# Analytische Mechanik

E. Schachinger

12. Juli 2005

Diese Vorlesungsunterlage wurde mit Unterstützung von Herrn Univ. Prof. Dr. B. SCHNIZER, welcher mir liebenswürdiger Weise seine gesamten Vorlsungsunterlagen zur Verfügungs gestellt hat, erarbeitet. Weiters danke ich Herrn Univ. Prof. Dr. F. SCHÜRRER für viele wertvolle Hinweise zur Fluid-Mechanik. Schließlich bin ich auch Frau Ingrid REIWEGER zu Dank verpflichtet. Sie hat sich der Mühe unterzogen hat diese Vorlesungsunterlage kritisch durchzuarbeiten.

# Inhaltsverzeichnis

# Literatur


1. T. Fliessbach
   *Mechanik*
   Lehrbuch zur Theoretischen Physik I, 2. Aufl.
   Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1996
   ISBN 3-86025-686-6

2. F. Scheck
   *Mechanik*
   4. Auflage
   Springer-Verlag, Heidelberg 1994
   ISBN 3-540-56781-X

3. R.M. Dreizler und C.S. Lüdde
   *Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik*
   Springer-Verlag, Heidelberg 2003
   ISBN 3-540-44366-5

4. R.J. Jelitto
   *Theoretische Physik 1: Mechanik I*
   Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1982
   ISBN 3-400-00491-X

5. R.J. Jelitto
   *Theoretische Physik 2: Mechanik II*
   Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1983
   ISBN 3-400-00492-8

6. H. Iro
   *Klassische Mechanik*
   3. Auflage
   Universitätsverlag Rudolf Trauner, Linz 1993
   ISBN 3-85320-638-7

7. D.J. Acheson
   *Elementary Fluid Dynamics*

Clarendon Press, Oxford 1990
ISBN 0-19-859660-0 (pbk.)

8. A.J. Chorin und J.E. Marsden
*A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*
Springer-Verlag, Heidelberg 1979

# Kapitel 1

# Einleitung

Die Mechanik ist nicht nur das älteste Teilgebiet der Physik, sie stellt bis heute die Grundlage für die ganze theoretische Physik dar. So ist etwa die Quantenmechanik ohne klassische Mechanik kaum verständlich, vielleicht nicht einmal formulierbar. Aber auch jede klassische Feldphysik, wie etwa die Elektrodynamik, baut auf dem von der Mechanik vorgegebenen Fundament auf.

Die analytische Mechanik als Teil der theoretischen Physik kann auch als Fallbeispiel für die Beziehungen zwischen den drei Disziplinen *Experimentalphysik*, *theoretische Physik* und *Mathematik* herangezogen werden. Die *Experimentalphysik* ist eine *Erfahrungswissenschaft.* Sie beobachtet die Phänomene in der Natur und befragt diese durch systematische Experimente. Dabei werden empirische Gesetzmäßigkeiten ermittelt. Zunächst werden die *physikalischen Größen* (z.B. Länge, Geschwindigkeit, Beschleunigung, allgemein *Observable* genannt) definiert. Dies geschieht durch Angabe der Manipulationen und Rechnungen, die in einem konkreten Fall ausgeführt werden sollen, um den Wert der betreffenden Größe zu erhalten (*operationelle Definition*). Ist eine Anzahl von physikalischen Größen eingeführt worden (etwa für den Erfahrungsbereich der Geometrie die Größen 'Länge' und 'Winkel'), dann kann es sein, daß unter bestimmten Bedingungen stets eine gesetzmäßige Beziehung, das *empirisches Gesetz*, zwischen den Maßzahlen gewisser Größen angenähert besteht. Z.B.: in der Geometrie besteht in einem rechtwinkligen Dreieck zwischen den anliegenden Seiten (= Katheten) $a$, $b$ und der Hypothenuse $c$ die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$.

Im Gegensatz dazu ist die *Mathematik* eine *Geisteswissenschaft.* Ihr Werkzeug ist die Phantasie des Mathematikers, der spekulativ logische Strukturen ersinnt, etwa das System der Zahlen oder die euklidische Geometrie. Er wird dabei oft von realen Erfahrungen und empirischen Zusammenhängen geleitet [man denke etwa an die Schaffung der Geometrie (= Erdmessung) in Zusammenhang mit der Feldmeßkunst]. Im Prinzip werden die *mathematischen*

*Begriffe* und die *mathematischen Axiome* (letztere geben Beziehungen zwischen Begriffen an, welche dadurch erst implizit definiert werden) willkürlich, wenn auch zweckmäßig, vor allem widerspruchsfrei, gesetzt. Durch logische Analyse und Deduktion (wobei die schöpferische Phantasie ebenfalls beteiligt ist) schafft der Mathematiker *mathematische Theorien* (= logische Strukturen = Zusammenhänge der mathematischen Begriffe).

Die *theoretische Physik* versucht nun einen Zusammenhang (Abbildung) mathematischer Begriffe und Theorien mit den physikalischen Größen herzustellen, so daß die Zusammenhänge der empirischen Gesetze in den physikalischen Größen in den Zusammenhängen (logischen Strukturen) der zugeordneten mathematischen Begriffe widergespiegelt werden. Bewährt sich eine solche Zuordnung, indem sie neue Aussagen oder Voraussagen über den Zusammenhang und den Ablauf der empirischen Größen gestattet, wird sie zur *physikalischen Theorie*. Die physikalischen Größen und der zugeordnete mathematische Begriff verschmelzen zum *physikalischen Begriff*.

Die einfachen Grundannahmen über die Natur der Phänomene, die aus dem Erfahrungsmaterial abstrahiert worden sind, sind die *physikalischen Axiome*. Die *physikalischen Gesetze* können dann mittels der mathematischen Theorie aus den physikalischen Axiomen deduziert werden. Wurde eine Theorie in einem bestimmten Bereich nicht falsifiziert (entweder durch Beobachtung oder gezieltes Experiment) und sind auch ihre Gültigkeitsgrenzen, außerhalb derer sie falsifiziert wurde, bekannt, so spricht man von einer *abgeschlossenen Theorie*.

Die analytische Mechanik ist eine solch abgeschlossene Theorie. Sie gilt für die Beschreibung von Bewegungen, wenn die Massen und Längen nicht zu klein sind (dort gilt dann die Quantentheorie) und auch nicht zu groß sind (dann könnte die allgemeine Relativitätstheorie gelten). Weiters müssen die Geschwindigkeiten klein im Vergleich zur Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0$ sein, da sonst die spezielle Relativitätstheorie anzuwenden ist.

Die analytische Mechanik verwendet vor allem die Begriffe der Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft. Die zugehörigen physikalischen Axiome sind die NEWTON*schen Axiome*. Die verwendete mathematische Theorie ist die der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die physikalischen Gesetze deduziert man aus den Differentialgleichungen und sie beschreiben die Bewegungen und deren Gesetzmäßigkeiten. Das Ziel der Mechanik ist die *Beschreibung der Bewegungen und Verformungen von Körpern*. Diese Beschreibung soll so geartet sein, daß sie Vorhersagen über das Verhalten von Körpern ermöglicht. Sie hat also das Auffinden von Gesetzen zum Ziel; dies sind Aussagen, die das Auffinden zeitlich unveränderlicher Eigenschaften mechanischer Vorgänge behaupten. Daß es solche Eigenschaften gibt, ist nicht selbstverständlich, es wird aber gezeigt werden, daß im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit solche Eigenschaften vorhanden sind.

Diese beziehen sich allerdings meist nicht auf unmittelbare Wahrnehmungen bezüglich der mechanischen Vorgänge, sondern auf durch Abstraktion gewonnene Merkmale derselben. Beispiele solcher unveränderlicher Eigenschaften sind die Erhaltung der Energie oder des Drehimpulses.

Die Beobachtungen mechanischer Vorgänge sind zunächst einmal Sinneswahrnehmungen. Da wir aber zeitlich und räumlich unveränderliche Gesetze auffinden wollen, also Eigenschaften von ganzen Klassen mechanischer Vorgänge, müssen die einzelnen Beobachtungen aufgezeichnet und verglichen werden können. Man muß also den Beobachtungen zu ihrer Beschreibung mitteilbare Größen zuordnen. Man nimmt für die Beschreibung insbesondere mathematische Begriffe, die sich für eine mitteilbare Beschreibung besonders gut eignen. Diese Beschreibung muß vor allem in der Lage sein Ereignisse zu erfassen, die an verschiedenen Punkten des Raumes zu verschiedenen Zeiten vor sich gehen. Als mathematisches Modell zur Beschreibung des Raumes wird eine Geometrie verwendet - in der klassischen Mechanik die euklidische Geometrie. Da die euklidische Geometrie eine Struktur zum Gegenstand hat, deren Elemente Punkte, Geraden und Ebenen sind mit ihren Beziehungen untereinander (Enthaltensein, Schneiden, Senkrechtstehen, usw.), muß man eine Zuordnung dieser abstrakten Begriffe zu wirklichen Dingen und ihrer abstrakten Beziehungen zu wirklichen Beziehungen dieser Dinge herstellen, so daß diese wirklichen Dinge innerhalb der durch die Wahrnehmungsgenauigkeit vorgegebenen Grenzen, die Struktur der euklidischen Geometrie widerspiegeln. Insbesonders wollen wir Gerade als die Wege von Lichtstrahlen definieren, Punkte und Ebenen durch einander schneidende Geraden. Dann werden die Punkte des Raumes mit Hilfe eines Koordinatensystems geordneten Tripeln reeller Zahlen zugeordnet.

Um nun auch die Zeitordnungsereignisse durch Zahlen beschreiben zu können, baut man ein Gerät, das eine Aufeinanderfolge (geordnete Menge) von Ereignissen liefert, welchen man reelle Zahlen zuordnen kann. Dieses Gerät, versehen mit einer Vorrichtung, welche die den Ereignissen zugeordnete reelle Zahl, die Zeit, anzeigt, heißt *Uhr*. Um die Zeit eines beobachtbaren Ereignisses festzulegen, bringt man die Uhr an den Ort des Ereignisses und liest zum Zeitpunkt des Ereignisses die von der Uhr angezeigte Zeit ab.

Durch diese Vorgangsweise sind jedem Ereignis, das an einem bestimmten Punkt des Raumes zu einer bestimmten Zeit stattfindet, drei Raum- und eine Zeitkoordinate zur raumzeitlichen Beschreibung zugeordnet.