfläche und Leitfähigkeit σ in dem kein Ladungsstau auftritt ($\rho_f = 0$). Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (11.38) und (11.39): lauten nach einsetzen von (12.22)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0; \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \;=\; 0 \qquad (12.46) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0; \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} - \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \sigma \boldsymbol{E} \;=\; 0; \end{aligned}$$

$$\mathbf{j}_f \;=\; \sigma \boldsymbol{E} \;\neq\; 0\;. \tag{12.47}$$

Als Lösung von (12.46) setzen wir an

$$\boldsymbol{E} \;=\; \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}\;, \tag{12.48}$$

mit $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ (folgt aus $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$). Mit einem analogen Ansatz für $\boldsymbol{H}$ finden wir aus (12.46):

$$\boldsymbol{H} \;=\; \frac{1}{\mu\omega}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{E}); \qquad i(\mathbf{k}\times\boldsymbol{H}) + i\epsilon\omega\,\boldsymbol{E} - \sigma\boldsymbol{E} \;=\; 0\;. \tag{12.49}$$

Benützt man $\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{E}) = \mathbf{k}\,(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\,\mathbf{k}^2 = -\boldsymbol{E}\,\mathbf{k}^2$ und eliminiert man im letzten Ausdruck von (12.49) $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{H}$, so erhält man:

$$\frac{-ik^2}{\mu\omega} + i\epsilon\omega - \sigma \;=\; 0, \qquad\qquad \Rightarrow \qquad k^2 \;=\; \omega^2\mu\epsilon\,(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon})\;. \tag{12.50}$$

Komplexe Wellenzahlen

Aus (12.50) sieht man, dass in einem Leiter, k komplex sein kann. Wir berechnen nun den Real- und Imaginärteil von k. Dafür setzen wir

$$k \;=\; \alpha + i\beta; \qquad k^2 \;=\; \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \tag{12.51}$$

(α, β reel), so folgt (für ϵ und σ reell):

$$\alpha^2 - \beta^2 \;=\; \mu\epsilon\omega^2; \qquad 2\alpha\beta \;=\; \mu\omega\sigma\;. \tag{12.52}$$

Eliminiert man in der ersten Gleichung α mit Hilfe der zweiten Gleichung, so entsteht:

$$\beta^4 - \frac{1}{4}(\mu\omega\sigma)^2 + \beta^2\mu\epsilon\omega^2 \;=\; 0\;. \tag{12.53}$$

Da β reell sein soll, kommt als Lösung nur

$$\beta^2 \;=\; \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2}\left(\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2} - 1\right) \tag{12.54}$$

in Frage. Analog:

$$\alpha^2 \;=\; \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1\right)\;. \tag{12.55}$$

Für $\sigma \to 0$ folgt:

$$\beta \to 0; \qquad \alpha^2 \to \mu\epsilon\omega^2 \tag{12.56}$$

in Einklang mit (12.36). Da $\mu\omega\sigma \geq 0$, müssen α und β nach (12.52) gleiches Vorzeichen haben.

Für $\beta \neq 0$ (d.h. $\sigma \neq 0$) wird eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft; für eine in positiver x-Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$\exp\{i(kx - \omega t)\} \;=\; \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}\;\exp\{-\beta x\}, \tag{12.57}$$

wobei mit $\alpha > 0$ auch $\beta > 0$ sein muss.

Grenzfälle

1.) Bei hoher Leitfähigkeit ($\sigma \to \infty$) wird die Lichtwelle praktisch total reflektiert, da die Eindringtiefe $d \sim \beta^{-1} \sim \sigma^{-1/2}$ verschwindet.

2.) Für hohe Frequenzen ($\omega \to \infty$) ist zu beachten, dass σ gemäß (14.31) frequenzabhängig ist: σ wird für $\omega \to \infty$ rein imaginär, also k^2 in (12.50) reell; das Material wird *durchsichtig*. Diesen Effekt kann man mit **harter** Röntgenstrahlung nachweisen.

Skin-Effekt
Als Folge der Dämpfung β können wegen (12.47) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch β^{-1} bestimmt ist (*Skin-Effekt*).

12.5 Wellen in einem metallischen Hohlleiter

Wir betrachten die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Gebiet, das von metallischen Randflächen begrenzt ist. Zur Vereinfachung betrachten wir einen idealen Leiter ($\sigma \to \infty$) als Grenzfläche.

Die Randbedingungen für die Komponenten von **E** und **B** an den Grenzflächen eines idealen Metalles folgen aus der Tatsache, dass im Metall kein elektrisches Feld existieren kann.

- Demzufolge muß die Tangentialkomponente von **E** verschwinden.
- Die Normalkomponente von **B** muss zunächst nur stetig sein. Da es aber im Metall kein elektrisches Feld gibt, kann dort das Magnetfeld allenfalls statisch sein, und das ist bei einer sich ausbreitenden Welle nicht möglich. Also verschwindet auch die Normalkomponente von **B**.

Als Beispiel betrachten wir ein unendlich langes Rohr mit rechteckigem Querschnitt (Kanten a und b). Das Rohr bestehe aus ideal leitendem Material ($\sigma \to \infty$). Die Lösung der Feldgleichungen ist von der Form einer propagierenden Welle, also pro Komponente wie

$$g(\mathbf{r}, t) \;=\; f(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \;,$$

wobei f eine noch zu bestimmende Funktion ist und $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Aus den obigen Überlegungen

$$\mathbf{E}_t = 0 \qquad\qquad B_n = 0 \tag{12.58}$$

erhalten wir die Randbedingungen

$$E_y \;=\; E_z \;=\; B_x \;=\; 0 \qquad \text{für} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x & = & a \end{array} \right. \tag{12.59}$$

$$E_x \;=\; E_z \;=\; B_y \;=\; 0 \qquad \text{für} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ y & = & b \end{array} \right. \tag{12.60}$$

Die richtige Lösung der Feldgleichungen muss natürlich auch die *Wellengleichung* erfüllen, und zwar für jede einzelne Komponente $g(\mathbf{r}, t)$ von **E** und **B**:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \; g(\mathbf{r}, t) \;=\; 0 \tag{12.61}$$

Mit der Methode der Separation der Variablen, kann man einen Ansatz für die Funktionen f in (12.58) der Form

$$f(x,y) = c\ a(x)\ b(y)\ , \tag{12.62}$$

wo $a(x)$ ($b(y)$) eine geeignete Linearkombination von $\exp(\pm i k_x x)$ ($\exp(\pm i k_y y)$) ist (im Grunde sin oder cos), welche die Randbedingungen erfüllt. Dann lautet die Bedingung (12.61)

$$k_x^2 + k_y^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\ . \tag{12.63}$$

Für die z-Komponente von $\mathbf{E}$ haben wir wegen (12.59)

$$E_z = \gamma\ \sin(k_x\ x)\ \sin(k_y\ y) \tag{12.64}$$

so dass die „erlaubten“ Werte von k_x, k_y diskret sind:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \qquad k_y = \frac{m\pi}{b} \qquad\qquad m,n \in N_0\ . \tag{12.65}$$

Aus $\boldsymbol{\nabla} \times B = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ erhält man

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = -i\mu\ \epsilon\ \omega E_y\ , \tag{12.66}$$

was für $x = 0$ und $x = a$ gibt

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \qquad \text{für} \qquad x = 0, x = a \tag{12.67}$$

und analog

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \qquad \text{für} \qquad y = 0, y = b\ , \tag{12.68}$$

was die Lösung

$$B_z = \gamma'\ \cos(\frac{n\pi\ x}{a})\ \cos(\frac{m\pi\ y}{a}) \tag{12.69}$$

gibt.

Für die weiteren Komponenten bekommt man ähnliche Bedingungen. Zusammenfassend kann man den Ansatz für diese Komponenten wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\ \cos(\frac{n\pi x}{a})\ \sin(\frac{m\pi y}{b}) \\ \beta\ \sin(\frac{n\pi x}{a})\ \cos(\frac{m\pi y}{b}) \\ \gamma\ \sin(\frac{n\pi x}{a})\ \sin(\frac{m\pi y}{b}) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \tag{12.70}$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\ \sin(\frac{n\pi x}{a})\ \cos(\frac{m\pi y}{b}) \\ \beta'\ \cos(\frac{n\pi x}{a})\ \sin(\frac{m\pi y}{b}) \\ \gamma'\ \cos(\frac{n\pi x}{a})\ \cos(\frac{m\pi y}{b}) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \tag{12.71}$$

$$m,n \in N_0;.$$

Minimale Frequenz

Durch Einsetzen von (12.63) und (12.65) erhält man die Bedingung

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2\ =\ \frac{\omega^2}{c^2}\ .$$

Man kann aus (12.71) (12.70) sehen, dass in einer Lösung mit $n = m = 0$ nur B_z nicht verschwindet. Diese Lösung ist aber nicht erlaubt wegen $\boldsymbol{\nabla} \cdot B = 0$.

Die minimale Lösung hat also n oder $m = 1$. Aus diesen Überlegungen kann man sofort eine "Ausbreitungsbedingung" für Wellen im Hohlleiter herleiten: k ist nur dann reell, wenn

$$\omega > \omega_{nm}, \qquad \text{mit} \qquad \omega_{nm} = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

gilt. Man sieht, dass sich die Dispersionsbeziehung im Hohlleiter von jener im freien Vakuum unterscheidet, so lange a und b endlich sind. Das war zu erwarten. Unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz ω_{10} (für $a > b$) ist überhaupt keine Wellenausbreitung möglich! Diese Frequenz geht mit wachsendem a gegen 0. Ein Hohlleiter fungiert also als Niedrigfrequenzfilter.

Ausbreitungs-Moden

Wir werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften der erlaubten Lösungen studieren.

(Keine) TEM-Moden

TEM-Moden steht für transversal-elektrische und magnetische Moden. Wie bereits gesehen sind diese die einzige Art von Wellen, die sich im Vakuum ausbreiten können. In einem Hohlleiter sind diese Moden dagegen nicht ausbreitungsfähig.

Das kann man durch Anwendung der Maxwell-Gleichungen für den Fall $B_z = E_z = 0$ beweisen:

$$\begin{aligned} 0 &= (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x \qquad (12.72) \\ 0 &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y = 0\ . \end{aligned}$$

Das gibt

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)E_x = (\partial_x^2 + \partial_y^2)E_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n = m = 0\ . \qquad (12.73)$$

Was, wie gesagt, nicht ausbreitungsfähig ist.

Die Tatsache, dass keine Ausbreitung von TEM-Moden möglich ist, ist eine allgemeine Eigenschaft von Hohlleitern die eine zusammenhängende Topologie haben, also nicht nur von rechteckigen. Der TEM-Typ tritt aber bei nichtzusammenhängende Topologien, wie z.B. beim Koaxialkabel auf.

Spezialfälle

1.) **(TM-Welle)**
Mit $B_z = 0$, d.h. man hat ein rein *transversales* **B**-Feld. Man nennt die zugehörige Welle *TM-Welle* (transversal-magnetisch). Nichttriviale Lösungen für die Felder ergeben sich hier nur, falls $n > 0$ *und* $m > 0$, was man durch Einsetzen der Gleichungen (12.70) in die Ansätze erkennt. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz für eine TM-Welle im Hohlleiter ist demnach durch

$$\omega_{TM} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

gegeben.

2.) (**TE-Welle**)
Mit $E_z = 0$, und nun ist das $\mathbf{E}$-Feld transversal. Man spricht von einer *TE-Welle* (transversal-elektrisch). In diesem Fall hat man schon nichttriviale Lösungen, falls einer der beiden Indizes n und m von Null verschieden ist. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz ist

$$\omega_{TE} \; = \; \frac{c \; \pi}{a} \; ,$$

falls $a > b$.

Nomenklatur
Für die Bezeichnung verschiedener Moden in Hohlleitern, die durch die Werte von n und m gekennzeichnet sind, gibt es ein Nomenklatursystem. Man stellt der Grundeigenschaft der Welle (TM bzw TE) die Indizes n und m zur Seite: TM_{nm} bzw. TE_{nm}. Die niederfrequenteste ausbreitungsfähige Welle ist demnach TE_{10}. Diese Welle wird in der Technik am häufigsten angewandt.

Lösungen
Die Konstanten $\alpha^{(\prime)}$, $\beta^{(\prime)}$ und $\gamma^{(\prime)}$ in (12.70),(12.71) werden durch einsetzen in die Maxwell-Gleichungen bestimmt. Man kann zeigen, dass die Werte dieser Parameter von zwei freien Parametern δ und δ' abhangen. Die Lösungen sind:

$$\begin{array}{rclrcl}
\alpha & = & \frac{n\pi}{a}k\delta + \frac{m\pi}{b}\frac{\omega}{c}\gamma' & \qquad \alpha' & = & \frac{n\pi}{a}k\delta' - \frac{m\pi}{b}\frac{\omega}{c}\delta \\
\beta & = & \frac{m\pi}{b}k\delta - \frac{n\pi}{a}\frac{\omega}{c}\gamma' & \qquad \beta' & = & \frac{m\pi}{b}k\delta' + \frac{n\pi}{a}\frac{\omega}{c}\delta \\
\gamma & = & -i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\delta & \qquad \gamma' & = & i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\delta'
\end{array} \tag{12.74}$$

Kapitel 13

Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes

Zur Vereinfachung werden wir von nun an die kalligraphische Notation für makroskopische (gemittelte) Felder nicht mehr benutzen und die gleichen Symbole für makroskopische und mikroskopische Felder benutzen, solange kein Missverständnis besteht. Wir haben also $\boldsymbol{E} \to \mathrm{E}$, $\boldsymbol{D} \to \mathrm{D}$, $\boldsymbol{B} \to \mathrm{B}$, $\boldsymbol{H} \to \mathrm{H}$, $\cdots$.

In Kap. 8 haben wir Energie, Impuls und Drehimpuls des mikroskopischen Feldes eingeführt und dieses Konzept in Teil IV auf das Strahlungsfeld im Vakuum angewendet. Wir wollen im Folgenden die Betrachtungen von Kap. 8 auf das makroskopische Feld übertragen.

13.1 Energie

Ausgangspunkt für die Energiebilanz in Kap. 8 war die von einem (mikroskopischen) Feld $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ an einem System geladener Massenpunkte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\; \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV \;. \tag{13.1}$$

Grundlage von (13.1) ist die Lorentz-Kraft, z.B. für eine Punktladung q:

$$\mathbf{K} \;=\; q\Big(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\Big) \;, \tag{13.2}$$

deren magnetischer Anteil zu (13.1) keinen Beitrag liefert. Mit (11.1) ist es klar, dass die selbe Gleichungen für die gemittelte Kraft $< \mathbf{K} >$ als Funktion der makroskopischen Felder gelten.

Arbeit der freien Ladungen

Die an den freien Ladungen der Dichte ρ_f vom makroskopischen Feld pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist dann (13.1):

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\; \int \mathbf{j}_f \cdot \boldsymbol{E}\; dV. \tag{13.3}$$

Die rechte Seite von (13.3) können wir mit (11.39) zu

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\; \int \left(\boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \;-\; \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right)\; dV \tag{13.4}$$

umformen. Wie in Kap. 8 können wir (13.4) symmetrisieren, mit Hilfe der Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \;=\; \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{13.5}$$

und (11.38),

$$\nabla \times \boldsymbol{E} \;=\; -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{13.6}$$

Man erhält:

$$\frac{dW_M}{dt} \;=\; -\int dV\; \left\{ \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \;+\; \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \;+\; \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right\}\;. \tag{13.7}$$

Der Vergleich mit (8.6) zeigt, dass

$$\boxed{\boldsymbol{S} \;=\; \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}} \tag{13.8}$$

als Energiestromdichte des makroskopischen Feldes (Poynting-Vektor) zu deuten ist (vgl. (8.9)).

Lineare, isotrope Medien

Zur Interpretation der restlichen Terme betrachten wir die Näherung linearer Medien:

$$\boldsymbol{D} \;=\; \epsilon \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{B} \;=\; \mu \boldsymbol{H}. \tag{13.9}$$

Dann wird

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \;+\; \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \;+\; \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \Big) \tag{13.10}$$

und wir können analog (8.10) die Größe

$$\boxed{\omega_F = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \Big)} \tag{13.11}$$

als Energiedichte des makroskopischen Feldes interpretieren. Der Erhaltungssatz (8.13) bleibt mit den neuen Definitionen (13.8),(13.11) unverändert:

$$\frac{dW_M}{dt} \;+ \frac{d}{dt}\int_V \;\omega_F\; dV + \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = 0\;. \tag{13.12}$$

13.2 Impuls, Drehimpuls

Nach (13.2) ist

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \;=\; q\Big(\boldsymbol{E} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{B})\Big) \tag{13.13}$$

die Änderung des Impulses der Probeladung q im Feld $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$. Für die Impulsänderung eines Systems freier Ladungen, beschrieben durch $\rho_f, \mathbf{j}_f$ im Feld $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ folgt:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \;=\; \int dV\,\Big(\rho_f\boldsymbol{E} + (\mathbf{j}_f\times\boldsymbol{B})\Big)\;. \tag{13.14}$$

Analog zu Abschnitt 8.2 formen wir (13.14) mit

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} \;=\; \rho_f; \quad \nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \;=\; \mathbf{j}_f \tag{13.15}$$

um zu

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \;=\; \int dV\,\Big\{\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{D}) + (\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}\Big\}\;. \tag{13.16}$$

Wir symmetrisieren (13.16) mit Hilfe von

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} \;=\; 0; \quad \nabla\times\boldsymbol{E} \;=\; -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{13.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} \;&=\; \int dV\,\Big\{\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{H}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + \\ &(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B} + (\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\Big\}\;.\end{aligned} \tag{13.18}$$

Wie in Kap. 8 lässt sich dann

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_F = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}} \tag{13.19}$$

als Impulsdichte des makroskopischen elektromagnetischen Feldes interpretieren (vgl. (8.39). Da in dem restlichen Teil von (13.18) verglichen mit (8.23) jeweils die Paare $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ (statt $\mathbf{E}$ $\mathbf{E}$) und $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ (statt $\mathbf{B}$ $\mathbf{B}$) erscheinen, erhält man aus dem Vergleich mit (8.26) (im Fall linearer Medien) für den Maxwell Spannungstensor[1]

$$\boxed{T_{im} \;=\; \left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}\,\delta_{im} - E_iD_m\right) + \left(\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\,\delta_{im} - H_iB_m\right)\;.} \tag{13.20}$$

Der Erhaltungssatz (8.30) bleibt mit den neuen Definitionen (13.19),(13.20) unverändert:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M + \int_V \boldsymbol{\pi}_F\;dV)_i \;+ \oint_F \sum_{m=1}^{3} T_{im}\,df_m = 0}\;, \tag{13.21}$$

Analog erhält man für die Drehimpulsdichte (vgl. (8.40))

$$\lambda_F \;=\; \mathbf{r}\times\boldsymbol{\pi}_F\;. \tag{13.22}$$

---

[1] Anmerkung: wegen (11.42) und (11.45) bleibt T_{im} ein symmetrischer Tensor für den Fall linearer, isotroper Medien.

Kapitel 14

Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie

In den vorherigen Kapiteln haben wir die Materialgleichungen (11.38),(11.39) mit der Annahme einer Linearabhängigkeit, (11.42),(11.45), vereinfacht.

In diesem Kapitel wollen wir diese Beziehungen und ihre Grenzen diskutieren, sowie Schätzungen über ihre Größen anhand einfacher Modelle machen.

14.1 Materialgleichungen

In der Regel, würde man erwarten, dass die Felder $\boldsymbol{P}$ und $\mathbf{M}$ Funktionale von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ sind. Sie können auch von *äußeren* Parametern wie z.B. der Temperatur T abhängen:

$$\boldsymbol{P} \;=\; \boldsymbol{P}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, T]; \tag{14.1}$$

entsprechend für $\mathbf{M}$.

Zur Vereinfachung betrachten wir $\boldsymbol{P}$ als Funktional nur von $\boldsymbol{E}$ und T. Bisher haben wir (14.1) durch die lineare, skalare Form (11.41) vereinfacht. Wir wollen nun die Abweichungen von dieser Form diskutieren. Wir führen hier die Diskussion für $\boldsymbol{P}$ versus $\boldsymbol{E}$ durch. Die gleichen Argumente gelten auch für $\mathbf{M}$ versus $\boldsymbol{B}$ oder $\boldsymbol{H}$.

1.) Nicht-lokale Effekte

Auch wenn die Polarisation $\boldsymbol{P}$ linear in $\boldsymbol{E}$ ist kann diese eine nicht-lokale Abhängigkeit in Raum und Zeit haben:

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{x}, t) \;=\; \int d^3\mathbf{y}\; d\tau\;\; \epsilon_0\; \chi_e(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-\tau)\, \boldsymbol{E}(\mathbf{y}, \tau)\;. \tag{14.2}$$

Dadurch dass χ_e nur von der Differenz $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ abhängt, haben wir Translationsinvarianz angenommen, was nach Mittelung über mikroskopische Größen eine vernünftige Annahme ist. Die Faltung in (14.2) hat eine einfachere Form im Fourier-Raum

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{k}, \omega) \;=\; \epsilon_0\; \chi_e(\mathbf{k}, \omega)\, \boldsymbol{E}(\mathbf{k}, \omega)\;. \tag{14.3}$$

Die Nichtlokalität erzeugt also eine Abhängigkeit von χ_e und ϵ von der Frequenz und vom Wellenvektor.

2.) Anisotropieeffekte

In anisotropen Medien sind im Allgemeinen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{E}$ nicht parallel zueinander. χ_e und daher ϵ sind also Tensoren 2. Stufe:

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{e\ i,j} E_j \qquad D_i = \epsilon_{i,j} E_j \tag{14.4}$$

3.) Nicht-lineare Effekte

Der funktionale Zusammenhang (14.2) war zwar nicht-lokal aber linear. Ein allgemeiner lokaler, aber nicht-linearer Zusammenhang lässt sich als

$$P_i \;=\; \epsilon_0 \chi_{e\ ij}\, E_j \;+\; \chi_{ijk}\, E_j\, E_k \;+\; \chi_{ijkl}\, E_j\, E_k\, E_l \;+\; \ldots$$

schreiben. Dabei sind χ_{ijk} bzw. χ_{ijkl} die nicht-linearen Suszeptibilitätstensoren 3.ter und 4.ter Stufe. Sie beschreiben verschiedene optische Effekte wie die SHG (Frequenzverdoppelung): Erzeugung von Licht mit der Frequenz 2ω mit einem Laserstrahl der Frequenz ω, etc.

4.) **Temperaturabhängigkeit**

χ_e und ϵ werden i.a. eine Temperaturabhängigkeit haben.

14.2 Dielektrika

Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$ stellt sich in einem nichtleitenden, polarisierbaren Medium (einem *Dielektrium*) eine Polarisation $\boldsymbol{P}$ ein. In Fig. 11.2 haben wir 2 Typen unterschieden.

1.) Induzierte Polarisation

Durch das $\boldsymbol{E}$-Feld können Elektronen und Kerne in Atomen oder Molekülen relativ zueinander verschoben und Dipole in Feldrichtung erzeugt (**induziert**) werden. Auf diese Weise entsteht eine beinahe temperaturunabhängige Polarisation.

2.) Orientierungspolarisation

Schon vorhandene (*permanente*) elektrische Dipole werden im $\boldsymbol{E}$-Feld ausgerichtet. Dem ordnenden Einfluss des Feldes wirkt die thermische Bewegung entgegen und die resultierende makroskopische Polarisation ist stark temperaturabhängig. Für $\boldsymbol{E} = 0$ sind die Richtungen der elementaren Dipole statistisch verteilt und es ist $\boldsymbol{P} = 0$.

14.2.1 Dielektrische Funktion im Fall induzierter Polarisation: Beispiel

Wir haben in (14.3) gesehen, dass ϵ (bzw. χ_e) im Allgemeinen frequenzabhängig sind. Dies zeigt sich bei schnell oszillierenden Feldern, wobei „schnell“ bedeutet Frequenzen der

Größenordnung der typischen Molekularfrequenzen. Um die Frequenzabhängigkeit von $\epsilon(\omega)$ zu verstehen, wollen wir ein vereinfachtes Modell für die Polarisation (gültig für den Fall induzierter Polarisation: Punkt 2 oben) betrachten: [1] Wir nehmen an, dass die Elektronen in einem Atom oder Molekül gedämpfte harmonische Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω_n ausführen. Dann lautet die Bewegungsgleichung für ein Elektron eines Atoms (oder Moleküls) unter dem Einfluss eines periodischen $\boldsymbol{E}$-Feldes (die komplexe Notation hat die selbe Bedeutung wie im Absch. 9):

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_n + \Gamma_n \frac{d}{dt}\mathbf{r}_n + \omega_n^2 \mathbf{r}_n \;=\; \frac{e}{M_e}\boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t)\;, \tag{14.5}$$

wo $\mathbf{r}_n$ die Auslenkung bzgl. der Gleichgewichtslage des Elektrons ist. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{r}_n \;=\; \mathbf{r}_n^0 \exp(-i\omega t) \tag{14.6}$$

findet man als Lösung von (14.5)

$$\mathbf{r}_n \;=\; \frac{e}{M_e(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_n)}\;\boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t)\;. \tag{14.7}$$

Hat man n_n Elektronen mit Eigenfrequenz ω_n pro Volumeneinheit, dann gilt für die Dipoldichte

$$\boldsymbol{P} \;=\; \sum_n e\, n_n\, \mathbf{r}_n \;=\; \frac{e^2}{M_e}\boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t) \sum_n \frac{n_n}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_n)}\;. \tag{14.8}$$

Es folgt für die dielektrische Funktion:

$$\epsilon - \epsilon_0 = \epsilon_0\;\chi_e \;=\; \frac{e^2}{M_e}\sum_n \frac{n_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_n}\;. \tag{14.9}$$

Der Dämpfungsterm in (14.5) trägt pauschal der Tatsache Rechnung, dass die atomaren Oszillatoren durch Stöße zwischen den Atomen oder Molekülen Energie verlieren. Dies hat zur Folge, dass χ_e bzw. ϵ komplex werden.

Aus (14.9) ist es ersichtlich, dass die Näherung einer frequenzunabhängigen χ_e bzw. ϵ nur bis zu Frequenzen ω der Größenordnung der kleinsten Schwingungsfrequenz ω_n gültig ist.

Für hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_{n,max}$ haben wir aus (14.9)

$$\epsilon \approx \epsilon_0 (1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}) \tag{14.10}$$

mit der *Plasma Frequenz*

$$\omega_P^2 = \frac{N\;e^2}{\epsilon_0 M_e} \qquad N = \sum_n n_n \tag{14.11}$$

---

[1] Die Abhängigkeit vom Wellenvektor, die erst bei räumlichen Fluktuationsskalen der Ordnung der intermolekulare Abstände vorkommt, wird hier nicht diskutiert.

14.2.2 Orientierungspolarisation: Temperaturabhängigkeit der Polarisation

Wir setzen homogene und isotrope Medien voraus; dann gilt für den Anteil der Polarisation, der von der Ausrichtung permanenter Dipole $\mathbf{p}$ im $\boldsymbol{E}$-Feld herrührt:

$$\mathbf{P} \ = \ N < \mathbf{p} >_T \ , \tag{14.12}$$

wobei N die Zahl der Atome pro Volumeneinheit ist und $< \mathbf{p} >_T$ sich durch Mittelung der Dipole mit Betrag p bzgl. ihrer Richtung zum $\boldsymbol{E}$-Feld bei gegebener Temperatur T ergibt, Diese kann man mit Hilfe der Energie eines Dipols in einem $\mathbf{E}$-Feld

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{14.13}$$

((2.41)) bestimmen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit bei gegebener Temperatur T, dass sich ein elementares Dipol mit einem Winkel θ zum $\mathbf{E}$-Feld orientiert, propotional zum Boltzmannfaktor

$$\exp(\frac{-U(\theta)}{kT}) = \exp(\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{E}}{kT}) = \exp(\xi \cos\theta) \ , \tag{14.14}$$

mit

$$\xi \ = \ \frac{p\,E}{kT} \ . \tag{14.15}$$

Dann ist die Mittelung $< \mathbf{p} >_T$ entlang der $\mathbf{E}$-Richtung ($\mathbf{n}_E$) gegeben durch

$$\mathbf{n}_E \cdot < \mathbf{p} >_T = p < \cos\theta >_T \ = \ p \ \frac{\int d(\cos\theta) \cos\theta \exp(\xi\cos\theta)}{\int d(\cos\theta) \exp(\xi\cos\theta)} \tag{14.16}$$

Der Nenner in (14.16) sorgt für die richtige Normierung.

Die Auswertung der Integrale in (14.16) ergibt:

$$P \ = \ Np \left\{ \frac{1}{\tanh\xi} \ - \ \frac{1}{\xi} \right\} \ . \tag{14.17}$$

Diskussion:

Fall 1: starke Felder, tiefe Temperaturen:

$$\xi \ = \ \frac{p\,E}{kT} \gg 1 \ , \tag{14.18}$$

so dass - wie zu erwarten - mit

$$P \ = \ Np \tag{14.19}$$

der **Sättigungswert** erreicht wird. In dem Fall, gilt der lineare Ansatz (11.41) nicht mehr.

Fall 2: schwache Felder, hohe Temperaturen:

$$\xi \ = \ \frac{p\,E}{kT} \ll 1 \ , \tag{14.20}$$

so dass mit

$$\coth\xi \;=\; \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3} + \cdots \tag{14.21}$$

folgt:

$$P \;=\; \frac{Np^2}{3kT}E\ , \tag{14.22}$$

der oben diskutierte **lineare Bereich**.

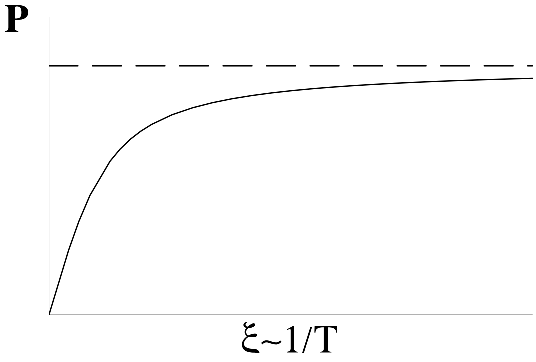


Abbildung 14.1:

Bemerkung:
Das obige Verfahren wird unten auf die Behandlung des Paramagnetismus übertragen werden, indem man die Energie des Dipols $\mathbf{p}$ im $\boldsymbol{E}$-Feld: $-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{E}$, durch $-\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{B}$ ersetzt, wobei $\mathbf{m}$ das (permanente) magnetische Dipolmoment ist.

14.3 Elektrische Leitfähigkeit und Zusammenhang mit der dielektrischen Funktion

Die Beziehung zwischen Strom und $\boldsymbol{E}$ Feld ist durch das Ohm'sche Gesetz (12.22) gegeben, wobei im Allgemeinen σ von der Frequenz abhängig ist. Wir wollen nun zeigen, dass zwischen $\sigma(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$ eine einfache Beziehung besteht. Diese Beziehung kann man verstehen, wenn man formell auch die Stromdichten der beweglichen Elektronen in einem Metall als gebundene Ströme betrachtet.[2] Dann folgt aus der Beziehung zwischen $\mathbf{j}$ und $\boldsymbol{P}$ in (11.25) in Frequenzraum

$$\mathbf{j}_P = -i\ \omega\ \boldsymbol{P}\ , \tag{14.23}$$

sowie aus $\mathbf{j}_P = \sigma\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\boldsymbol{E}$ die entsprechende Beziehung zwischen σ und ϵ:

$$\sigma(\omega) = -i\ \omega\ (\epsilon - \epsilon_0)\ . \tag{14.24}$$

oder

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{i\ \sigma}{\omega}\ . \tag{14.25}$$

---

[2] Diese Annahme ist vernünftig, da diese Ströme vom $\boldsymbol{E}$-Feld erzeugt werden und nicht vom $\boldsymbol{B}$-Feld und daher tragen sie nicht zur Magnetisierung bei, also gehören zu j_P.

Der wesentliche Unterschied zwischen Metall und Isolator zeigt sich nur bei $\omega \to 0$: ein Metall ist charakterisiert durch einen nichtverschwindenden Wert von $\sigma(\omega \to 0)$ ($\epsilon(\omega \to 0)$ divergiert), ein Isolator (Dielektrikum) durch einen endlichen Wert von $\epsilon(\omega \to 0)$. Bei hohen Frequenzen kann man zwischen Metallen und Isolatoren nicht mehr unterscheiden. Der Grund ist, dass auch die „freien“ Ladungen in einem Metall oszillieren und nicht mehr von den „gebundenen“ unterschieden werden können.

Lorentzmodell Dasselbe Lorentzmodell (14.5) kann daher auch für Metalle verwendet werden, indem auch *ungebundene* Elektronen eingeführt werden. Das kann man formell durch Einführung einer verschwindenden Eigenfrequenz für $n = 0$

$$\omega_0 = 0 \tag{14.26}$$

machen.

Aus (14.9) und (14.24) kann man unmittelbar die frequenzabhängige Leitfähigkeit ablesen. Wir teilen diese in einen *metallischen* Term aus der $\omega_0 = 0$ Mode und den Beiträgen aus den Moden mit endlichen Frequenzen *(dielektrischer Term)*:

$$\sigma(\omega) = \sigma_{met}(\omega) + \sigma_{diel}(\omega) \; . \tag{14.27}$$

Der zweite Term lässt sich leicht mit Hilfe von (14.24) aus (14.9) ablesen. Den wollen wir nicht weiter diskutieren.

Der metallische Term ist durch die *Drude Formel*

$$\sigma_{met}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \tag{14.28}$$

beschrieben, mit der *Gleichstromleitfähigkeit*

$$\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{M_e} \tag{14.29}$$

und der *mittleren Stoßzeit*

$$\tau \;=\; \frac{1}{\Gamma_0} \; . \tag{14.30}$$

Dabei ist n_0 die Dichte der ungebundenen (*metallischen*) Elektronen.

Für hohe Frequenzen haben wir aus (14.10) und (14.24)

$$\sigma_\omega \approx i\frac{\omega_P^2}{\omega} \;\; : \tag{14.31}$$

die Leitfähigkeit wird rein imaginär: die ohmische Dissipation verschwindet.

14.4 Para- und Diamagnetismus

Eine Magnetisierung **M** kann (analog dem Fall der Polarisation $\boldsymbol{P}$) auf folgende Weise entstehen:

1.) Orientierungsmagnetisierung **(Paramagnetismus)**

Permanente elementare magnetische Dipole (unter anderem auch die Spins der freien Elektronen in einem Metall) werden in einem äußeren Magnetfeld gegen die thermische Bewegung ausgerichtet und führen zu einer makroskopischen Magnetisierung **M**, die in die Richtung von **B** orientiert ist. *Der paramagnetische Beitrag* $\chi_{m,para}$ *zu* χ_m *ist also positiv.* Ohne Magnetfeld sind die elementaren Dipolmomente **m** bzgl. ihrer Richtung statistisch verteilt und man erhält im makroskopischen Mittel $\mathbf{M} = 0$.

2.) Induzierte Magnetisierung **(Diamagnetismus)**

Im Magnetfeld ändern sich die Bahnen der Elektronen, insbesondere ihr Drehimpuls. Eine solche Änderung des Drehimpulses ist nach (5.30) mit einer Änderung des magnetischen Dipolmoments des Atoms verbunden. Atome, die kein permanentes magnetisches Dipolmoment haben, erhalten also im äußeren Magnetfeld ein *induziertes* Dipolmoment. Diese induzierten molekularen Ringströme sind dissipationsfrei. Aufgrund der Lenz'schen Regel erzeugen sie ein induziertes Moment welches dem des äußeren Feldes entgegengesetzt ist. *Der diamagnetische Beitrag* $\chi_{m,dia}$ *zu* χ_m *ist also negativ.* Typischerweise ist χ_m sehr klein ($|\chi_{m,dia}| \sim 10^{-6}$), so dass in der Präsenz permanenter Dipolen der paramagnetische Anteil stets gewinnt.

Eine Ausnahme bilden die Supraleiter, die perfekte Diamagnete sind mit $\chi_m = -1$: in einem Supraleiter kann kein $\boldsymbol{B}$ eindringen (Meißner-Ochsenfeld-Effekt).

3.) Kollektive Magnetisierung **(Ferromagnetismus)**

In ferromagnetischen Materialien ordnen sich die permanenten magnetischen Dipole unterhalb einer kritischen Temperatur spontan, d.h. ohne äußere Felder. Hier ist also $\mathbf{M} \neq 0$ mit $\boldsymbol{H} = 0$.

Die obige Diskussion zeigt eine grundlegende Differenz zur dielektrischen Polarisation. Während (im isotropen Fall und bei $\omega = 0$) $\boldsymbol{P}$ sich in beiden Fällen in die Richtung von $\boldsymbol{E}$ orientiert, und daher χ_e stets positiv ist, haben diamagnetische Materialien $\chi_m < 0$, paramagnetische $\chi_m > 0$.

Die Magnetisierung **M** hängt also im Allgemeinen vom äußeren Feld und der Temperatur ab. Da Kräfte vom $\boldsymbol{B}$-Feld erzeugt werden, sollten wir entsprechend (14.1) eigentlich

$$\mathbf{M} \;=\; \mathbf{M}[\boldsymbol{B}, T] \tag{14.32}$$

betrachten. Es ist jedoch üblich, (14.32) durch

$$\mathbf{M} \;=\; \mathbf{M}[\boldsymbol{H}, T] \tag{14.33}$$

zu ersetzen, da $\boldsymbol{H}$ über die Stromdichte $\mathbf{j}_f$ praktisch leichter kontrollierbar ist als $\boldsymbol{B}$.

Paramagnetismus

In (5.31) haben wir folgenden Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls **L** und magnetischem Dipolmoment geladener Teilchen hergestellt

$$\boxed{\mathbf{m} \;=\; g\,\frac{q}{2m}\mathbf{L}}\;. \tag{14.34}$$

Die Energie des Dipols im äußeren Feld ist durch (5.36) gegeben. Ähnlich wie in (14.22) erhalten wir bei hohen Temperaturen

$$\mathbf{M} = \frac{N\mathbf{m}^2}{3KT}\mathbf{B} = \frac{N\mathbf{m}^2}{3KT}\mu\;\mathbf{H} = , \tag{14.35}$$

also das paramagnetische Anteil der magnetische Suszeptibilität

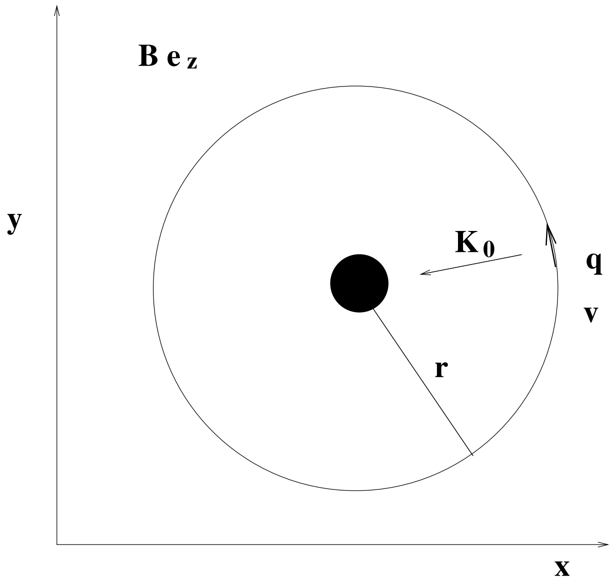
$$\chi_{m,para} \approx \frac{N\mathbf{m}^2}{3KT}\mu_0\;, \tag{14.36}$$

wo μ durch μ_0 ersetzt wurde, da $\chi_{m,para} \ll 1$ und dadurch $\mu = (1+\chi_m)\mu_0 \approx \mu_0$
Setzt man in der Tat typische Werte fü einen Festkörper ein $(N \sim 0.1\mathring{A}^{-3}, T \sim 300K)$ erhält man

$$\chi_{m,para} = \sim 10^{-3}\;. \tag{14.37}$$

Modellrechnung für Diamagnetismus

Wir wollen das Zustandekommen des Diamagnetismus quantitativ näher formulieren. Als einfachstes, klassisches Modell betrachten wir ein um den Atomkern kreisendes Elektron (Ladung q) unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes (B in z-Richtung). Zur Vereinfachung nehmen wir eine kreisformige Bahn (Skizze). Wenn die Geschwindigkeit des Elektrons v ist, dann ist die gesamte Zentripetalkraft K (gegeben durch die anziehende Kraft des Kernes K_0 und die des B-Feldes)



$$K = \frac{m\;v^2}{r} = K_0 - q\;v\;B \tag{14.38}$$

nach der Anordnung der Skizze. Für konstantes K_0 ändert sich v um die Menge

$$\Delta v \equiv v(B) - v(B=0) = -\frac{rqB}{2m} + O(B^2)\ . \tag{14.39}$$

Im linearen Regime kann der $O(B^2)$ Term konsistent vernachlässigt werden. (14.39) entspricht dann einer Änderung des Drehimpulses $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{e}_z\ \Delta L_z$ mit

$$\Delta L_z = m\ r\ \Delta v = -\frac{r^2 qB}{2}\ . \tag{14.40}$$

Zusammen mit (14.34) entspricht dies einem zusätzlichen magnetischen Moment (hier $g=1$, weil es sich um Elektronenbahnen handelt)

$$\Delta\mathbf{m}\ =\ -\frac{q^2\ r^2}{4m}\mathbf{B}\ . \tag{14.41}$$

Wenn $Z\ N$ die Elektronendichte, $q=-e$ ist und r eine typische Atomlänge $r=a_0$ (der Bohr'sche Radius) dann ist die induzierte Magnetisierung

$$\mathbf{M} \sim -\frac{Z\ N\ e^2\ a_0^2}{4m}\mathbf{B}\ . \tag{14.42}$$

Wie bereits erwähnt zeigt diese antiparallel zum **B**-Feld. Wie beim Paramagnetismus können wir μ durch μ_0 ersetzen (Achtung, gilt nur wenn $\chi_m \ll 1$, also z.b. nicht in einem Supraleiter wo $\chi_m = -1$!) und erhalten

$$\chi_{m,dia} = -\frac{Z\ N\ e^2\ a_0^2\ \mu_0}{4m}\ . \tag{14.43}$$

Setzt man typische Zahlen ein, erhält man als Abschätzung

$$\chi_{m,dia} \approx -10^{-6} \tag{14.44}$$

also einen Faktor 1000 kleiner als $\chi_{m,para}$ (14.37). Allerdings gibt es in einem Stoff freie magnetische Momente nur dann, wenn es ungepaarte Elektronen gibt. Systeme ohne ungepaarte Elektronen sind daher diamagnetisch.

Teil VI

Quellen elektromagnetischer Strahlung

Kapitel 15

Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

15.1 Problemstellung

Bei Anwesenheit von Ladungen haben wir die inhomogenen Gleichungen (vgl. (7.15), (7.16))

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} \;=\; -\mu\mathbf{j}, \tag{15.1}$$

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{15.2}$$

mit der Nebenbedingung (Lorentz-Eichung)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \;=\; 0 \tag{15.3}$$

zu lösen. Das Problem ist also die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung

$$\Box\Psi(\mathbf{r},t) \;=\; \gamma(\mathbf{r},t)\ , \tag{15.4}$$

wo Ψ für Φ, A_i und γ für ρ/ϵ, μj_i steht.

Green'schen Funktionen

Die allgemeine Lösung von (15.4) setzt sich aus der (in Abschnitt 9 diskutierten) allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (9.9) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammen. Zur Konstruktion einer speziellen Lösung von (15.4) benutzen wir die Methode der *Green'schen Funktionen*: Mit der Definition der Green'schen Funktion:

$$\boxed{\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') \;=\; -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ \delta(t-t')} \tag{15.5}$$

können wir als (formale) Lösung angeben:

$$\boxed{\Psi(\mathbf{r},t) \;=\; \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\ \gamma(\mathbf{r}',t')\ d^3r'dt'}\ , \tag{15.6}$$

wie man durch Einsetzen von (15.6) in (15.4) direkt bestätigt. Dabei wird ohne (die an sich nötigen) Skrupel die Reihenfolge von Integration bzgl. $\mathbf{r}', t'$ und Differentiation bzgl. $\mathbf{r}, t$ vertauscht.

15.2 Konstruktion von G

Die Green'sche Funktion hat zwei fundamentale Eigenschaften:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \;=\; G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \tag{15.7}$$

aufgrund der Invarianz von (15.5) gegen Raum- und Zeit-Translationen;

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \;=\; 0 \quad \text{für } t < t' \tag{15.8}$$

wegen des Kausalitätsprinzips.

Wir transformieren wegen (15.7) $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \to \mathbf{r}$ und $t - t' \to t$ und suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, t) \; . \tag{15.9}$$

Dazu führen wir eine Fouriertransformation bezüglich der Zeitkoordinate durch:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int G(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \; . \tag{15.10}$$

Mit Hilfe von

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t} \, d\omega \; , \tag{15.11}$$

wird (15.9) zu

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \; e^{-i\omega t} \; \left[\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) + \delta(\mathbf{r}) \right] = 0 \; . \tag{15.12}$$

Da diese Gleichung für alle t verschwinden muß, müssen auch alle Fourierkoeffizienten verschwinden:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) = -\delta(\mathbf{r}) \; . \tag{15.13}$$

Zur Lösung dieser Gleichung benutzen wir die Eigenschaft (die wir im Absch.15.2.1 beweisen werden) gültig für eine beliebige, ausreichend (auch im Ursprung) differentierbare Funktion $f(r)$ des Betrages $r = |\mathbf{r}|$:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 4\pi f(0) \delta(\mathbf{r}) \; . \tag{15.14}$$

Als Ansatz für $G(\mathbf{r}, \omega)$ nehmen wir genau diese Form

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{f_\omega(r)}{r} \; , \tag{15.15}$$

dann gibt (15.13)

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{r}\left(f''_\omega(r) + \frac{\omega^2}{c^2} f_\omega(r)\right) - 4\pi f_\omega(0)\delta(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \ , \qquad (15.16)$$

was die Lösungen

$$f_\omega(r) = \frac{1}{4\pi} e^{\pm i\omega r/c} \qquad (15.17)$$

hat. Durch Fouriertransformation (15.10) erhält man mit Hilfe von (15.17),(15.15)

$$G(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega(t\mp r/c)} d\omega = \frac{1}{4\pi r}\delta(t \mp \frac{r}{c}) \ . \qquad (15.18)$$

Das Kausalitätsprinzip (15.8) zwingt uns, die Lösung mit dem oberen $(-)$ Vorzeichen zu wählen. Diese Greensfunktion ist die sogenannte „retardierte“ Greensfunktion, weil diese eine *verzögerte* Antwort ($t = \frac{r}{c}$) beschreibt. Die Funktion mit dem $+$ Vorzeichen heißt „avancierte“ Greensfunktion, weil in diesem Fall die Antwort *vor* deren Ursache stattfindet. Die *retardierte* Greensfunktion für die Wellengleichung lautet also (wir führen die relativen Koordinaten $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ $t-t'$ wieder ein):

$$\boxed{G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})} \ . \qquad (15.19)$$

Interpretation von G

Die Inhomogenität in (15.5) stellt eine punktförmige Quelle dar, welche zur Zeit t' am Ort $\mathbf{r}'$ für eine (infinitesimal) kurze Zeit angeschaltet wird. Die von dieser Quelle hervorgerufene Störung breitet sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c aus. Die **retardierte** Greensfunktion (15.19) erfüllt also folgende physikalische Erwartungen:

i) Die Kugelwelle G muss für $t < t'$ nach dem Kausalitätsprinzip verschwinden.

ii) Sie muss am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit $t = t' + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ ankommen, da elektromagnetische Wellen sich mit der (endlichen) Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ausbreiten.

Gleichung (15.6) zeigt, wie man die Potentiale $\mathbf{A}, \Phi$ zu gegebener Quellen-Verteilung $\rho, \mathbf{j}$ aus den Beiträgen für punktförmige Quellen aufbauen kann.

15.2.1 Beweis von (15.14)

(15.14) kennen wir bereits aus der Elektrostatik für den Fall $f(r) = 1$. Schon in diesem Fall führt die naive Anwendung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten (hier brauchen wir nur den r-Anteil)

$$\boldsymbol{\nabla}^2 g(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r g(r)) \qquad (15.20)$$

zum **falschen** Ergebnis $\boldsymbol{\nabla}^2 1/r = 0$, was die ganze Elektro-statik und -dynamik umkippen würde. Der Grund ist, dass (15.20) nicht in der Nähe von $r = 0$ angewandt werden kann, wo die Funktion singulär ist. Es ist dagegen klar, dass für $r > 0$, (15.20) korrekt sein muss. $\boldsymbol{\nabla}^2 f(r)/r$ besteht also aus einem *regulären* Anteil $\boldsymbol{\nabla}^2_{reg}$ (gegeben in (15.20)), der für jedes $r > 0$ gültig ist und einem *irregulären* Anteil bei $r = 0$. Aus (15.20) ist es klar, dass

$$\boldsymbol{\nabla}^2_{reg} \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{r} f''(r) \; . \tag{15.21}$$

Um den irregulären Anteil zu bestimmen integrieren wir $\boldsymbol{\nabla}^2 f(r)/r$ in einer Kugel $K(a)$ mit Radius a:

$$\int_{K(a)} \boldsymbol{\nabla}^2 \frac{f(r)}{r} d^3\mathbf{r} = \int_{K(a)} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\frac{f(r)}{r}) d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial K(a)} (\boldsymbol{\nabla}\frac{f(r)}{r})\cdot\mathbf{n}\, df = 4\pi a^2 \left(\frac{f'(a)}{a} - \frac{f(a)}{a^2} \right) \; , \tag{15.22}$$

wo wir das Gauß'sche Theorem benutzt haben, sowie

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{f(r)}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} \right) \tag{15.23}$$

benutzt haben. Den irregulären Anteil bekommen wir indem wir den Limes von (15.22) für $a \to 0$ nehmen:

$$\lim_{a\to 0} \int_{K(a)} \boldsymbol{\nabla}^2 \frac{f(r)}{r} d^3\mathbf{r} = -4\pi f(0) \tag{15.24}$$

was bedeutet, dass in der Nähe von $r = 0$

$$\boldsymbol{\nabla}^2_{irreg} \frac{f(r)}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})\; f(0) \; . \tag{15.25}$$

Insgesamt also haben wir (15.14)

$$(\boldsymbol{\nabla}^2_{irreg} + \boldsymbol{\nabla}^2_{reg}) \frac{f(r)}{r} = \frac{f''(r)}{r} - 4\pi\delta(\mathbf{r}) \; . \tag{15.26}$$

15.3 Lösung der Wellengleichung und retardierte Potentiale

Die (asymptotisch verschwindende) Lösung der Wellengleichung (15.4) von (15.6) ist also mit (15.19) gegeben durch:

$$\boxed{\Psi(\mathbf{r}, t) \;=\; \int d^3\mathbf{r}' \int dt' \; \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \gamma(\mathbf{r}', t') = \int d^3\mathbf{r}' \; \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \gamma(\mathbf{r}', t'_{ret}) \; ,} \tag{15.27}$$

wo wir im letzten Term die Integration über t' mit Hilfe der δ-Funktion durchgeführt haben und die retardierte Zeit

$$t'_{ret} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \tag{15.28}$$

eingeführt haben. Die Differenz $t - t_{ret}$ ist die Zeit, die ein Lichtstrahl braucht, um von $\mathbf{r}'$ den Aufpunkt $\mathbf{r}$ zu erreichen. Die Interpretation von (15.27) ist, dass ein Quellenelement $\gamma(\mathbf{r}', t')$ im Punkt $\mathbf{r}'$ bei der Zeit t' das Potential im Aufpunkt $\mathbf{r}$ erst *bei einer späteren Zeit* $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ beeinflusst, d.h. die Information bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit.

Die Allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch die partikuläre Lösung (15.27) plus eine beliebige Lösung der homogenen Wellengleichung, d.h. eine beliebige Linearkombination monochromatischer, ebenen Wellen wie in (9.9).

Angewandt auf Ladungen und Ströme gibt (15.27) die *retardierten Potentiale*

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t')\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t'_{ret})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}'} \tag{15.29}$$

und

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'dt' = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t'_{ret})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}'\,.} \tag{15.30}$$

Die Lösungen (15.29) und (15.30) sind über (15.3) bzw. die Ladungserhaltung (6.3) miteinander verknüpft.

Die Ausführung der Integrationen in (15.29) und (15.30) wollen wir anhand von einigen praktisch wichtigen Spezialfällen untersuchen; dabei werden wir besonders auf die im Argument der δ-Distribution enthaltene Retardierung achten.

quasistationäre Felder

Vernachlässigt man die Retardierung in (15.29) und (15.30),

$$\delta(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) \quad\to\quad \delta(t-t'), \tag{15.31}$$

so erhält man *quasistationäre Felder*:

$$\Phi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r', \tag{15.32}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r', \tag{15.33}$$

welche den gleichen Ausdruck wie in der Elektrostatik und in der Magnetostatik haben. Diese Potentiale treten in der Theorie elektrischer Netzwerke und Maschinen auf. Die Näherung (15.31) ist gerechtfertigt, wenn ρ und $\mathbf{j}$ sich während der Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Distanz $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ zurückzulegen, (praktisch) nicht ändert.

Zeitlich periodische Quellen-Verteilungen

Für periodische Quellen-Verteilungen

$$\rho(\mathbf{r}',t') \;=\; \rho(\mathbf{r}')\exp(-i\omega t'); \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}')\exp(-i\omega t')\,. \tag{15.34}$$

Dann folgt aus (15.29), (15.30):

$$\Phi \;=\; \Phi(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \qquad \mathbf{A} \;=\; \mathbf{A}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{15.35}$$

mit ($k = \omega/c$)

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r', \tag{15.36}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{15.37}$$

Die Diskussion der Integrale (15.36), (15.37) werden wir im Abschnitt 16 wieder aufgreifen.

Felder bewegter Punktladungen

Für eine sich auf der Bahn $\mathbf{x}(t)$ bewegende Punktladung q können wir

$$\rho(\mathbf{r}',t') \;=\; q\;\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')); \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') \;=\; q\;\mathbf{v}(t')\;\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')) \tag{15.38}$$

schreiben. Dann kann in (15.29, mittlerer Term) die $\mathbf{r}'$ - Integration mit Hilfe der δ-Funktion ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r},t) \;&=\; \frac{q}{4\pi\epsilon}\int \frac{\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t'))\;\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'dt' \qquad (15.39)\\ &=\; \frac{q}{4\pi\epsilon}\int \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|}dt',\end{aligned}$$

analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{\mu q}{4\pi}\int \frac{\mathbf{v}(t')\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|}\, dt'\;. \tag{15.40}$$

Zur Ausführung der t' - Integration benutzen wir

$$\int g(t')\;\delta(\xi(t'))\;dt' \;=\; \frac{g(t_{ret})}{|\xi'(t_{ret})|}\;, \tag{15.41}$$

wobei

$$\xi(t') \equiv t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|/c = 0 \tag{15.42}$$

und die *retardierte Zeit* t_{ret} die (in diesem Fall einzige, s.u.) Nullstelle der Gleichung

$$t_{ret}-t+|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t_{ret})|/c = 0 \tag{15.43}$$

ist. Diese *retardierte Zeit* t_{ret} ist nicht so einfach auszuwerten[1], wegen der impliziten t'-Abhängigkeit in $\mathbf{x}(t')$.

t_{ret} trägt der endlichen Laufzeit der elektromagnetischen Welle vom momentanen Teilchenort $\mathbf{x}$ zum Aufpunkt $\mathbf{r}$ Rechnung.

Die Ableitung von ξ lautet

$$\xi'(t')\;\equiv \kappa(t') = 1-\frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')}\cdot\boldsymbol{\beta}(t')\;, \tag{15.44}$$

wo wir den *Abstandsvektor*

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r}-\mathbf{x}(t')\;. \tag{15.45}$$

---

[1] Diese retardierte Zeit ist nicht die gleiche wie in (15.28)!

und

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c} \, . \tag{15.46}$$

eingeführt haben.

Zu beachten ist, dass $\xi'(t')$ stets positiv ist, da $|\boldsymbol{\beta}| < 1$. Aus diesem Grund gibt es immer maximal eine Nullstelle t_{ret} von $\xi(t') = 0$. Anderfalls würde man dieselbe Punktladung gleichzeitig (für den Beobachter) an zwei oder mehr verschiedenen Stellen sehen können.

Wir erhalten also aus (15.39),(15.40) die **Liénard-Wichert-Potentiale**

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{R\kappa}\right]_{ret} \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right]_{ret}} \tag{15.47}$$

und analog

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{\mu q}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{v}}{R\kappa}\right]_{ret}} \, . \tag{15.48}$$

Hier haben wir die Bezeichnung $[\cdots]_{ret}$ eingeführt, was bedeutet, dass alle Größen zwischen $[\cdots]_{ret}$ bei der (durch (15.43) selbskonsistent zu bestimmender) retardierten Zeit zu betrachten sind.

Der Grenzfall $v \to 0$ ergibt das Coulomb-Potential:

$$\mathbf{A} \to 0; \qquad \Phi(\mathbf{r},t) \to \frac{q}{4\pi\epsilon R}. \tag{15.49}$$

15.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen

Von Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen sprechen wir, wenn der Energiefluss durch die unendlich ferne Oberfläche nicht verschwindet,

$$\lim_{R\to\infty} \int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f} \;\neq\; 0 \, . \tag{15.50}$$

Das bedeutet, dass die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ nicht stärker als R^{-1} abfallen dürfen, da die Oberfläche wie R^2 anwächst. Solche Felder nennt man **Strahlungsfelder**, im Gegensatz zu den **statischen** Feldern, welche mit R^{-2} abfallen.

Wir wollen nun zeigen, dass beschleunigte Punktladungen **strahlen**; dazu müssen wir die zu (15.47) und (15.48) gehörenden Felder über

$$\mathbf{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}; \quad \mathbf{E} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{15.51}$$

berechnen, wobei wir für $\Phi, \mathbf{A}$ die Form (15.39), (15.40) benutzen wollen. Wir werden in der (ziemlich komplizierten) Herleitung jeweils immer nur die führenden Terme behalten, und $O(R^{-2})$-Terme stets vernachlässigen.

Für das **B**-Feld haben wir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\frac{\mu q}{4\pi}\int \mathbf{v}(t')\,\overbrace{\delta(t'-t+R(t')/c)}^{(A)}\,\overbrace{\frac{1}{R(t')}}^{(B)}\,dt' \, . \tag{15.52}$$

Hier wurden die beiden Terme, auf die der $\boldsymbol{\nabla}$-Operator angewandt werden muss, mit (A) und (B) markiert. Da $\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|} = O(1/R^2)$ ist, kann man die Anwendung von $\boldsymbol{\nabla}$ auf den Term (B) vernachlässigen (das ist der Term, der in der Magnetostatik das Magnetfeld gibt). Für die δ-Funktion haben wir dagegen

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\delta(\underbrace{t'-t+R(t')/c}_{\xi(t')}) = \delta'(\xi(t'))\frac{R_i(t')}{cR(t')} \ , \tag{15.53}$$

wo wir die Notation (15.42) benutzt haben. Um eine partielle Integration durchführen zu können, ist es zwechmässig die Ableitung der δ-Funktion bezüglich ξ in einer bezüglich t' umzuwandeln:

$$\delta'(\xi(t')) = \frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial t'}}\frac{\partial}{\partial t'}\delta(\xi(t')) = \frac{1}{\kappa(t')}\frac{\partial}{\partial t'}\delta(\xi(t')) \ . \tag{15.54}$$

(15.52) wird also

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu q}{4\pi}\int \frac{1}{R(t')}\frac{1}{\kappa(t')}\boldsymbol{\beta}(t') \times \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')}\frac{\partial}{\partial t'}\delta(\xi(t'))dt' + O(1/R^2) \ . \tag{15.55}$$

Mittels partieller Integration kann man die $\frac{\partial}{\partial t'}$ auf die restlichen Terme verschieben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu q}{4\pi}\int \delta(\xi(t'))\frac{\partial}{\partial t'}\left[\frac{1}{R(t')}\frac{1}{\kappa(t')}\boldsymbol{\beta}(t') \times \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')}\right] dt' + O(1/R^2) \ . \tag{15.56}$$

Wir müssen im Prinzip alle diese Terme nacheinander ableiten. Diese Aufgabe wird deutlich vereinfacht, wenn man sich auf die *(leading)* (führende) Terme in $1/R$ beschränkt. In der Tat hängt der Ausdruck zwischen den $[\cdots]$ in (15.56) von t' von zwei Funktionen ab, nämlich $\mathbf{R}(t')$ und $\boldsymbol{\beta}(t')$. Da $\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{R}(t') = -\mathbf{v}(t')$ verliert man beim Ableiten von $\mathbf{R}(t')$ stets eine Potenz in R. Solche Terme können daher vernachlässigt werden. Ebenfalls geschieht beim Ableiten des Betrages $\frac{\partial}{\partial t'}R(t') = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}/R$.

Dagegen ergibt die Ableitung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{\beta}(t') = \mathbf{a}(t')/c \tag{15.57}$$

gerade die Beschleunigung des Teilchens: hier „verliert“ man keine Potenz von R.

Diese Überlegung zeigt schon, dass *leading* Terme in $1/R$ proportional zu $\mathbf{a}$ sein müssen. Wir führen daher in (15.56) die Ableitung bezüglich t' nur da wo $\boldsymbol{\beta}$ auftaucht durch, nämlich explizit und in der Funktion $1/\kappa$. Für die letztere haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{1}{\kappa(t')} = \frac{1}{\kappa(t')^2}\mathbf{a}(t')\cdot\frac{\mathbf{R}(t')}{cR(t')} + O(1/R) \ . \tag{15.58}$$

Wir ersetzen auch, wie oben

$$\delta(\xi(t')) = \frac{1}{\kappa(t')}\delta(t'-t_{ret}) \ , \tag{15.59}$$

führen die Größe

$$S \equiv \kappa R = R - \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}/c \tag{15.60}$$

ein und erhalten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu q}{4\pi c}\int dt'\,\frac{1}{S(t')}\,\delta(t'-t_{ret})\left[\mathbf{a}(t')\times\frac{\mathbf{R}(t')}{S(t')}+\left(\mathbf{a}(t')\cdot\frac{\mathbf{R}(t')}{S(t')}\right)\left(\boldsymbol{\beta}(t')\times\frac{\mathbf{R}(t')}{S(t')}\right)\right]+O(1/R^2)\;. \tag{15.61}$$

Das Integral über t' kann leicht mit Hilfe der δ-Funktion durchgeführt werden. Nach Einführung des Vektors[2]

$$\mathbf{M}\equiv\frac{\mathbf{R}}{S} \tag{15.62}$$

schreiben wir **B** in einer kompakten Form

$$\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{B}_s+\mathbf{B}_2} \tag{15.63}$$

mit dem $O(1/R)$ Term (Strahlungsfeld) $\mathbf{B}_s$ aus (15.61):

$$\boxed{\mathbf{B}_s=\frac{\mu q}{4\pi c}\left[\frac{1}{S}\mathbf{a}\times\mathbf{M}+\frac{1}{S}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{M}\right)\right]_{ret}} \tag{15.64}$$

und B_2 der restliche $O(1/R^2)$ Term ist.

Für das **E**-Feld erhält man aus (15.51) mit einer ähnlichen Rechnung

$$\boxed{\mathbf{E}=\mathbf{E}_s+\mathbf{E}_2} \tag{15.65}$$

mit

$$\boxed{\mathbf{E}_s=\frac{\mu q}{4\pi}\left[\frac{1}{S}\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}\left(\mathbf{M}-M\boldsymbol{\beta}\right)-\frac{1}{S}M\mathbf{a}\right]_{ret}\;.} \tag{15.66}$$

Man kann sich leicht vergewissern, dass ähnliche Beziehungen wie bei den ebenen Wellen bestehen, nämlich

$$\boxed{\mathbf{E}_s\cdot[\mathbf{N}]_{ret}=0\qquad\mathbf{B}_s=\frac{1}{c}\,[\mathbf{N}]_{ret}\times\mathbf{E}_s\;.}\;, \tag{15.67}$$

wo

$$\mathbf{N}\equiv\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{15.68}$$

der Verbindungs-Einheitsvektor ist.

Für die $O(1/R^2)$ Felder ergibt sich nach langer Rechnung

$$\boxed{\mathbf{E}_2=\frac{q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{\mathbf{M}-M\boldsymbol{\beta}}{S^2}\left(1-\beta^2\right)\right]_{ret}} \tag{15.69}$$

und eine der Beziehungen wie in (15.67) gilt

$$\mathbf{B}_2=\frac{1}{c}\,[\mathbf{N}]_{ret}\times\mathbf{E}_2\;.\;, \tag{15.70}$$

so dass auch das gesamte **B** stets senkrecht zu $[\mathbf{N}]_{ret}$ und zu **E** ist.

---

[2] Was für kleine β dem Einheitsvektor von **R** entspricht

15.5 Energiestromdichte

Da $\mathbf{E}_s$ und $\mathbf{B}_s$ wie $1/R$ abfallen, fällt die Energiestromdichte (Pointing-Vektor) $\mathbf{S}$ wie $1/R^2$ ab. Mit Hilfe von (15.67) bekommen wir für ihren *leading* ($O(1/R^2)$)-Anteil

$$\mathbf{S}_s = -\frac{\mathbf{E}_s \times (\mathbf{E}_s \times [\mathbf{N}]_{ret})}{\mu c} = \frac{[\mathbf{N}]_{ret}}{\mu c} E_s^2 \, . \tag{15.71}$$

Wir erhalten

$$\boxed{\mathbf{S_s} \;=\; \left[\frac{q^2 \mathbf{N}}{16\pi^2 \epsilon c^3 \kappa^6 R^2} \Big(\mathbf{N} \times \big[(\mathbf{N} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a} \big] \Big)^2 \right]_{ret}} \tag{15.72}$$

Da $|\mathbf{S}| \sim R^{-2}$, ist die Ausstrahlungsbedingung (15.50) erfüllt und wir haben das Ergebnis, dass beschleunigte Punktladungen, $\mathbf{a} \neq 0$, strahlen.

Dass geradlinig, gleichförmig bewegte Punktladungen ($\mathbf{a} = 0$) nicht strahlen, folgt ohne jede Rechnung aus dem Relativitätsprinzip: Das Ruhe-System der Punktladung ist dann ein Inertialsystem, in dem das elektrische Feld das Coulomb-Feld ist und das magnetische Feld, per Definition, verschwindet, so dass $\mathbf{S} = 0$ wird.

Im nichtrelativistischen Limes $\beta \ll 1$, kann man $\kappa \approx 1$, und die Retardierung vernachlässigen: (15.72) gibt

$$\mathbf{S_s} \;=\; \frac{q^2 \mathbf{N}}{16\pi^2 \epsilon c^3 R^2} \, |\mathbf{N} \times \mathbf{a}|^2 \qquad \beta \ll 1 \tag{15.73}$$

also ist die Strahlungsintensität maximal senkrecht zur Teilchenbeschleunigung. Im relativistischen Fall (ÜB) $1 - \beta \ll 1$ und für den Fall $\mathbf{a} \parallel \boldsymbol{\beta}$ (Bremsstrahlung) ist die maximale Intensität in einem kleinen Winkel nach vorne ausgerichtet.

Beispiele:

1.) Bremsstrahlung:

Wenn ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem äußeren Feld abgebremst wird (z.B. beim Aufprall auf ein Target), dann entsteht Bremsstrahlung. Daraus resultiert das kontinuierliche *Röntgenspektrum*.

2.) Synchrotron-Strahlung:

Die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen ist auch eine beschleunigte Bewegung. Die dabei entstehende Strahlung ist ein wesentliches Problem bei zyklischen Teilchenbeschleunigern (Synchrotron); ein Teil der zugeführten Energie geht durch Strahlung *verloren*. Auch hier wird Röntgenstrahlung erzeugt.

3.) Strahlungsdämpfung:

Im klassischen Atommodell bewegen sich die gebundenen Elektronen auf Kreis- bzw. Ellipsenbahnen um den Atomkern. Dabei strahlen sie als beschleunigte Ladungen kontinuierlich elektromagnetische Wellen ab. Der resultierende Energieverlust führt zu instabilen Bahnen und schließlich zum Kollaps des Atoms im klassischen Modell. Dieser Widerspruch zur experimentellen Beobachtung wird erst in der Quantentheorie bzw. Quantenelektrodynamik (QED) aufgelöst.

Kapitel 16

Multipolstrahlung

16.1 Langwellen-Näherung

Für eine Quellen-Verteilung der Form

$$\rho \;=\; \rho(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \qquad \mathbf{j} \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{16.1}$$

hatten wir in Abschnitt 15.3

$$\Phi \;=\; \Phi(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \qquad \mathbf{A} \;=\; \mathbf{A}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{16.2}$$

gefunden, sowie (mit $k = \omega/c$)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'\ , \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'\ . \end{aligned} \tag{16.3}$$

Bei der Diskussion von (16.3) können wir uns im Folgenden auf $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beschränken, da $\mathbf{A}$ und Φ direkt über die Lorentz-Konvention zusammenhängen: Aus

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \;=\; 0 \tag{16.4}$$

folgt mit (16.2)

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{c^2}{i\omega}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{16.5}$$

Zur Bestimmung der Felder im ladungsfreien Bereich werden wir allerdings das skalare Potential nicht mehr brauchen, da

$$-i\omega\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = c^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\ . \tag{16.6}$$

Alle Felder können mittels **A** bestimmt werden.

Langwellen - Näherung

Zur weiteren Behandlung von (16.3) betrachten wir die Langwellen - Näherung

$$a \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}, \tag{16.7}$$

wobei a den Radius einer Kugel angibt, welche die Ladungs- und Stromverteilung umfasst. Wir nehmen den Koordinatenursprung im Mittelpunkt dieser Kugel, so daß $r' \leq a$.

Beispiele

Für die optische Strahlung von Atomen ist $a \approx 10^{-8}$ cm, $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ cm; analog für die γ-Strahlung von Atomkernen: $a \approx 10^{-13}$ cm, $\lambda \approx 10^{-11}$ cm.

Bei der Diskussion von (16.3) sind nun die Längen a, λ und r wesentlich. Wir untersuchen folgende Fälle:

Fall 1 : $a < r \ll \lambda$ (**Nahzone**)

Dann ist

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1 \tag{16.8}$$

und wir erhalten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{16.9}$$

Der Ortsanteil der Potentiale zeigt nach (16.9) die gleiche Struktur wie in Elektro- und Magnetostatik. Angesichts der Zeitabhängigkeit (16.2) spricht man von **quasistatischen Feldern**, für die $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ wie R^{-2} abfallen, so dass die Ausstrahlungsbedingung (15.50) nicht erfüllt ist.

Fall 2 : $a \ll \lambda \ll r$ (**Fernzonen**)

Wegen

$$kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \tag{16.10}$$

können wir dann die Taylor-Reihe in $(\mathbf{r}'/r)$ (vgl. Elektrostatik)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sum_n \frac{(-)^n}{n!}(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\nabla})^n r \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) \tag{16.11}$$

in (16.3) benutzen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \cdots \tag{16.12}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, \frac{\exp(ikr)}{r}\, \underbrace{\exp(-ik\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)}_{1 - i\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}k} \underbrace{\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)^{-1}}_{1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\exp(ikr)}{r}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\left\{1 + (\frac{1}{r} - ik)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') + \cdots\right\}}_{\approx \left\{1 - i\frac{\omega}{c}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}')\right\}}$$

mit $k = \omega/c$ und dem Richtungsvektor

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{16.13}$$

Im letzten Term in (16.12) haben wir wegen (16.10) $1/r$ im Vergleich zu k zu vernachlässigen.

16.2 Elektrische Dipol-Strahlung

Wir berechnen den ersten Term in (16.12)

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\exp(ikr)}{r}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\ , \tag{16.14}$$

der, im Gegensatz zur Magnetostatik, nicht verschwindet, da die Stromdichte nicht stationär ist. Den können wir wie folgt umformen (vgl. Magnetostatik):

$$\int_V j_i(\mathbf{r}')\ d^3r' = \int_V \boldsymbol{\nabla}'\cdot(r_i'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\ d^3r' - \int_V r_i'(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\ d^3r' \tag{16.15}$$

$$= \int_{\partial V} r_i'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{f}' - \int_V r_i'(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\ d^3r' = -i\omega\int_V r_i'\ \rho(\mathbf{r}')\ d^3r',$$

wo wir das Volumen groß genug gewählt haben, so daß das Oberflächenintegral verschwindet, und die Kontinuitätsgleichung

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} - i\omega\rho = 0 \tag{16.16}$$

ausgenutzt haben. Mit der Definition $\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})d^3r$ wird $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ dann zu

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{\exp(ikr)}{r}\ \mathbf{d}\ . \tag{16.17}$$

Für die Felder beschränken wir uns wie in Absch. VI auf Strahlungsterme, d. h. Terme $\sim r^{-1}$. Wie da bereits gesehen, liefern Ableitungen bzgl. r_i des Betrages r zu Termen niedriger Ordnung.
Die *leading* Terme in der Rotation von (16.17) kommen aus Ableitungen des $\exp(ikr)$-Termes. Da wirkt der $\boldsymbol{\nabla}$-Operator:

$$\boldsymbol{\nabla}\exp(ikr) \to i\ k\ \mathbf{N}\ \exp(ikr)\ . \tag{16.18}$$

Wir erhalten also

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi c}\ \omega^2\frac{\exp(ikr)}{r}\ (\mathbf{N}\times\mathbf{d}). \tag{16.19}$$

Aus (16.6) folgt für das **E**-Feld:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = i\frac{c^2}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -c\ \mathbf{N}\times\mathbf{B}_0\ , \tag{16.20}$$

was auch bedeutet

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\mathbf{N} \times \mathbf{E}_0 \tag{16.21}$$

wo wir (16.18) benutzt haben.

Energiestromdichte

Da $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{N} = 0$, können wir leicht die Energiestromdichte

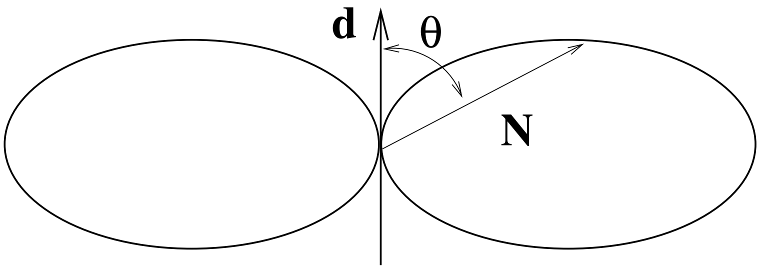
$$\mathbf{S} \;=\; \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \;=\; \frac{c}{\mu_0}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{N}) \times \mathbf{B}_0 \;=\; \frac{c}{\mu_0}\mathbf{N}\; B_0^2 \tag{16.22}$$

berechnen. Es muß beachtet werden, dass in (16.22) eigentlich der Realteil von $\mathbf{B}_0\; e^{-i\omega t}$ vor dem Quadrat gebildet werden muss. Wir finden daher

$$\mathbf{S}_0 \;=\; \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\,\omega^4 d^2\, \sin^2\theta\; \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2}\,\mathbf{N}, \tag{16.23}$$

wobei θ der von $\mathbf{N}$ und $\mathbf{d}$ eingeschlossene Winkel ist. Für den zeitlichen Mittelwert folgt:

$$\overline{\mathbf{S}}_0 \;=\; \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\omega^4 d^2\; \frac{\sin^2\theta}{2r^2}\,\mathbf{N}. \tag{16.24}$$



Der Dipol strahlt also nicht in Richtung von $\mathbf{d}$ ($\theta = 0$), sondern maximal senkrecht zu $\mathbf{d}$ ($\theta \;=\; 90^0$). Die $\sin^2\theta$ - Abhängigkeit ist charakteristisch für Dipolstrahlung.

Bemerkungen

1.) Charakteristisch für Strahlungsfelder ist ihre Eigenschaft, dass $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{S}$ ein orthogonales Dreibein bilden (vgl. Kap. 9).

2.) Ein (mit der Frequenz ω) oszillierender Dipol ist nur durch beschleunigte Punktladungen realisierbar. (16.24) ist also konform mit der allgemeinen Aussage (15.72).

3.) Die Strahlung niedrigster Multipolarität ist Dipol-Strahlung (l=1), nicht Monopol-Strahlung (l=0)! In der Quantentheorie wird gezeigt, wie die Multipolarität der Strahlung und der Drehimpuls der Photonen zusammenhängen. Da Photonen einen Eigendrehimpuls haben (*Spin* 1), gibt es keine *Drehimpuls-freie* Strahlung, d.h. Monopol-Strahlung. Der Spin der Photonen ist direkt mit der Tatsache verknüpft, dass Strahlungsfelder Vektor-Felder sind.

16.3 Magnetische Dipol-Strahlung

Wir betrachten jetzt den Nächsten Term der Entwicklung (16.12)

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \;=\; -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\exp(ikr)}{r}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}')\;d^3r';. \tag{16.25}$$

Wir zeigen jetzt, dass das verbleibende Integral durch das magnetische Dipolmoment und den elektrischen Quadrupoltensor bestimmt ist. Um dies zu sehen, benutzen wir die Identität:

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} \;=\; \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\times\mathbf{j})\times\mathbf{N} + \frac{1}{2}\big\{(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{j})\mathbf{r}'\big\}\;. \tag{16.26}$$

Mit der Definition

$$\mathbf{m} \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\;dV'$$

(4.40) des magnetischen Dipolmoments wird der erste Teil in (16.26):

$$\mathbf{A}_1^{(m)}(\mathbf{r}) \;=\; -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\exp(ikr)}{r}(\mathbf{m}\times\mathbf{N}). \tag{16.27}$$

Der magnetische Dipol-Anteil des Vektorpotentials geht formal in den elektrischen Dipol-Anteil (16.17) über, wenn man

$$\frac{1}{c}(\mathbf{m}\times\mathbf{N}) \to \mathbf{d} \tag{16.28}$$

ersetzt. Damit kann man aus (16.19) und (16.20) für die Feldstärken sofort ablesen (die Ableitung von **N** ergibt Terme höherer Ordnung und kann vernachlässigt werden):

$$\mathbf{B}_1^{(m)}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\omega^2\frac{\exp(ikr)}{r}(\mathbf{N}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{N})) \tag{16.29}$$

und

$$\mathbf{E}_1^{(m)}(\mathbf{r}) \;=\; -c\;(\mathbf{N}\times\mathbf{B}_1^{(m)}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\omega^2\frac{\exp(ikr)}{r}\;c\;\mathbf{m}\times\mathbf{N}\;. \tag{16.30}$$

Ein Vergleich mit (16.19) zeigt, dass (bis auf ein Minus-Zeichen) die magnetische Dipolstrahlung die gleiche Form wie die elektrische aufweist, indem **E** mit **B** sowie **d** mit **m** vertauscht. Entsprechend sieht die im Zeitmittel abgestrahlte Energie ähnlich wie in (16.24) aus:

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(m)} \;=\; \frac{\mu_0}{16\pi^2c^3}\omega^4 m^2\frac{\sin^2\theta}{2r^2}\mathbf{N}, \tag{16.31}$$

wo θ jetzt der Winkel zwischen **m** und **N** ist. Der Unterschied zwischen der magnetischen und der elektrischen Dipolstrahlung liegt also in der **Polarisation**: für einen elektrischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes in der von **N** und **d** aufgespannten Ebene (allerdings senkrecht zu **N**), für einen magnetischen Dipol liegt **E** senkrecht zu der von **N** und **m** aufgespannten Ebene.

Die elektrische Dipolstrahlung ist um den Faktor $\frac{m^2}{c^2d^2} \propto \frac{j^2}{c^2\rho^2} = \frac{v^2}{c^2}$ stärker als die magnetische Dipolstrahlung, es sei denn, die letzte verschwindet, weil z. B., keine freien Ladungen, sondern nur (divergenzfreie) Ströme vorhanden sind.

16.4 Elektrische Quadrupol-Strahlung

Wir befassen uns nun mit dem 2. Term in (16.26), der auf

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \;=\; -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\exp(ikr)}{2r}\int\left\{\mathbf{j}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{N}\cdot\mathbf{j})\right\}\,d^3r' \tag{16.32}$$

führt. Das Integral in (16.32) kann nun auf den in Abschnitt 1.5 eingeführten elektrischen Quadrupoltensor zurückgeführt werden. Analog (16.15) formen wir um (**N** ist unabhängig von $\mathbf{r}'$):

$$\begin{aligned} &\int_V j_i(\mathbf{r}')\,(N_m\; r'_m)\;\; d^3r' + \int_V r'_i\; j_m(\mathbf{r}')N_m\; d^3r' \qquad (16.33)\\ =\;& N_m\int_V \boldsymbol{\nabla}'\cdot(r'_m\; r'_i\;\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\; d^3r' \;-\; N_m\int_V r'_m\; r'_i\;\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')\; d^3r'\\ &\;=\; -\,i\omega\; N_m\int_V r'_m\; r'_i\;\rho(\mathbf{r}')\; d^3r', \end{aligned}$$

wobei der Divergenzterm in (16.33) in ein verschwindendes Oberflächenintegral umgewandelt worden ist und die Ladungserhaltung benutzt wurde. Also:

$$\int_V\Big\{\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{N}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')\Big\}\; d^3r' = -i\omega\int_V \mathbf{r}'\;(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\; d^3r'\;, \tag{16.34}$$

und wir können (16.32) schreiben als:

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\mu_0}{4\pi c}\;\omega^2\;\frac{\exp(ikr)}{2r}\;\int(\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\; d^3r'\;. \tag{16.35}$$

Für die Felder folgt bei Beachtung von (16.18)

$$\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \;=\; ik\,\Big(\mathbf{N}\times\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r})\Big) \tag{16.36}$$

und mit (16.6)

$$\mathbf{E}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \;=\; =\; -c\,\Big(\mathbf{N}\times\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r})\Big)\;. \tag{16.37}$$

Mit Hilfe des elektrischen Quadrupoltensors, gegeben durch seine Komponenten

$$Q_{mn} \;=\; \int_V \rho(\mathbf{r}')\left\{3r'_m r'_n \;-\; r'^2\delta_{mn}\right\}\; d^3r'\;, \tag{16.38}$$

erhalten wir für $\mathbf{B}_1^{(e)}$ den Ausdruck:

$$\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \;=\; -i\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\;\omega^3\;\frac{\exp(ikr)}{6r}\;\Big(\mathbf{N}\times\mathbf{Q}(\mathbf{N})\Big)\;, \tag{16.39}$$

wobei der Vektor $\mathbf{Q}(\mathbf{N})$ die Komponenten

$$Q(\mathbf{N})_m \;=\; \sum_{n=1}^{3} Q_{mn}N_n \tag{16.40}$$

hat. Man beachte, dass der 2. Term in (16.38) zu (16.39) keinen Beitrag liefert (denn $\delta_{mn}N_n = N_m$)!

Energiestromdichte

Wie oben berechnen wir nun die Energiestromdichte

$$\mathbf{S}_1^{(e)} \;=\; \frac{c}{\mu_0}\left(\mathrm{Re}\mathbf{B}_1^{(e)}e^{-i\omega t}\right)^2\mathbf{N} \;=\; \frac{\mu_0}{16\pi^2c^3}\,\omega^6\,\frac{\cos^2(kr-\omega t)}{36r^2}(\mathbf{N}\times\mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2\mathbf{N}\;. \qquad (16.41)$$

Nach Zeitmittelung wird (16.41) zu

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(e)} \;=\; \frac{\mu_0}{16\pi^2c^3}\,\frac{\omega^6}{72r^2}\,(\mathbf{N}\times\mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2\,\mathbf{N}\;. \qquad (16.42)$$

Der Unterschied zur Dipolstrahlung bzgl. der Frequenzabhängigkeit ist offensichtlich. Der zusätzlichen ω^2-Potenz in S entspricht ein zusätzliches $\omega = kc$ in den Feldern, was dem nächsten Term in der Entwicklung in $ak = a/\lambda$ entspricht (a ist die Ausdehnung des Ladungsbereiches). Die Quadrupolstrahlung wird wichtig, wenn $a/\lambda \sim 1$ wird.

Axialsymmetrie

Zur Diskussion der Winkelabhängigkeit betrachten wir den Fall der Axialsymmetrie (vgl. Abschnitt 1.5): θ sei der Winkel zwischen der Symmetrieachse des Quadrupols und dem Ortsvektor.

$$Q_{mn} \;=\; 0 \quad \text{für} \quad m\neq n; \qquad Q_{11} \;=\; Q_{22} \;=\; -\frac{Q_{33}}{2} \;=\; -\frac{Q_0}{3}. \qquad (16.43)$$

In

$$(\mathbf{N}\times\mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 \;=\; Q(\mathbf{N})^2 - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 \qquad (16.44)$$

wird dann

$$Q(\mathbf{N})^2 \;=\; \frac{Q_0^2}{9}\left(N_1^2+N_2^2\right) + \frac{4}{9}Q_0^2N_3^2 \;=\; \frac{Q_0^2}{9}\left(\sin^2\theta + 4\cos^2\theta\right) \qquad (16.45)$$

sowie

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{N}) \;=\; N_nQ_{nn}N_n \;=\; -\frac{Q_0}{3}\sin^2\theta + \frac{2}{3}Q_0\cos^2\theta\;; \qquad (16.46)$$

also

$$(\mathbf{N}\times\mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 \;=\; \frac{4}{9}Q_0^2\sin^2\theta\cos^2\theta\;. \qquad (16.47)$$

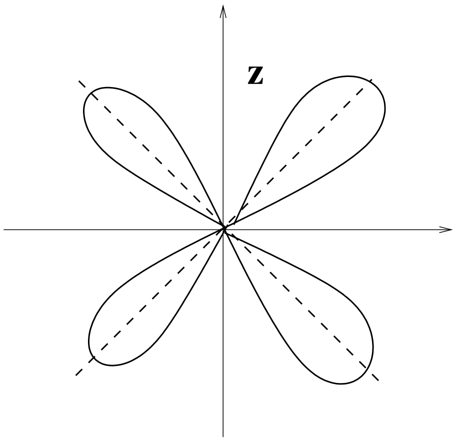
Ergebnis:

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(e)} \;=\; \frac{\mu_0}{16\pi^2c^3}\,\frac{\omega^6}{72r^2}\,\frac{4Q_0^2}{9}\,\sin^2\theta\cos^2\theta\;\mathbf{N}\;. \qquad (16.48)$$

Die elektrische Quadrupolstrahlung unterscheidet sich von der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung sowohl in der Frequenzabhängigkeit als auch in der Winkelverteilung.

Anwendung in der Atom- und Kernphysik

Atome und Kerne können unter Emission bzw. Absorption von elektromagnetischer Strahlung ihren Zustand ändern. Die Multipolentwicklung ist die für diese Situation passende



Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. In der Atomphysik dominiert in der Regel die Dipolstrahlung: Der Vergleich von (16.24) und (16.48) zeigt, dass elektrische Dipolstrahlung um einen Faktor der Größenordnung λ/a stärker ist als elektrische Quadrupolstrahlung. Die erste dominiert auch die magnetische Dipolstrahlung, von der sie sich nach (16.24) und (16.31) um den Faktor $(v/c)^2$ unterscheidet. Die Verhältnisse sind in der Kernphysik komplizierter. Eine genaue Diskussion ist hier nur im Rahmen der **Quantentheorie** möglich.

Kapitel 17

Systematik der Multipolentwicklung

Dieser Teil der Vorlesung wird zu großem Teil aus dem Buch von W. Nolting „Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik“ *Vieweg, Braunschweig* entnommen.

Genauer werden, nach der 5 Auflage die Seiten 108-109, 111 bis 113 und 119 bis 126 benutzt (entspricht Teil des Abschnittes 2.3.5 sowie den Abschnitten 2.3.7-2.3.8) (Nach der 7. Auflage: Seiten 118-120 und 125-132).

In diesem Skriptum werden nur einige wenige Abweichungen oder Ergänzungen aufgeführt.

Verweise auf Gleichungen oder Abschnitte der Form (Nxxx) beziehen sich auf das Buch von Nolting (5 Auflage).

17.1 Eigenschaften der Kugelfunktionen (zu N2.3.5)

Für $m = 0$ sind die Kugelflächenfunktionen unabhängig von φ. Für azimutale Symmetrie kann man sich auf die $m = 0$-Funktionen berschränken. Die Legendre Polynome P_l entsprechen lediglich den $m = 0$ Kugelflächenfunktionen, nur mit einer anderen Normierung.

$$Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta) \tag{17.1}$$

17.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Den Fall einer Flächeladungsdichte wollen wir nicht im Fall **azimutaler Symmetrie**, sondern allgemeiner nach Abs. N2.3.8 behandeln.

Im Abs. N2.3.8 betrachten wir zunächst den Fall einer allgemeinen Flächeladungsdichte $\sigma(r_0, \theta, \varphi)$.

Wir können diese nach Kugelflächenfunktionen (nach N2.158) entwickeln

$$\sigma(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{17.2}$$

mit den Koeffizienten

$$\sigma_{lm} = \int d\varphi\ d\cos\theta\ Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\sigma(r_0,\theta,\varphi) \tag{17.3}$$

die vierte Randbedingung vom Abs. N2.3.8 gibt also (siehe Seite N123)

$$\sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sum_{l,m} \frac{\epsilon_0}{r_0^2}\ a_{lm}(2l+1)\ Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{17.4}$$

also für die Koeffizienten

$$\epsilon_0 a_{lm} = \frac{r_0^2\ \sigma_{lm}}{2l+1} \tag{17.5}$$

und für das Potential der Flächeladungsdichte

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{r_0^2}{\epsilon_0\ r_>} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \sigma_{lm}\ Y_{lm}(\theta,\varphi)\ . \tag{17.6}$$

Im Fall azimutaler Symmetrie sind nur die σ_{l0} Terme ungleich Null.

17.2.1 Punktladung

Der Fall einer Punktladung q in (r_0, θ_0, ϕ_0) ist ein Spezialfall mit

$$\sigma(r_0,\theta,\varphi) = \frac{q}{r_0^2}\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{17.7}$$

(diese Form erfüllt $\int \sigma\ df = q$), also

$$\sigma_{lm} = \frac{q}{r_0^2} Y^*_{lm}(\theta_0,\varphi_0)\ . \tag{17.8}$$

Mit (17.8) und (17.6) erhält man Gl. (N2.169).

17.2.2 Strahlungsfelder

Für Strahlungsfelder brauchen wir statt der Entwicklung von $\frac{1}{4\pi\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (Gl. N2.169), die Entwicklung von

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = ik \sum_{l,m} Y^*_{lm}(\theta',\phi') h_l^{(1)}(kr_>) j_l(kr_<) Y_{lm}(\theta,\phi)\ , \tag{17.9}$$

die wir ohne Beweis angeben. Hier sind j_l und $h_l^{(1)}$ sphärische Bessel- bzw. Hankelfunktionen. Diese sind die Lösung einer Gleichung wie (N2.145) indem man $\boldsymbol{\nabla}^2 \to \boldsymbol{\nabla}^2 + k^2$ ersetzt, was der homogenen Wellengleichung entspricht.

Für Punkte außerhalb des Quellenbereiches ($r > r'$) bekommt man für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = i\mu k \sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta,\phi) \mathbf{j}_{lm}(k) \tag{17.10}$$

mit den Koeffizienten

$$j_{lm}(k) \equiv \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') Y^*_{lm}(\theta', \phi') j_l(k') \; . \tag{17.11}$$

Die ersten beiden Terme der Entwicklung (17.10) entsprechen den Multipoltermen, die wir in Kap. 16 gesehen haben.

Teil VII

Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 18

Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

18.1 Postulate der speziellen Relativitätstheorie

An den Anfang wollen wir die zwei wesentlichen Postulate stellen, welche Einstein an die Spitze der speziellen Relativitätstheorie gestellt hat:

(1) Alle Inertialsysteme sind bezüglich aller Gesetze der Physik gleichberechtigt.

(2) Die Lichtgeschwindigkeit c_0 im leeren Raum hat immer und überall den konstanten Wert

$$c_0 = 2.997925 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Das Postulat (1) wird auch das *Prinzip der Relativität* genannt.

18.2 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, einen Formalismus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Gesetze der Physik auf eine Weise geschrieben werden können, die ihre Invarianz gegen die Lorentz-Transformationen (LT) evident macht. Der erste Schritt führt dabei über die Einführung der *Viererschreibweise*.

Ko- und kovariante Tensoren
Seien ct, x, y und z Koordinaten im Minkowski-Raum. Man definiert [1]

$$\begin{array}{rcccccl} x_\mu & := & (x_0, x_1, x_2, x_3) & = & (ct, x, y, z) & = & (ct, \mathbf{r}), \qquad \mu = 0,1,2,3 \\ x^\mu & := & (x^0, x^1, x^2, x^3) & = & (ct, -x, -y, -z) & = & (ct, -\mathbf{r}) \end{array} \tag{18.1}$$

als *kontravariante* (x_μ) bzw. *kovariante* (x^μ) Vierervektoren. Per Konvention steht ein griechischer Index für 0...3, ein lateinischer für 1...3. Die Einstein-Konvention, wie wir sie

---

[1] WARNUNG: Die Vorzeichen in den (18.1) (und auch unten z.B. in (18.4),(18.7) und andere) sind im vergleich zur Standardkonvention und zum vorherigen Skriptum vertauscht. Der Grund ist dass wir mit dem Rest der Vorlesung konsistent bleiben möchten und z.B. $x_3 = z$ und nicht $x_3 = -z$ haben wollen.

bisher verwendeten, wird nun eingeschränkt: summiert wird nur noch über gleichnamige Indizien, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, d.h.

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = s^2, \qquad x^i x_i = \sum_{i=1}^{3} x^i x_i \ .$$

Die Beschaffenheit, d.h. die Geometrie eines Raumes ist durch seine Metrik und damit durch sein Linienelement eindeutig festgelegt. Es gilt

$$ds^2 \ = \ g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \ . \tag{18.2}$$

Metrischer Tensor

Im euklidischen vierdimensionalen Raum lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

Im Minkowski-Raum hat man dagegen

$$\boxed{g_{\mu\nu} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .} \tag{18.3}$$

Mit dieser Metrik ist es möglich, Indizes zu heben bzw. zu senken und damit kontravariante in kovariante Vektoren zu verwandeln und umgekehrt. Es gilt

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad \text{und} \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \ ,$$

wobei $g^{\mu\nu}$ die zu $g_{\mu\nu}$ inverse Metrik darstellt. Es gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ und

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} \ = \ \delta^\mu_{\ \lambda} \ = \ \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ 1 & \mu = \lambda \end{cases}$$

Transformationseigenschaften

Wie transformieren sich nun allgemeine Vektoren beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem? Was macht überhaupt einen kontravarianten Vektor aus? Man betrachte die kontra- bzw. kovarianten Vierervektoren

$$\begin{aligned} A_\mu \ &= \ (A_0, A_1, A_2, A_3) \\ A^\mu \ &= \ (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) \ . \end{aligned} \tag{18.4}$$

Man kann auch kompakter schreiben

$$\begin{aligned} A_\mu \ &= \ (A_0, \mathbf{A}) \\ A^\mu \ &= \ (A_0, -\mathbf{A}) \ . \end{aligned} \tag{18.5}$$

Das Vektorfeld A_μ hänge von den Kontinuumskoordinaten ab: $A^\mu = A^\mu(x^\mu)$. Durch eine LT werde nun der Übergang zu neuen Koordinaten x'^μ vermittelt. Die kontra- bzw. kovariante Eigenschaft eines Vektors ist nun durch sein Transformationsverhalten in das neue System festgelegt

$$\begin{array}{rl} \text{kovarianter Vektor} \;:\; & A'^\mu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \\ \text{kontravarianter Vektor} \;:\; & B'_\mu = \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \; . \end{array}$$

Invarianz des Skalarproduktes

Eine zentrale Forderung unseres Formalismus soll die Invarianz des Skalarproduktes $B_\mu A^\mu$ gegen LT sein. Dies ist wegen

$$B'_\mu A'^\mu \;=\; \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} B_\nu A^\lambda \;=\; \delta^\nu{}_\lambda B_\nu A^\lambda \;=\; B_\nu A^\nu$$

erfüllt (die Stellung der Indizes am Kroneckersymbol wird später noch klar). Die Motivation für diese Forderung ist offensichtlich: Minkowski-Abstände sollen unabhängig vom Koordinatensystem sein.
Hinweis: Den Skalarprodukt kann man kompakt mit Hilfe des Formalismus (18.5) durchführen:

$$B_\nu A^\nu = (B_0, \mathbf{B}) \cdot (A_0, -\mathbf{A}) = B_0 A_0 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{18.6}$$

Transformation von Ableitungen

Den nächsten Schritt bildet die Untersuchung des Transformationsverhaltens von Ableitungen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \;=\; \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \; ,$$

also lässt sich folgende allgemeine Regel aufstellen:

Die Ableitungen nach kontra/ko-varianten Koordiaten transformieren sich wie ko/kontra-variante Vektoren.

Für die Formulierung von Ableitungen hat sich in der SRT eine abkürzende Schreibweise durchgesetzt:

$$\begin{array}{lclcrcl} \partial_\mu & \equiv & \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla}\right) , & \quad \text{mit} \quad & -\boldsymbol{\nabla} & = & \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \\ \partial^\mu & \equiv & \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \boldsymbol{\nabla}\right) , & \quad \text{mit} \quad & \boldsymbol{\nabla} & = & \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \; . \end{array} \tag{18.7}$$

Wellengleichung

Nun ist es möglich, die *Viererdivergenz* zu definieren:

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; \partial^\mu A_\mu \;:=\; \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) \;=\; \frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \; . \tag{18.8}$$

Oder ähnlich wie in (18.6):

$$\partial_\mu A^\mu \;= (\partial_0, -\boldsymbol{\nabla}) \cdot (A_0, -\mathbf{A}) = \partial_0 A_0 + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}\ . \tag{18.9}$$

Durch zweimalige Anwendung dieses Operators bekommt man eine elegante Schreibweise für den d'Alembert-Operator:

$$\boxed{\Box \;:=\; \partial_\mu \partial^\mu} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \boldsymbol{\nabla}^2 \;=\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\ .$$

Damit ist die *Wellengleichung* Lorentz-invariant.

Raum- und zeitartige Abstände

Ereignisse $\mathbf{x}(t)$ werden durch Vektoren im Minkowski-Raum beschrieben. Zwei Ereignisse

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3), \qquad y_\mu = (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

nennt man raum- bzw./zeitartig wenn sie sich durch ein Signal nicht-/verbinden lassen, also

$$(x^\mu - y^\mu)\,(x_\mu - y_\mu) \;=\; \begin{cases} < 0: & \text{raumartig} \\ > 0: & \text{zeitartig} \end{cases}$$

Zwei 'gleichzeitige' Ereignisse (im Laborsystem) mit $x_0 = y_0$ sind also raumartig. Wegen der Invarianz des Skalarproduktes ist die Raum- bzw. die Zeitartigkeit unabhängig vom Bezugssystem (nicht jedoch die 'Gleichzeitigkeit').

Die Vierergeschwindigkeit

Aufgrund der Zeitdilatation ist es nicht so einfach, einen Ausdruck für eine Geschwindigkeit hinzuschreiben - nach welcher Zeit soll die Bahnlinie abgeleitet werden? Von besonderer Bedeutung ist hier der Begriff der *Eigenzeit.* Sie bezeichnet die Zeit τ, die eine Uhr anzeigt, die mit dem bewegten Körper fest verbunden ist, d.h. mit ihm bewegt wird. Mit τ benennt man die Zeit im Ruhesystem des Beobachters. Es gilt $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ (mit $\beta = v/c$), also

$$d\tau^2 \;=\; dt^2(1-\beta^2) \;=\; \frac{1}{c^2}\Big[(c\ dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\Big] \;=\; \frac{ds^2}{c^2}\ , \tag{18.10}$$

und damit ist die Eigenzeit *invariant* unter LT, genau wie das Lorentz-invariante Linienelement ds. Man hat also eine Zeit, welche zur Definition eines Geschwindigkeitbegriffes geeignet ist. Somit definiert man die *Vierergeschwindigkeit* u_μ als

$$\boxed{u_\mu := \frac{dx_\mu}{d\tau}}\ , \qquad u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(c, \mathbf{v})\ ,$$

also

$$u_0 \;=\; \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad u_1 \;=\; \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} \;=\; v_x \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \text{etc.} \tag{18.11}$$

Es ist dann

$$u_\mu u^\mu \;=\; \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right] \;=\; \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \;=\; c^2 \;. \tag{18.12}$$

Die Viererbeschleunigung

Analog zur Vierergeschwindigkeit definiert man die *Viererbeschleunigung*

$$\boxed{b_\mu \;:=\; \frac{du_\mu}{d\tau} \;=\; \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2}} \;.$$

Zwischen Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung besteht ein besonderer Zusammenhang. Es ist nämlich nach (18.12)

$$0 \;=\; \frac{d}{d\tau}\underbrace{(u_\mu u^\mu)}_{=c^2} \;=\; \frac{du_\mu}{d\tau}u^\mu + u_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} \;=\; g_{\mu\nu}b^\nu u^\mu + u_\mu b^\mu \;=\; 2u_\mu b^\mu \;,$$

also $b\perp u$ bezüglich der Minkowski-Metrik.

Aus (18.12) ist der Vektor der Vierergeschwindigkeit immer *zeitartig*. Hingegen ist im Ruhesystem des Teilchens ($\beta = 0$)

$$b_0 \;=\; \frac{du_0}{d\tau} \;=\; c\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;=\; \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{b}}{(1-\beta^2)^2}0 \;,$$

also ist b_μ ein *raumartiger Vektor.*

18.3 Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts

Im letzten Abschnitt wurde der Übergang zu den Koordinaten eines neuen Inertialsystems x'^μ vollzogen. Wie findet man aber die x'^μ, wenn man die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme kennt? Die allgemeinste lineare Transformation in ein anderes Koordinatensystem wird durch

$$\boxed{x'^\mu \;=\; L^\mu{}_\nu\, x^\nu}$$

vermittelt. Äquivalent haben wir

$$\boxed{x'_\mu \;=\; L_\mu{}^\nu\, x_\nu} \;,$$

wo

$$L_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}g^{\nu\beta}L^\alpha{}_\beta \tag{18.13}$$

Wir suchen die Bedingungen, denen $L^\mu{}_\nu$ genügt. Wegen der Invarianz des Minkowski-Abstandes unter LT ist

$$s^2 \;=\; s'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \;=\; g_{\mu\nu}L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma \;=\; g_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma \;,$$

also

$$g_{\rho\sigma} \;=\; g_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\rho} L^{\nu}{}_{\sigma}, \qquad \boxed{g_{\rho\sigma} = (L^T)^{\mu}{}_{\rho}\, g_{\mu\nu} L^{\nu}{}_{\sigma}} \;. \tag{18.14}$$

Hier erkennt man deutlich die Ähnlichkeit zu orthogonalen Transformationen. Weiterhin gilt

$$\underbrace{\det g}_{=-1} \;=\; \underbrace{\det L^T}_{=\det L} \det g \, \det L \qquad \Rightarrow \qquad \det L \;=\; \pm 1 \;.$$

Man nennt Tranformationen mit

$$\det L = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche LT} \\ -1 & \text{uneigentliche LT} \;. \end{cases}$$

Wir untersuchen im folgenden zwei konkrete Beispiele für $L^{\mu}{}_{\nu}$.

Rotationen
Man setzt $L^0_0 = 1$, $L^0_i = L^i_0 = 0$:

$$L^{\mu}{}_{\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Die Untermatrix R beschreibt dabei eine Rotation, also eine orthogonale Transformation im euklidischen 3d-Unterraum. Wie gewohnt redet man bei

$$\left\{ \begin{array}{c} \det L = \det R = 1 \\ \det L = -1 \end{array} \right\} \text{ von } \left\{ \begin{array}{c} \text{eigentlichen} \\ \text{uneigentlichen} \end{array} \right\} \text{ Rotationen.}$$

Boosts
Die durch $L_{\mu}{}^{\nu}$ vermittelte Transformation soll in ein mit der Geschwindigkeit v z.B. in x-Richtung bewegtes Inertialsystem führen. Laut den Gleichungen der LT ist (für $\boldsymbol{\beta}$ in 1-Richtung)

$$x_0' = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_1' = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_3' = x_3 \;, \tag{18.15}$$

was zu

$$L_{\mu}{}^{\nu} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18.16}$$

führt. Für *kovariante* Ortsvektoren lautet das Transformationsgesetz

$$x'^{\mu} \;=\; L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \qquad \text{mit} \qquad L^{\mu}{}_{\nu} \;=\; g^{\mu\rho} L_{\rho}{}^{\lambda} g_{\lambda\nu} \;,$$

was zu

$$L^\mu{}_\nu \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \tag{18.17}$$

führt. Drei Rotationen um und drei Boots entlang der Raumachsen ergeben sechs unabhängige Parameter für die eindeutige Bestimmung einer LT. Man sieht das auch auf eine alternative Weise ein. Die 16 Transformationsgleichungen

$$g_{\mu\nu} \;=\; g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu$$

sind nicht alle unabhänging. Wegen der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ hat man nur zehn unabhängige Gleichungen und damit sechs freie Parameter.

Gruppeneigenschaften

Einige weitere Eigenschaften der LT sind die folgenden:

1.) *Die LT bilden eine Gruppe*

Bei der Hintereinanderausführung zweier LT ergibt sich wieder eine LT. Diese Gruppe ist aber *nicht kommutativ,* da es sich ja um Matrix-Multiplikationen handelt. Die nächsten beiden Eigenschaften sind Folgen dieser Gruppen-Eigenschaft.

2.) *Die Identität ist eine LT*

Das ist klar, da sich ein Boost für $\beta = 0$ in die Identität verwandelt.

3.) *Zu jeder LT existiert eine Inverse*

Die Hintereinanderausführung einer LT und ihrer Inversen führt also zur Identität. Man kann die Inverse direkt angeben. Wie oben gezeigt, gilt

$$g_{\mu\nu} \;=\; g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu \;.$$

Damit ist

$$\delta^\lambda{}_\nu \;=\; g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} \;=\; \underbrace{g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^\sigma{}_\mu}_{=:L_\sigma{}^\lambda} L^\rho{}_\nu \;=\; L_\sigma{}^\lambda L^\sigma{}_\nu \;.$$

Die gesuchte (Inverse)^T lautet also $L_\sigma{}^\lambda \;=\; g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu \;.$

18.4 Gauß'sche cgs-System

Für die relativistische Formulierung ist es vorteilhaft, nicht das bisher benützte MKSA-System für die elektromagnetischen Einheiten zu benützen, sondern das Gauß'sche cgs-System. Dazu ersetzt man in den SI-Gleichungen

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} \to \mathbf{B}/c \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A}/c \\ &\rho \to 4\pi\epsilon_0\rho \qquad \mathbf{j} \to 4\pi\epsilon_0\mathbf{j} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{\mu_0\; c^2} \end{aligned} \tag{18.18}$$

Dann haben die Maxwell-Gleichungen im Gauß'schen cgs-System (im Vakuum) die Form:

$$\begin{array}{rclrcl} \nabla\cdot\mathbf{E} &=& 4\pi\rho & \nabla\cdot\mathbf{B} &=& 0 \\ \nabla\times\mathbf{B} &=& \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &=& 0\ . \end{array} \tag{18.19}$$

Die Lorentz-Kraft lautet im Gauß'schen cgs-System:

$$\mathbf{K} = q\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) . \tag{18.20}$$

Aus den Potentialen $\mathbf{A}$ und ϕ gewinnt man die physikalischen Felder im cgs-System via

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi\ , \tag{18.21}$$

die Lorentz-Eichung hat die Form

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi \ = \ 0\ . \tag{18.22}$$

18.5 Ströme, Dichten, Potentiale

Der in den letzten Abschnitten entwickelte Formalismus stellt eine extrem leistungsfähige Methode zur Formulierung der Elektrodynamik dar. Im folgenden werden die Gleichungen der Elektrodynamik so geschrieben, dass sie unter LT forminvariant bleiben.

1.) Die Kontinuitätsgleichung

Die Viererdivergenz (18.8) legt einen Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung nahe. Setzt man

$$j_\mu \ := \ (c\rho,\mathbf{j})\ ,$$

so wird die Kontinuitätsgleichung einfach zu

$$\boxed{\partial^\mu j_\mu \ = \ 0}\ , \tag{18.23}$$

Da dies einen Skalar darstellt, ist die Gleichung Lorentz-invariant. [2]

Diese Eigenschaft ist von nun an für *jede* physikalische Gleichung zu fordern. Die Frage ist hier speziell, ob j_μ wirklich ein Vierervektor ist. Dazu muss sich seine nullte Komponente $c\rho$ als zeitartige Variable transformieren. Die im Volumenelement d^3x eingeschlossene Ladung ist ρd^3x. Das Minkowski-Volumenelement d^4x transformiert sich auf folgende Weise:

$$d^4x' \ = \ \underbrace{\left|\frac{\partial(x_0',x_1',x_2',x_4')}{\partial(x_0,x_1,x_2,x_4)}\right|}_{=|\det L|=1} d^4x \ = \ d^4x\ ,$$

---

[2] Man unterscheide zwischen Lorentz-Invarianz als *Forminvarianz* unter LT (das ist das eigentliche Ziel der kontravarianten Formulierung) und *Lorentz-Invariante oder Lorentz-Skalare* Größen, die ihren Wert unter LT beibehalten, so wie die linke Seite von (18.23). Hier ist das beides aufgrund der skalaren Eigenschaft von $\partial^\mu j_\mu$ der Fall.

also ist d^4x eine Lorentz-Invariante. Andererseits ist wegen der Invarianz der elektrischen Ladung

$$\rho'\, d^3x' \;=\; \rho\, d^3x \; . \tag{18.24}$$

Damit ist gezeigt, dass ρ eine zeitartige Variable ist: Sie transformiert sich wie dx_0.

2.) Das Viererpotential und die Lorentz-Eichung
Die Lorentz-Eichbedingung lautet

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi \;=\; 0 \; .$$

Mit der Definition des **Viererpotentials**

$$A_\mu \;:=\; (\phi, \mathbf{A}) \tag{18.25}$$

wird dies zu

$$\partial^\mu A_\mu \;= \partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \; . \tag{18.26}$$

Auch das ist als Skalar wieder invariant unter LT. Das gilt offensichtlich nicht für die Coulomb-Eichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$.

3.) Vektor- und Skalarpotential in Lorentz-Eichung
Die Feldgleichungen für die Potentiale ϕ und $\mathbf{A}$ können nun kompakt hingeschrieben werden. Sie lauten zusammen einfach

$$\boxed{\Box A_\mu \;=\; \frac{4\pi}{c} j_\mu} \; . \tag{18.27}$$

4.) Die **E**- und **B**-Felder
Mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right)$ ergibt sich beispielsweise für die x-Komponenten

$$\begin{aligned} E_x &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial A_x}{\partial t} - \tfrac{\partial \phi}{\partial x} &&= -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \\ B_x &= \tfrac{\partial A_z}{\partial y} - \tfrac{\partial A_y}{\partial z} &&= -(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \end{aligned} \tag{18.28}$$

18.6 Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie

Gl. (18.28) legen die Einführung des antisymmetrischen *Feldstärkentensor* nahe:

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \; . \tag{18.29}$$

Seine Komponenten erhält man durch Aufteilung in zeitlichen (0) und räumlichen ($i = 1,2,3$) Indizes:

$$\begin{aligned} F_{i,0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i && &&= E_i \\ F_{i,j} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i &&= \epsilon_{ijk}\,(-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})_k &&= -\epsilon_{ijk}\, B_k \; . \end{aligned} \tag{18.30}$$

Dies, zusammen mit der Antisymmetriebedingung $F_{\mu,\nu} = -F_{\nu,\mu}$, bestimmt F vollständig. In Matrix Form haben wir also:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{18.31}$$

Seine kovariante Form erhält man durch

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} F_{\rho\lambda} g^{\lambda\nu} \tag{18.32}$$

Wir können also (18.30), sowie die Tatsache benutzen, dass jeder räumlicher Index ein minus Zeichen erhält. Das ergibt:

$$\begin{aligned} F^{i,0} &= -E_i \\ F^{i,j} &= -\epsilon_{ijk}\, B_k\ . \end{aligned} \tag{18.33}$$

In Matrix Form:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{18.34}$$

Aus diesem gewinnt man den sogenannten *dualen* Feldstärketensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ über

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{18.35}$$

Analog zum dreidimensionalen Fall ist hier vollständig bestimmt durch die Definition

$$\epsilon_{0123} = 1 \quad \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\text{total antisymmetrisch} \tag{18.36}$$

Man sieht, dass man von $F_{\mu\nu}$ direkt nach $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ gelangt, wenn man $\mathbf{B}$ für $\mathbf{E}$ und $-\mathbf{E}$ für $\mathbf{B}$ einsetzt. Mit diesen Definitionen können die Maxwell-Gleichungen äußerst kompakt aufgeschrieben werden. Wir trennen in inhomogene und homogene Gleichungen.

1.) Die inhomogenen Gleichungen
Sie lauten unter Verwendung des Feldstärketensors einfach

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu} , \tag{18.37}$$

Beweis: Wir benutzen (18.30) und setzen $c = 1$: Wie oben wird die Gl. (18.37) in seinen räumlichen und seinen zeitlichen Komponenten unterteilt. Die ersteren liefern

$$4\pi\ j_i = \partial^0 F_{0i} + \partial^l F_{li} = \partial_t(-E_i) - \partial^l \epsilon_{lim} B_m = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \partial_t\ \mathbf{E})_i\ , \tag{18.38}$$

also das Ampèrsche Gesetz Die zeitliche Komponente liefert

$$4\pi\ \rho = \partial^0 F_{00} + \partial^i F_{i0} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\ . \tag{18.39}$$

Gl. (18.37) ist konsistent mit der Definition (18.29), in der Tat:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} \ = \ \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu\ . \tag{18.40}$$

Der zweite Term verschwindet in der Lorentz-Eichung (18.26), während der erste Term gleich (18.27) ist. Das bestätigt Gl. (18.37).

Beide Seiten von (18.37) haben ein freies Index, also transformieren wie ein Vierervektor unter einer Lorentz-Transformation. Also gilt in jedem anderen Inertialsystem K' die Gleichung

$$\partial'^\mu F'_{\mu\nu} \ = \ \frac{4\pi}{c} j'_\nu\ .$$

Aus (18.37) sieht man also, dass die inhomogene Maxwell-Gleichungen *Lorentz-invariant* sind.

2.) Die homogenen Gleichungen

Sie haben die Form

$$\boxed{\partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \ = \ 0}\ , \tag{18.41}$$

wobei $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ hier der duale Feldstärketensor ist. Wie sich zeigen lässt, kann man die homogenen Gleichungen auch mit Hilfe des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ schreiben:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \ \partial_\lambda F_{\mu\nu} \ = \ 0\ . \tag{18.42}$$

Diese Gleichung heißt auch *Jacobi-Identität* (der Beweis erfolgt einfach durch das Einsetzen der Definition (18.29)).

Da die homogenen Maxwell Gleichungen äquivalent zu den (18.21) sind, dann sind die (18.42) automatisch aus der Definition (18.29) erfüllt.

Beispielsweise bekommt man dann für $\mu = 0$, $\nu = 1$ und $\lambda = 2$ die z-Komponente der Induktionsgleichung wieder:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B_z - \frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}\right]_z = 0\ .$$

Für $\mu = 1$, $\nu = 2$, und $\lambda = 3$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x \ + \ \frac{\partial}{\partial y} B_y \ + \ \frac{\partial}{\partial z} B_z \ = \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} \ = \ 0\ .$$

18.7 Transformation der Felder

Wenn man schon die Elektrodynamik kontravariant formuliert, dann stellt sich die Frage, wie sich elektrische und magnetische Felder bzw. der Feldstärketensor unter Lorentz-Transformationen verhalten. Die universelle Transformationsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe lautet

$$F'_{\mu\nu} \; = \; L_\mu{}^\lambda L_\nu{}^\rho \, F_{\lambda\rho} \; .$$

Das gestrichene System bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Richtung. Die zwischen K und K' vermittelnde Transformation ist ein Boost der Form (18.16) und bewirkt, dass im gestrichenen System die Felder folgende Form annehmen:

$$\begin{array}{rclrcl} E'_x &=& E_x, & B'_x &=& B_x \\ E'_y &=& \big(E_y - \beta B_z\big)/\sqrt{1-\beta^2}, & B'_y &=& \big(B_y + \beta E_z\big)/\sqrt{1-\beta^2} \\ E'_z &=& \big(E_z + \beta B_y\big)/\sqrt{1-\beta^2}, & B'_z &=& \big(B_z - \beta E_y\big)/\sqrt{1-\beta^2} \end{array} \; . \tag{18.43}$$

Spätestens hier wird klar, dass elektrisches und magnetisches Feld untrennbar verknüpft sind. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$, nicht die getrennten Felder **E** und **B**, liefert die relativistisch konsequente Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. Die korrekte Verallgemeinerung von (18.43) für allgemeine Geschwindigkeiten **v** lautet

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbf{B}' &=& \gamma\,\mathbf{B} - \dfrac{\gamma-1}{v^2}\Big(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\Big)\mathbf{v} - \dfrac{\gamma}{c}\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\Big) \\ \mathbf{E}' &=& \gamma\,\mathbf{E} - \dfrac{\gamma-1}{v^2}\Big(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\Big)\mathbf{v} + \dfrac{\gamma}{c}\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\Big) \end{array}}$$

mit

$$\gamma \; := \; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \; .$$

Zu beachten ist, dass zu einer Transformation in ein neues Bezugssystem immer auch eine Transformation der Raumzeit-Koordinaten gehört, denn andere Koordinaten hat der dortige Beobachter ja nicht zur Verfügung. In K' müssen also die Felder als $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t')$ und $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t')$ ausgedrückt werden. In den Formeln (18.43) wird diese Tatsache noch nicht berücksichtigt. Die obigen Formeln machen deutlich, dass beispielsweise ein in einem bestimmten Inertialsystem rein magnetisches Feld nicht in allen anderen Inertialsystemen auch rein magnetisch zu sein braucht. Bei der Transformation treten plötzlich elektrische Feldkomponenten auf!

Kapitel 19

Relativistische Mechanik

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind invariant unter Galilei- Transformationen, nicht jedoch unter Lorentz-Transformationen. Das Relativitätsprinzip verlangt daher eine Modifikation der Newton'schen Gleichungen, und zwar derart, daß bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ die Newton'schen Gleichungen gültig bleiben.

19.1 Impuls und Energie

Wir betrachten zunächst ein freies Teilchen. Seinen Newton'schen Impuls

$$\mathbf{p} \;=\; m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{19.1}$$

erweitern wir zu einem Vierer-Impuls, dessen Komponenten durch

$$p_\mu \;=\; m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau} \;=\; m_0 u_\mu \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(c,\mathbf{v}) \equiv m\;(c,\mathbf{v}) \tag{19.2}$$

gegeben sind, wobei τ die Eigenzeit des Teilchens in seinem Ruhsystem ist und u_μ die Vierergeschwindigkeit. m_0 is die Ruhemasse, und $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ die relativistische Masse

Ruheenergie
Wir entwickeln

$$c\,p_0 \;=\; \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \;=\; m_0 c^2 \,+\, \frac{1}{2} m_0 v^2 \,+\, \ldots \tag{19.3}$$

in Potenzen von β^2. Im nicht-relativistischem Limes $\beta \to 0$ erkennen wir $m_o v^2/2$ als die kinetische Energie und nennen daher $m_0 c^2$ die Ruheenergie und

$$\boxed{\mathcal{E} \;=\; c\,p_0} \tag{19.4}$$

als die relativistische Gesamtenerige.

Energie-Impuls Beziehung
Die Länge eines Vierer-Vektors ist eine Lorentz-Invariante:

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \;=\; p_\mu p^\mu \;=\; m_0^2 c^2, \qquad \boxed{\mathcal{E}^2 \;=\; m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}\;. \tag{19.5}$$

Bindungsenergien von Atomen und Kernen

Für das Deuteron entspricht die Massendifferenz

$$\Delta m \;=\; m_p + m_n - m_d \;\approx\; 3.5 \cdot 10^{-27} g \tag{19.6}$$

einer Energie

$$\epsilon_d \;=\; \Delta m\, c^2 \;\approx\; 2.2 MeV, \tag{19.7}$$

welche gerade die Bindungsenergie des Deuterons ist. In Atomen ist die Bindungsenergie um Größenordnungen geringer: aus

$$m_p + m_e - m_H \;\approx 2.4 \;\cdot 10^{-32} g \tag{19.8}$$

folgt für die Bindungsenergie

$$\epsilon_H \;\approx\; 13.5 eV. \tag{19.9}$$

Trägheitsgesetz

Das Newton'sche Trägheitsgesetz, wonach

$$\mathbf{p} \;=\; \text{const} \tag{19.10}$$

für ein freies Teilchen gilt, verallgemeinern wir auf

$$p_\mu \;=\; \text{const}; \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{19.11}$$

fordern also zugleich mit der Erhaltung der räumlichen Komponenten auch die Konstanz der 0. Komponente, der Energie.

19.2 Bewegungsgleichungen

In Verallgemeinerung der Newton'schen Kraft-Definition führen wir im Minkowski-Raum eine Vierer-Kraft ein durch ihre Komponenten:

$$\boxed{K_\mu \;=\; \frac{dp_\mu}{d\tau} \;=\; \gamma(v)\frac{dp_\mu}{dt}.} \tag{19.12}$$

Dabei ist $d\tau$ im *momentanen* Ruhsystem des Teilchens als *differenzielle* Eigenzeit erklärt. Die Raum-Komponenten von (19.12) ergeben die relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \;=\; \mathbf{K} \tag{19.13}$$

wobei **K** z.B. für die Lorentz-Kraft (6.24) steht. Mit (19.2) können wir auch

$$\gamma\frac{d}{dt}\Big(m(v)\mathbf{v}\Big) \;\equiv\; \gamma\frac{d}{dt}\Big(m_0\gamma(v)\mathbf{v}\Big) \;=\; \mathbf{K} \tag{19.14}$$

schreiben, wobei m_0 die Ruhemasse und $m(v)$ die relativistische Masse darstellt.

Die Gleichung (19.14) zeigt, daß Teilchen der Ruhemasse $m_0 \neq 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ nicht erreichen können, da wegen

$$m(v) \to \infty \tag{19.15}$$

für $v \to c$ dazu eine ∞-große Energie nötig wäre.

19.3 Lorentz-Transformation der Kraft

Da K_μ die Komponenten eines Vierer-Vektors sind, gilt für die Transformation vom momentanen Ruhsystem Σ auf ein anderes Inertialsystem Σ' mit der speziellen Transformation (18.15):

$$K_0' = \frac{K_0 - \beta K_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad K_1' = \frac{K_1 - \beta K_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad K_2' = K_2, \qquad K_3' = K_3 \ . \tag{19.16}$$

Für die dreier-Komponente gilt demnach

$$\vec{K}_\perp' \ = \ \vec{K}_\perp; \qquad \vec{K}_\parallel' = \gamma(v)\ (\vec{K}_\parallel - \beta K_0) \tag{19.17}$$

Lorentz-Kraft

Wir wollen nun prüfen, ob die für die Praxis äußerst wichtige Lorentz-Kraft der Forderung der Kovarianz genügt, ob also

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \ = \ q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \ = \ \mathbf{K} \tag{19.18}$$

in jedem Inertialsystem als Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Masse m_0, Impuls $m_0(v)\mathbf{v}$ benutzt werden darf. Der nicht-relativistische Ausdruck für die Leistung ist mit (19.18)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \ = \ \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \ = \ q\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \ . \tag{19.19}$$

Wir zeigen jetzt, dass die Gleichungen (19.18), (19.19) in der kompakten Vierervektor-Form geschrieben werden können:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \ = \ \gamma \, \frac{dp_\mu}{dt} \ = \ \frac{q}{c} \, F_\mu{}^\nu \, u_\nu \tag{19.20}$$

mit dem Feldstärketensor $F_\mu{}^\nu = g^{\nu\sigma} F_{\mu\sigma}$ (siehe (18.29)).
(19.20) ist offensichtlich Lorentz-invariant. Es zeigt also, dass die Lorentz-Kraft (19.18), sowie die entsprechende Energiebalance (19.19) Lorentz-invariant sind, obwohl es man aus ihrer Standardform nicht hätte vorhersagen können.
Beweis von (19.20): Mit Hilfe von (18.33) und $c = 1$ haben wir für $\mu = 0$ (zeitliche Komponente):

$$\gamma \frac{dp_0}{dt} = q \ F_0{}^i \ u_i = -q \ F_{0i} \ u_i = q \ \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \ \gamma \ . \tag{19.21}$$

also (19.19). Für $\mu = i$ (räumliche Komponente):

$$\gamma \frac{dp_i}{dt} = q\, F_i{}^0\, u_0 + q\, F_i{}^j\, u_j = q\, F_{i0}\, \gamma - q\, F_{ij}\, v_j\, \gamma = q\, \gamma\, (E_i + \epsilon_{ijk}\, B_k\, v_j) = q\, \gamma\, (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i\ , \tag{19.22}$$

also die Lorentz-Kraft (19.18).

Ergebnis

Wir haben die Grundbegriffe und Grundgleichungen der Newton'schen Mechanik für die relativistische Mechanik erweitert derart, daß

1.) die Newton'sche Mechanik im Grenzfall $v \ll c$ enthalten ist,

2.) die modifizierten Grundgleichungen kovariant bzgl. Lorentz-Transformationen sind.

Dabei blieb die Lorentz-Kraft (19.18) als Bindeglied zwischen Mechanik und Elektrodynamik erhalten. Sie findet ihre experimentelle Bestätigung z.B. im *Funktionieren* moderner Teilchenbeschleuniger. Der Zusammenhang zwischen relativistischer Mechanik und Elektrodynamik ergibt sich zwangsläufig im Rahmen von relativistischen **Eichfeldtheorien** mit **minimaler Kopplung**.

19.4 Übersicht Relativität

Lorentz Skalare, Vierervektoren, Vierertensoren

- Vierervektoren:
  $h_\mu = (h_0, \mathbf{h}) = (h_0, h_x, h_y, h_z)$ Kovariant
  $h^\mu = (h_0, -\mathbf{h}) = (h_0, -h_x, -h_y, -h_z)$ Kontravariant
  Ausnahme: Vierergradient: $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, -\boldsymbol{\nabla}\right) \qquad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \boldsymbol{\nabla}\right)$

- Einstein-Konvention: Gleiche (griechische) Indizes werden von 0 bis 3 summiert, wenn sie auf „verschiedenen Ebenen" stehen
  Stehen zwei gleiche Indizes auf der gleichen Ebene, hat man ein Fehler gemacht.
  Lateinische Indizes $i, j, l, \cdots$ beschreiben nur Raumkomponenten $1, 2, 3$.

- Skalarprodukt (Einstein Konvention):
  $h_\mu p^\mu := \sum_{\mu=0}^{3} h_\mu p^\mu = h_0 p_0 - \mathbf{h} \cdot \mathbf{p}$
  (Man kann auch so machen: $(h_0, \mathbf{h}) \cdot (p_0, -\mathbf{p})$)
  Invariant unter Lorentz Transformationen!

- Vierertensoren:
  $F_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu}, \quad F^{\mu}_{\ \ \nu} \cdots$
  Kontraktion (Einstein Konvention):
  $p_\mu = F_{\mu\nu} h^\nu$ ist ein Kovarianter Vierervektor (und transformiert als solches unter Lorentz Transformationen).

- Indizes „heben oder senken" mit Hilfe des metrischen Tensors $g^{\mu\nu}$:
  $h^\mu = g^{\mu\nu} h_\nu$
  $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$
  Im Euklideischen Raum (spezielle Relativität):

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für} \quad \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für} \quad \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{19.23}$$

Spezielle Vierer-vektoren und -Tensoren

- Zeit-Ort Vierervektor: $x_\mu = (ct, \mathbf{x})$

- Vierergeschwindigkeit: $u_\mu = \dfrac{\partial x_\mu}{\partial \tau} = \gamma\ (c, \mathbf{v}).$ $\qquad (\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2})$
  man hat: $u^\mu u_\mu = c^2$.

- Eigenzeit $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{x}^2/c^2}$.

- Viererdivergenz: $\partial_\mu = \left(\dfrac{1}{c}\partial_t, -\boldsymbol{\nabla}\right)$

Elektrodynamik

- Viererstromdichte: $j_\mu = (c\rho, \mathbf{j})$

- Viererpotential: $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$

- Feldstärkentensor:
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{19.24}$$
  oder auch
  $F_{i,0} = E_i \qquad F_{i,j} = -\epsilon_{ijk} B_k \qquad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$

- Viererimpuls: $p_\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) = m_0 \gamma\ (c, \mathbf{v})$

Gleichungen in Lorentz-Invarianten Form:

- Kontinuitätsgleichung: $0 = \partial^\mu j_\mu = \partial\rho/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}$

- Lorenz-Eichung: $0 = \partial^\mu A_\mu = \dfrac{1}{c}\ \partial\phi/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$

- Wellengleichung: $\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = \dfrac{4\pi}{c} j_\mu$

- Inhomogene Maxwellgleichungen: $\partial^\nu F_{\nu\mu} = \dfrac{4\pi}{c} j_\mu$

- Homogene Maxwellgleichungen: $\partial^\mu F_{\nu\lambda} + \partial^\nu F_{\lambda\mu} + \partial^\lambda F_{\mu\nu} = 0$
  oder: $\partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} = 0$

- Lorentz-Kraft: $\dfrac{\partial p_\mu}{\partial \tau} = \dfrac{q}{c}\; F_{\mu\nu} u^\nu$.

Lorentztransformationen

Lorentztransformation von einem inertialen Bezugsystem Σ in einem anderen Σ' mit relativen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$.

Wir führen ein: $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

- $p'_\mu = L_\mu{}^\nu p_\nu$
- Invarianz des Skalarproduktes fordert $g^{\rho\sigma} \;=\; g^{\mu\nu} L_\mu{}^\rho L_\nu{}^\sigma$
- Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in x-Richtung: $\mathbf{v} = v\; \mathbf{e}_x$

$$h'_0 = \gamma\;\left(h_0 - \beta h_1\right), \qquad h'_1 = \gamma\;\left(h_1 - \beta h_0\right), \qquad h'_2 = h_2, \qquad h'_3 = h_3\;, \tag{19.25}$$

also

$$L_\mu{}^\nu \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.26}$$

- Die inverse Transformation (von $\Sigma' \to \Sigma$), erhält man wie oben (und unten) mit der Substitution $\mathbf{v} \to -\mathbf{v} \qquad (\boldsymbol{\beta} \to -\boldsymbol{\beta})$

Transformation des E und B-Feldes.

- Transformation des Feldstärketensors

$$F'_{\mu\nu} \;=\; L_\mu{}^\lambda L_\nu{}^\rho\, F_{\lambda\rho}\;.$$

- Inertialsystem mit Geschwindigkeit v in x-Richtung:

$$\begin{array}{lll} E'_x &=& E_x, \\ E'_y &=& \gamma\,\big(E_y - \beta B_z\big)\;, \\ E'_z &=& \gamma\,\big(E_z + \beta B_y\big)\;, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} B'_x &=& B_x \\ B'_y &=& \gamma\,\big(B_y + \beta E_z\big) \\ B'_z &=& \gamma\,\big(B_z - \beta E_y\big) \end{array} \quad . \tag{19.27}$$

- für allgemeine Geschwindigkeit $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{B}' \;=\; \gamma\,\mathbf{B} - \frac{\gamma-1}{v^2}\Big(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\Big)\mathbf{v} - \frac{\gamma}{c}\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\Big)$$

$$\mathbf{E}' \;=\; \gamma\,\mathbf{E} - \frac{\gamma-1}{v^2}\Big(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\Big)\mathbf{v} + \frac{\gamma}{c}\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\Big)$$

Anhang A

Mathematik-Wiederholung [1]

A.1 Wiederholung Vektoralgebra

Unter Benutzung von δ_{ij} (Kronecker-Delta) und ϵ_{ijk} (Ricci-Tensor) und der Einstein'schen Summenkonvention **(stets implizit!)** gilt:

A.1.1 Skalarprodukt

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \qquad (\sum_i \cdots \text{implizit!}) \tag{A.1}$$

A.1.2 Vektorprodukt

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k \tag{A.2}$$

wobei $\hat{\mathbf{e}}_k$ der Einheitsvektor in Richtung k ($k = 1, 2, 3$ oder x, y, z) in Kartesischen Koordinaten ist.

Eigenschaften

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \tag{A.3}$$

$$(\text{z.B. } \epsilon_{iik} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0)$$

Die Vertauschungsrelation (A.3) und $\epsilon_{123} = 1$ definieren ϵ_{ijk} vollständig.

A.1.3 Spatprodukt

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} \tag{A.4}$$

(zyklische Permutation, resultiert aus zwei Vertauschungen aus Gl. (A.3))

Eigenschaften

Wir brauchen nur noch

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \epsilon_{mil}\;\epsilon_{jkl} = \delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}\;. \tag{A.5}$$

Hier wurde über den zweimal auftretenden Index l summiert (Einstein Konvention). Daraus kann man weitere wichtige Beziehungen herleiten.

---

[1] Herzlichen Dank an Herrn G. Huhs für das Tippen!

A.2 Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass es sich um einen Differentialoperator handelt (Produktregel!, evtl. Kettenregel; es muss klar sein auf welche Terme er wirkt), kann man ihn als Vektor behandeln.

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \ldots = \hat{\mathbf{e}}_i \; \partial_i \ldots = \partial_i \; \hat{\mathbf{e}}_i \ldots \tag{A.7}$$

(Vorsicht! $\boldsymbol{\nabla}$ braucht stets etwas, worauf er angewendet werden muss!)

Ortskoordinaten werden in der Regel mit $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{r}$ bezeichnet, was auch (x, y, z) oder (x_1, x_2, x_3) entspricht.

A.2.1 Divergenz ⟷ „Skalarprodukt“

Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= \partial_i \; v_i \qquad \text{(Summenkonvention!)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z \end{aligned} \tag{A.8}$$

A.2.2 Rotation ⟷ „Vektorprodukt“

Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} \; \partial_i \; v_j \; \hat{\mathbf{e}}_k \tag{A.9}$$

A.2.3 Gradient ⟷ „Produkt mit einem Skalar“

Gradient eines Skalarfeldes Φ

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \Phi = \hat{\mathbf{e}}_i \; \partial_i \; \Phi \tag{A.10}$$

A.3 „Nabla-Kalkül“

A.3.1 Beispiele

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = ?$$

2 Methoden:

1.

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_k &= \partial_i \, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j \ \epsilon_{ijk} \\
&\ \text{Vorsicht! Ordnung nicht ändern!} \\
&= \partial_i \ A_n \ B_m \ \underbrace{\epsilon_{nmj} \ \epsilon_{ijk}} \\
&\qquad\qquad\qquad = \epsilon_{nmj} \ \epsilon_{kij} \qquad \text{Anwendung von (A.5)} \\
&\qquad\qquad\qquad = \delta_{nk}\delta_{mi} - \delta_{ni}\delta_{mk} \\
&= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) \, \mathbf{A} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) \, \mathbf{B} \\
&\qquad \nwarrow \text{Vorsicht! } \boldsymbol{\nabla} \text{ wirkt auf } \mathbf{A} \textbf{ und } \mathbf{B} \\
&\ \text{Dies kann man umschreiben (Produktregel):} \\
&= \mathbf{A} \, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \mathbf{A} - \mathbf{B} \, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Per Konvention wirkt $\boldsymbol{\nabla}$ auf alles was auf der rechten Seite des Operators steht (falls nicht anders spezifiziert - siehe unten)

2. Benutzung von

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \\
&\ \text{Ersetze } \mathbf{C} \rightarrow \boldsymbol{\nabla}! \\
&\ \text{Aber aufpassen!} \\
&\ \boldsymbol{\nabla} \text{ wirkt auf } \mathbf{A} \text{ und } \mathbf{B} \\
&\ \Rightarrow \text{Markierung worauf } \boldsymbol{\nabla} \text{ wirkt (Produktregel)} \\
\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \boldsymbol{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}) + \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}) \\
&= \overset{\downarrow}{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) \\
&\ \text{Benutzung der Konvention „} \boldsymbol{\nabla} \text{ wirkt nach rechts“} \\
&= \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \mathbf{A}}_{\mathbf{v}} - \underbrace{\mathbf{B} \, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})}_{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \mathbf{B} \\
\text{mit } \ v_i &= B_j \ \partial_j \ A_i \\
u_i &= B_i \ \partial_j \ A_j
\end{aligned}$$

A.3.2 Benutzung der Kettenregel

$f(|\mathbf{r}|)$ ist eine skalare Funktion des Betrags der Ortskoordinate (oft verwendet man die Notation r (ohne Boldface oder Pfeil) für $|\mathbf{r}|$).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\, f(|\mathbf{r}|) &= f'(|\mathbf{r}|)\, \boldsymbol{\nabla}\, |\mathbf{r}| \qquad \text{(Kettenregel)} \\ (\boldsymbol{\nabla}\, |\mathbf{r}|)_i &= \partial_i \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_3}^2} = \frac{r_i}{|\mathbf{r}|} = (\hat{\mathbf{e}}_r)_i \\ \boldsymbol{\nabla}\, |\mathbf{r}| &= \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad \text{Oft verwendete Formel!} \end{aligned} \tag{A.11}$$

also

$$\boldsymbol{\nabla}\, f(|\mathbf{r}|) = f'(|\mathbf{r}|)\, \hat{\mathbf{e}}_r$$

A.3.3 Weitere wichtige Aspekte

1. **Linearität**

$$\begin{aligned} \text{z.B.} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

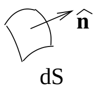
2. Auf **konstante Felder** wirkt $\boldsymbol{\nabla}$ nicht

$$\text{z.B.}\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i\ \Phi = \Phi\ \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{=0} + \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}\ \Phi = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}\ \Phi$$

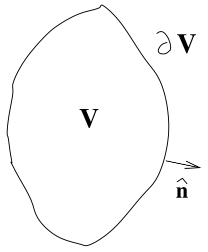
Bei Einheitsvektoren ist zu beachten, dass die Kartesischen Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$, $\hat{\mathbf{e}}_x$, ... konstant sind, $\hat{\mathbf{e}}_r$ allerdings **nicht!**

A.4 Gauß'scher Satz

1. **Flächenelement (orientiert)** (siehe Fig.)



Flächenelement



geschlossene Fläche

$$d\mathbf{S} = dS\ \hat{\mathbf{n}} \tag{A.12}$$

   wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Vektor normal zur Oberfläche ist

2. **Fluss Φ eines Vektorfeldes v** durch eine geschlossene Fläche ∂V, die ein Volumen V abgrenzt (siehe Fig.)

$$\Phi\left(\partial V\right) = \int\limits_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{A.13}$$

3. $=$ **Volumenintegral** der Divergenz von $\mathbf{v}$ in V

$$\Phi\left(\partial V\right) = \int\limits_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}\ d^3r \tag{A.14}$$

A.4.1 Interpretation

div$\mathbf{v}$ $=$ $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ $=$ Fluss (nach außen) des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Grenzfläche eines infinitesimalen Volumens pro Einheitsvolumen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{\delta\Phi\left(\partial\delta V\right)}{\delta V}$$

Bei $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ „entstehen“ zusätzliche Feldlinien: **Quelle**

A.4.2 Anwendung

- In der **Elektrostatik**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

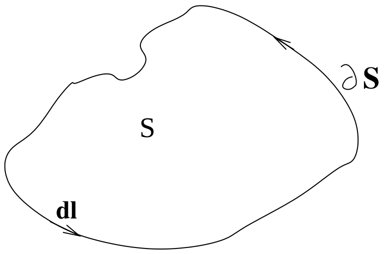
  Ladungsdichte ist die Quelle des elektrischen Feldes

- **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}$$

  Eine Änderung der Ladung entsteht nur durch einen Strom(zu- oder ab-)fluss

A.5 Stokes'scher Satz



1. **Kurve** im dreidimensionalen Raum

$$d\mathbf{l} = \text{orientiertes Kurvenstück}$$

2. **Zirkulation** Z = Linienintegral eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ entlang einer geschlossenen Kurve ∂S, die eine Fläche S abgrenzt (S ist nicht eindeutig durch ∂S definiert!) (siehe Fig.).

   Die Orientierung der Fläche kann nach der „Daumenregel" ermittelt werden.

$$Z\left(\partial S\right) = \int\limits_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \tag{A.15}$$

3. = **Fluss der Rotation** von $\mathbf{v}$ durch S

$$Z\left(\partial S\right) = \int\limits_{S} \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}\right) \cdot d\mathbf{S} \tag{A.16}$$

   Dass der Fluss unabhängig von S bei gleichem ∂S ist, folgt aus $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}\right) = 0$

A.5.1 Interpretation

$\left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \text{rot}\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ = Zirkulation von $\mathbf{v}$ um eine infinitesimale in Richtung $\hat{\mathbf{n}}$ orientierte Fläche pro Einheitsfläche

$$\left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\delta Z\left(\partial \delta S\right)}{\delta S}$$

A.5.2 Anwendung

In der **Elektrostatik**

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

A.6 Bedeutung der Ergebnisse

Warum sind $\boxed{\begin{array}{rcll} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) & = & \mu(\mathbf{r}) & \text{Wirbel von } \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) & = & \rho(\mathbf{r}) & \text{Quellen von } \mathbf{v} \end{array}}$ wichtig?

Fundamentalsatz der Vektoranalysis

μ, ρ bestimmen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ eindeutig!

(Unter bestimmten Voraussetzungen: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$, μ, ρ im ganzen Raum definiert und genügend schnell abfallend)

A.7 Dirac'sche δ-Funktion

A.7.1 Definition

a)

$$\delta(x - x_0) = 0 \qquad x \neq x_0 \tag{A.17}$$

b)

$$\int_a^b f(x)\ \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{wenn } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.18}$$

A.7.2 Ableitungen

1. **Aus Variablentransformation**

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{dg}{dx}\left(x_i\right)\right|}\ \delta\left(x - x_i\right) \tag{A.19}$$

Wobei x_i einfache Nullstellen von $g(x)$ sind

2. **Aus partieller Integration**

$$\int_a^b f(x)\ \delta'\left(x - x_0\right)\ dx = -\int_a^b f'(x)\ \delta\left(x - x_0\right)\ dx \tag{A.20}$$

A.7.3 Multidimensionale δ-Funktion

$$\delta^3\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right) = \delta\left(x - x_0\right)\ \delta\left(y - y_0\right)\ \delta\left(z - z_0\right) \tag{A.21}$$

A.7.4 Fourier-Darstellung

$$\delta\left(x - x_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(x - x_0)} dq \tag{A.22}$$

A.7.5 Wichtiges Ergebnis für die Elektrodynamik

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}=4\pi\ \delta\left(\mathbf{r}\right) \tag{A.23}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} &= \frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r}}_{=3}+\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\\
&= \frac{3}{|\mathbf{r}|^3}+\underbrace{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r}_{|\mathbf{r}|}\frac{-3}{|\mathbf{r}|^4}\\
&= 0 \qquad \text{Gültig für } |\mathbf{r}|\neq 0
\end{aligned}$$

ABER:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial V}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\cdot d\mathbf{S} &= 4\pi \qquad \text{wobei } V \text{ eine Kugel mit Radius } R \text{ ist}\\
\Rightarrow\int\limits_{V}\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}dV &= 4\pi
\end{aligned}$$

woraus (insgesamt) (A.23) folgt