Kapitel 2

Elementare NEWTONsche Mechanik

2.1 Die NEWTONschen Gesetze

Wir stellen die NEWTONschen Axiome in ihrer ursprünglichen Formulierung an den Anfang:

Axiom 2.1 *Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird seinen Bewegungszustand zu ändern.*

Axiom 2.2 *Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht entlang der Richtung derjenigen Geraden, entlang welcher die Kraft wirkt.*

Axiom 2.3 *Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind gleich und von entgegengesetzter Richtung.*

Diese drei fundamentalen Aussagen können erst richtig verstanden werden, wenn man die Begriffe *Körper*, *Bewegungszustand*, *bewegende Kraft*, usw. geklärt hat.

Als *Körper* verstehen wir zunächst *Massenpunkte*, also punktförmige Teilchen der Masse m. Diese sind Objekte, welche keine räumliche Ausdehnung haben. Es ist dies sicher nur eine Idealisierung, welche aber, wie noch zu zeigen sein wird, durchaus ihre Berechtigung hat.

Unter *Bewegung*, bzw. *Bewegungszustand* verstehen wir die *Bahnkurve* (*Trajektorie*) $\mathbf{r}(t)$ des Körpers im $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\mathbf{e}_i, \tag{2.1}$$

mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ in die Koordinatenrichtungen und $x_i(t)$ der zugehörigen Komponente des Vektors $\mathbf{r}(t)$ in Richtung der i-ten Koordinate. $\mathbf{r}(t)$ beschreibt den momentanen Ort des Körpers und t, die Zeit, ist der Bahnparameter.

Unter dem Zustand der *Ruhe* verstehen wir, daß $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ für alle Zeiten t gilt. Eine *gleichförmig, geradlinige Bewegung* ist eine solche, welche mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden abläuft. Man muß sich dabei im klaren sein, daß Bewegungen immer als *relative* Bewegungen von (mindestens zwei) physikalischen Systemen zu verstehen sind. Nur die Angabe von relativen Positionen, Teilchen A zu Teilchen B, oder Teilchen A zu Beobachter, zu jedem festen Zeitpunkt ist physikalisch sinnvoll. (Was *Geschwindigkeit* ist, ist noch zu definieren.)

Aufgrund der experimentellen Erfahrung wollen wir annehmen, daß der Raum, in welchem die physikalische Bewegung eines Masspunkts (ohne Zwangsbedingungen) stattfindet, *homogen* und *isotrop* ist, und daß er die Struktur eines dreidimensionalen EUKLIDischen (ebenen) Raumes $\mathbb{E}^3$ hat. Homogen bedeutet dabei, daß kein Raumpunkt ausgezeichnet ist, und isotrop bedeutet, daß es keine bevorzugte Richtung gibt. Aufgrund dieser Festlegungen ist der Bewegungsraum des Teilchens ein affiner Raum: die Angabe einer einzigen Position $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{E}^3$ eines Teilchens zur Zeit t ist physikalisch nicht sinnvoll, wohl aber die Angabe dieses $\mathbf{x}(t)$ relativ zur Position $\mathbf{y}(t)$ eines Beobachters zur selben Zeit t. Versieht man den affinen Raum mit einem Ursprung, etwa durch Vorgabe eines ruhenden Beobachters, so erhält man den dreidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, für welchen man Basissysteme auf vielerlei Arten wählen kann, und auf welchem Skalar- und Vektorprodukt zweier Vektoren wie gewohnt definiert ist.

Die Zeit spielt in der nicht relativistischen Physik eine Sonderrolle. Sie scheint universell zu sein, sie läuft unabhängig vom physikalischen Geschehen ab. Man erfaßt diesen Sachverhalt derart, daß man dem sich beliebig bewegenden Teilchen die *Eigenzeit* τ zuordnet. Ein Beobachter B mißt dann auf seiner Uhr die Zeit

$$t^{(B)} = \alpha^{(B)}\tau + \beta^{(B)}, \tag{2.2}$$

mit $\alpha^{(B)}$ einer positiven Konstanten, welche festlegt, in welchen relativen Einheiten B die Zeit mißt, während $\beta^{(B)}$ angibt, wie B seinen Zeitnullpunkt relativ zur Eigenzeit gewählt hat. Man kann (2.2) auch als

$$\frac{d^2 t^{(B)}}{d\tau^2} = 0 \tag{2.3}$$

schreiben. Die Zeit wird also durch einen eindimensionalen affinen Raum beschrieben, also nach Wahl des Ursprungs durch die reelle Gerade $\mathbb{R}_t$.

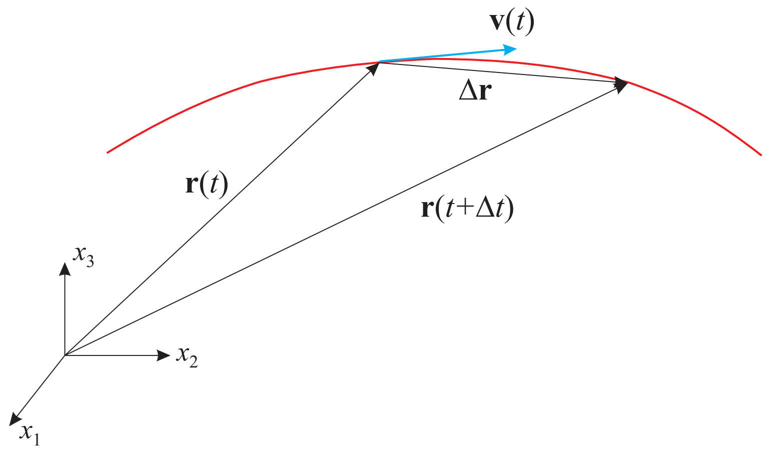


Abbildung 2.1: Bahn des Massepunktes; Definition der Geschwindigkeit.

2.2 Die Teilchenbahn

Wir behandeln in diesem Abschnitt die *Kinetmatik*, also die Bewegung des Massenpunktes. Dazu wird zunächst die *Lage* des Teilchens zur Zeit t durch den Vektor $\mathbf{r}(t)$ entprechend (2.1) angegeben. Die Komponenten $x_i(t)$ sind im allgemeinen stetige Funktionen der Zeit.

Betrachtet man zwei (räumlich und zeitlich) nahe beieinanderliegende Lagen des Massenpunktes (siehe Abb. 2.1), dann erhält man daraus durch Grenzübergang die *Geschwindigkeit*:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} := \dot{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \, \dot{x}_i(t). \tag{2.4}$$

Die Erfahrung zeigt, daß die Komponenten $\dot{x}_i(t)$ stetige Funktionen der Zeit sind. Man kann also zu jedem Zeitpunkt die Lage und die Geschwindigkeit eines Massenpunktes angeben.

Der Absolutbetrag der Geschwindigkeit ist

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2} = \frac{ds}{dt}, \tag{2.5}$$

mit ds dem Differential der Bogenlänge. Man kann (2.5) auch physikalisch interpretieren: der Betrag der Geschwindigkeit ist gleich der Länge ds des durchlaufenen Bahnstücks dividiert durch das Zeitintervall dt, das benötigt wurde um ds zu durchlaufen.

Die *Beschleunigung* erhält man wieder durch Grenzübergang, wenn man zwei nahe beieinanderliegende Punkte und deren Geschwindigkeiten betrach-

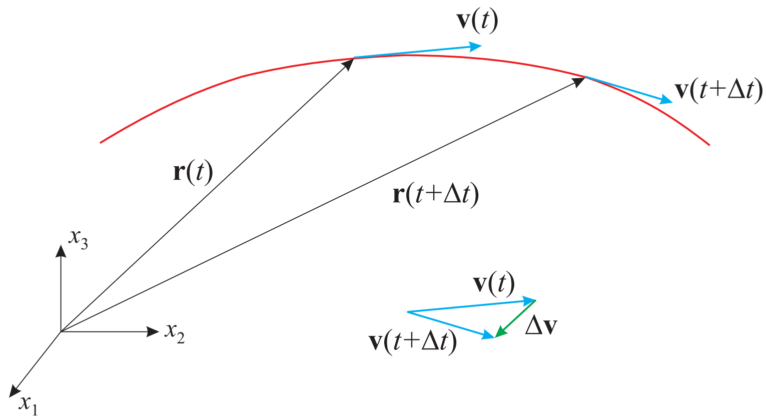


Abbildung 2.2: Änderung der Geschwindigkeit des Massenpunktes; Definition der Beschleunigung.

tet (siehe Abb. 2.2):

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \, \ddot{x}_i(t). \tag{2.6}$$

Die Beschleunigung wird häufig in zwei Komponenten zerlegt, eine in Richtung der Geschwindigkeit (*Tangentialbeschleunigung*), die andere normal

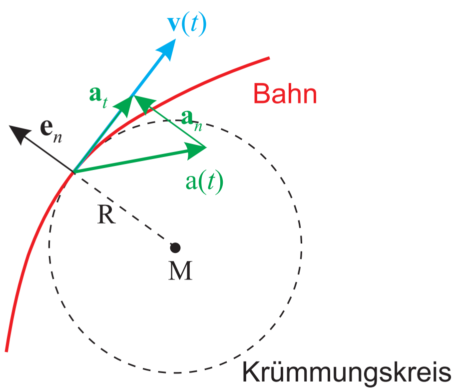


Abbildung 2.3: Tangential- und Normalbeschleunigung $\mathbf{a}_t$ und $\mathbf{a}_n$; Krümmungskreis.

zur Geschwindigkeit (*Normalbeschleunigung*) (siehe Abb. 2.3), also

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_n \, a_n + \mathbf{e}_t \, a_t, \tag{2.7}$$

mit

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2(t)} \tag{2.8}$$

und

$$a_n = -\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{v^2}{R}, \tag{2.9}$$

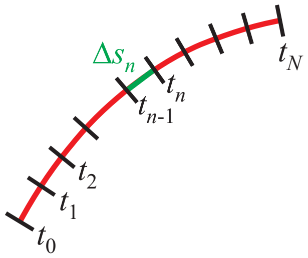
was natürlich noch zu beweisen ist. R ist dabei der Radius des Krümmungskreises (Abb. 2.3). Zum Beweis verwenden wir zunächst:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \frac{dx_i}{ds}\frac{ds}{dt} \\
\ddot{x}_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2x_i}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx_i}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \\
&= \mathbf{e}_n\, a_n + \mathbf{e}_t\, a_t. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Wir müssen nun den Begriff der *Bogenlänge* s genauer definieren. Es wird dabei die Raumkurve nach einem Parameter t parametrisiert, also durch $\mathbf{r}(t)$ beschrieben. Dazu wird die Kurve, wie nebenstehend angedeutet, in N kleine Teile geteilt. $\dot{x}_i$ ist dann die Ableitung der i-ten Komponente von $\mathbf{r}$ nach dem Parameter t. Jedes dieser Bogenstücke wird durch eine gerade Strecke approximiert und es gilt dann:



$$\Delta s_n = \sqrt{[\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}[x_i(t_n) - x_i(t_{n-1})]^2}.$$

Wir wenden nun auf jede Differenz den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an und erhalten

$$x_i(t_n) - x_i(t_{n-1}) = \Delta t_n \dot{x}_i(t_{ni}), \quad \Delta t_n = t_n - t_{n-1},$$

mit $t_{ni}, i = 1,2,3$ aus dem Intervall Δt_n. Daraus ergibt sich

$$\Delta s_n = \Delta t_n \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2(t_{ni})}.$$

Man macht nun den Grenzübergang

$$\begin{aligned}
\Delta t_n \to 0 \quad &\Longrightarrow \quad t_{ni} \to t \\
ds \quad &= \quad dt\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2} = dt\,\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Voraussetzung ist natürlich, daß die Trajektorie genügend glatt ist, damit der Grenzübergang zulässig und sinnvoll ist. Schließlich ist die Bogenlänge durch

$$s = \int_{t_0}^{t_N} ds = \int_{t_0}^{t_N} dt\, \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2} \tag{2.12}$$

gegeben.

Im nächsten Schritt kann man den *Tangenten-* und den *Normalvektor*, $\mathbf{e}_t$ und $\mathbf{e}_n$, einführen. Dazu wollen wir die Bahn mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen und die Bahn mit der Bogenlänge s parametrisieren. Der Tangentialvektor $\mathbf{e}_t$ sei ein Einheitsvektor und hat somit die Länge 1 und beschreibt die Veränderung von $\mathbf{r}(s)$ beim Durchlauf, also:

$$\mathbf{e}_t := \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \overset{(2.11)}{=} \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2}} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i\, \dot{x}_i(t), \tag{2.13}$$

mit

$$|\mathbf{e}_t| = 1.$$

Wir sehen, daß $\mathbf{e}_t$ parallel dem Geschwindigkeitsvektor ist, wie Gleichung (2.4) zeigt. Damit ist $\mathbf{v}$ ebenfalls ein Tangentialvektor an die Teilchenbahn. Nach dieser Vorarbeit können wir den ersten Term der Gleichung (2.10) identifizieren:

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = a_t\, \mathbf{e}_t; \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

wie in Gleichung (2.8) angegeben.

Um den Normalvektor $\mathbf{e}_n$, den Einheitsvektor senkrecht auf $\mathbf{e}_t$ aufzufinden untersuchen wir die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Bogenlänge

$$\mathbf{e}_t^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2\mathbf{e}_t}{ds^2} = 0,$$

oder

$$2\mathbf{e}_t\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = 2\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0,$$

mit der Folgerung:

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \perp \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \tag{2.14}$$

Die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Bogenlänge steht somit senkrecht auf $\mathbf{e}_t$ und ist damit dem Normalenvektor proportional. Interessanter Weise ist $d^2\mathbf{r}/ds^2 = 0$, wenn die Bahn eine Gerade ist:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{c}, \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r} = s\mathbf{c} + \mathbf{b}. \tag{2.15}$$

Dies ist die Gleichung einer mit s parametrisierten Geraden.

Bleibt noch als letzter Begriff die *Krümmung* der Bahn einzuführen. Das Ergebnis (2.15) legt es nahe als Maß κ für die Krümmung einer Kurve folgende Definition einzuführen:

$$\kappa = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \frac{1}{R}, \tag{2.16}$$

mit R dem Krümmungsradius (siehe Abb. 2.3). Damit ergibt sich:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = -\frac{1}{R}\mathbf{e}_n. \tag{2.17}$$

Das negative Vorzeichen berücksichtigt, daß der Normalvektor $\mathbf{e}_n$ immer ins Äußere der Kurve weist.

Anhand all dieser Definitionen entlang einer Geraden können wir nun den zweiten Term in (2.10) identifizieren:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \overset{(2.17)}{=} -\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{e}_n, \quad \Longrightarrow \quad a_n = -\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

2.3 Gleichförmig geradlinige Bewegung; Inertialsystem

Definition 2.1 *Eine Bewegung heißt dann* gleichförmig geradlinig, *wenn keine Beschleunigungen auftreten, also* $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ *für alle Zeiten* t. *Damit ist dann die Geschwindigkeit* $\mathbf{v}$ *konstant.*

Die Bahnkurve des Massenpunktes wird vom linearen, homogenen System von Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} \tag{2.18}$$

beschrieben. Die Bewegung als spezielle Lösung von (2.18) wird aber erst durch Angabe der *Randbedingungen* $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, also durch Angabe des Ausgangspunktes $\mathbf{r}_0$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ eindeutig bestimmt. Man spricht von einem *Anfangswertproblem*. Die allgemeine Lösung von (2.18) lautet ja

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{b}, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{c}.$$

Damit ergibt sich $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \mathbf{c}$ und $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{b}$. Wir erhalten die Bahn

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t. \tag{2.19}$$

$\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}_0$ sind somit frei wählbare Integrationskonstanten.

Axiom 2.1 sagt aus, daß (2.19) mit beliebig vorgebbaren Konstanten $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}_0$ der charakteristische Bewegungszustand eines mechanischen Systems ist, wenn auf dieses keine Kräfte einwirken. Diese Aussage setzt aber voraus, daß wir bereits ein bestimmtes Bezugssystem, oder eine Klasse von Bezugssystemen $\mathcal{K}_0$ ausgewählt haben, in welchen sich die kräftefreie Bewegung durch die Differentialgleichung (2.18) beschreiben läßt.

Definition 2.2 *Bezugssysteme, in denen Axiom 2.1 im kräftefreien Fall die Form* $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ *hat, heißen* Inertialsysteme.

Wählt man nun ein Koordinatensystem zur Beschreibung der Bewegung des Körpers, so gibt es solche, in denen das erste und zweite NEWTONsche Gesetz die Form

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F} \tag{2.20}$$

haben, wobei $\mathbf{F}$ die Resultierende der auf den Körper wirkenden Kräfte ist. In *Inertialsystemen* haben die NEWTONschen Axiome die einfache Form (2.20). Verwendet man hingegen Koordinatensysteme, welche selbst beschleunigt sind, so wird die Grundgleichung eine wesentlich kompliziertere Form annehmen.

Inertialsysteme sind besonders wichtig, weil sie die Gruppe jener Transformationen von Raum und Zeit auszeichnen, unter denen die NEWTONschen Gesetze in ihrer formalen Form invariant sind.

Satz 2.1 *Es sei $\mathcal{K}$ ein Inertialsystem, so ist jedes relativ zu $\mathcal{K}$ mit* konstanter *Geschwindigkeit* $\mathbf{v}$ *bewegtes Koordinatensystem $\mathcal{K}'$ ebenfalls ein Inertialssystem. (Siehe auch Abb. 2.4.)*

Der Beweis ist leicht zu führen: der Ortsvektor $\mathbf{r}(t) \in \mathcal{K}$ hat in $\mathcal{K}'$ die Darstellung $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}t$. Da $\mathbf{v}$ eine konstante Geschwindigkeit ist, so folgt $\ddot{\mathbf{r}}'(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ und damit sind beide Systeme Inertialsysteme. (Dies wird in Abschnitt 2.9.1 noch ausführlicher behandelt.)

2.4 Impuls und Kraft

Den Begriff *Bewegung* in Axiom 2.2 identifizieren wir mit dem *Impuls*

$$\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t) = m\mathbf{v}(t). \tag{2.21}$$

Der Impuls ist also das Produkt aus *träger* Masse m und der momentanen Geschwindigkeit. Nehmen wir nun für die *Änderung der Bewegung* die zeitliche Ableitung des Impulses, so folgt für Axiom 2.2

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t), \tag{2.22}$$

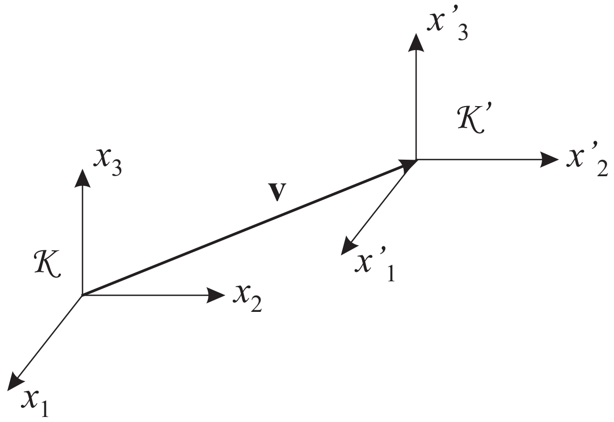


Abbildung 2.4: Ist $\mathcal{K}$ ein Inertialsystem, so ist auch jedes dazu achsenparallele System $\mathcal{K}'$, das sich relativ zum ersten mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, ein solches.

oder falls die Masse vom Bewegungszustand unabhängig ist:

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t). \tag{2.23}$$

Die Gleichungen (2.22) und (2.23) werden auch die NEWTON*schen Bewegungsgleichungen* genannt. Sie beschreiben die *Dynamik* des Massenpunktes unter Einwirkung von Kräften. Die *Kraft* $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ ist dabei als vorgegeben zu betrachten; genau handelt es sich dabei um ein *Kraftfeld*, also eine vektorwertige Funktion des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$. Kräfte können natürlich auch geschwindigkeitsabhängig sein, wie etwa die Reibungskraft. Die Kraftfelder sind also Vektorfelder und dies bedeutet, daß verschiedene, am selben Punkt angreifende und zur selben Zeit wirkende Kräfte vektoriell zu einer Resultierenden addiert werden.

Axiom 2.2 definiert Masse und Kraft als Meßgrößen. Zunächst gehen wir davon aus, daß Länge und Zeit bereits definiert sind. Damit ist die Beschleunigung $\mathbf{a}$ eine meßbare Größe.

Wir betrachten nun eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft $\mathbf{F}$ und zwei Körper 1 und 2. Wir messen die Beschleunigungen $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, welche diese beiden Körper unter dem Einfluß dieser Kraft erleiden. Nach (2.23) gilt:

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}, \quad m_1\,|\mathbf{a}_1| = m_2\,|\mathbf{a}_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}.$$

Damit ist nun m_1/m_2 als Meßgröße festgelegt. Wir definieren nun willkürlich die Masse eines bestimmten Körpers als 1 Masseneinheit. [Der Name der Masseneinheit (kg) ist ebenso willkürlich wie die Wahl des Referenzkörpers.] Durch diese Festlegung und durch die Meßvorschrift für m_1/m_2 ist die Masse jedes Körpers nunmehr als Meßgröße definiert.

Nachdem nun Masse und Beschleunigung als Meßgrößen eingeführt sind, legt (2.23) die Kraft als Meßgröße fest. Die Einheit der Kraft ergibt sich als

$$1\mathrm{kg}\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-2} = 1\,\mathrm{N(ewton)}.$$

Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist die Masse ein Maß für den Widerstand, den ein Körper einer Änderung der Bewegung entgegensetzt, deshalb *träge Masse*.

Ein anderer Begriff ist die *schwere Masse*, welche proportional zur Stärke der Gravitationskraft auf einen Körper ist. Die schwere Masse kann also experimentell durch eine Kraftmessung festgelegt werden. In dieser Form ist die schwere Masse eine Eigenschaft des Körpers und sie könnte eine von der trägen Masse des Körpers unabhängige Eigenschaft sein. Experimentell stellt sich aber heraus, daß das Verhältnis von träger zu schwerer Masse stets gleich groß ist. Man führt daher keine neue Meßgröße 'schwere Masse' ein und verzichtet auf eine Unterscheidung.

In Axiom 2.3 kommt der Begriff *Wirkung* für die (innere) Kraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, vor. Wir betrachten dazu ein System von endlich vielen Massenpunkten, die die Massen m_i und die Ortsvektoren $\mathbf{r}_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ haben mögen. Ist $\mathbf{F}_{ik}$ die Kraft, welche vom Teilchen i auf das Teilchen k ausgeübt wird, so gilt $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$. Solche Kräfte nennt man die *inneren Kräfte* eines n-Teilchensystems. (Siehe detailierte Behandlung in Abschnitt 2.8.)

Im Schwerefeld gilt insbesonders

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \tag{2.24}$$

mit $\mathbf{g}$ einem bekannten Vektor, dem Vektor der Gravitationsbeschleunigung.

2.5 Erhaltungssätze

Erhaltungssätze spielen eine wichtige Rolle in der Physik; sie erleichtern oder ermöglichen überhaupt erst die Lösung von Problemen. Erhaltungssätze sind auch stets der Hinweis auf wesentliche innere Symmetrien eines physikalischen Problems.

2.5.1 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Axiom 2.1 besagt, daß der Massenpunkt bei Fehlen von Kräften eine gleichförmige Bewegung entlang einer Geraden ausführt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \overset{(2.22)}{\rightarrow} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{konst}. \tag{2.25}$$

Es gilt also *Impulserhaltung* im kraftfreien Feld.

Wir multiplizieren nun Gl. (2.23) vektoriell mit $\mathbf{r}(t)$:

$$m\,\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}.$$

Es gilt nun

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}, \tag{2.26}$$

und damit folgt:

$$\frac{d}{dt} m\left(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{2.27}$$

Durch das Vektorprodukt mit $\mathbf{r}$ wurde aus der Bewegungsgleichung ein Drehanteil herausprojeziert. Man definiert nun mit

$$\boldsymbol{\ell}(t) = m\left(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) \tag{2.28}$$

den *Drehimpuls*, ein Maß für die Drehbewegung der Masse m. Weiters führt man mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.29}$$

das *Drehmoment* ein, ein Maß für die Drehwirkung der Kraft $\mathbf{F}$. Aus den Defintionen (2.28) und (2.29) folgt aber auch, daß sich die so definierten Größen auf den Ursprung des erwählten Inertialsystems beziehen und sich daher, im Gegensatz zu $\mathbf{p}$ und $\mathbf{F}$ bei einer Verschiebung des Inertialsystems ändern.

Wir erhalten nun für (2.27) die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls:

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{M}. \tag{2.30}$$

Weiters folgt wegen

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\ell} = \mathbf{konst}$$

die *Drehimpulserhaltung*. Es folgt weiter, daß für $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ $\mathbf{M}$ dann und nur dann ein Nullvektor ist, wenn $\mathbf{F}$ parallel $\mathbf{r}$ ist. Die Kraft muß also in Richtung zum Zentrum des Bezugssystems wirken (oder entgegengesetzt dazu), man spricht von einer *Zentralkraft*.

Für ein Teilchen, welches sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft bewegt bleibt also der Drehimpuls erhalten. Damit kann man eine Achse des Inertialsystems parallel zu $\boldsymbol{\ell}$ ausrichten, etwa parallel zur x_3-Achse

$$\boldsymbol{\ell} = \ell\,\mathbf{e}_3 = m\left(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right), \tag{2.31}$$

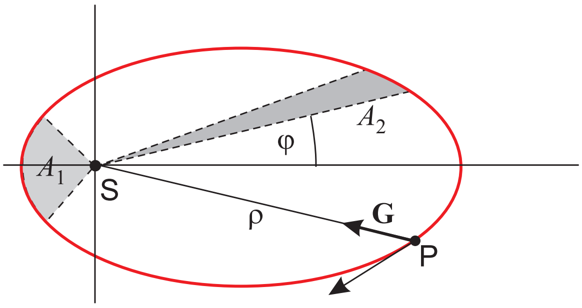


Abbildung 2.5: Der Planet P umrundet den Stern S (= Ursprung des Inertialsystems) unter dem Einluß der Gravitationskraft $\mathbf{G}$, einer Zentralkraft. Wegen $\ell = m\,\rho^2\,\dot{\varphi} = \text{konst}$ ist $\dot{\varphi}$ umso größer je kleiner ρ ist. In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl $\overline{\mathrm{SP}}$ gleiche Flächen, $A_1 = A_2$.

mit $\ell = \text{konst}$. Damit liegen aber $\mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}$ in einer Ebene senkrecht zu x_3 und die Bewegung ist *eben*. Wir verwenden nun Polarkoordinaten in der Bewegungsebene, also $x_1 = x_1(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$, $x_2 = x_2(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$, so folgt (siehe Anhang A, Abschnitt A.1.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2 \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial x_1}{\partial\varphi}d\varphi\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}d\varphi\right)\mathbf{e}_2 \\ &= d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann als Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 = \rho(t)\mathbf{e}_\rho$$

und

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi. \tag{2.32}$$

Es folgt dann für (2.31)

$$\boldsymbol{\ell} = m\,(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) = m\,[\rho\,\mathbf{e}_\rho \times (\dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi)]\,,$$

und weiter

$$\ell = m\,\rho^2\,\dot{\varphi} \quad\rightarrow\quad \frac{\ell}{m} = \rho^2\,\dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{2.33}$$

Dies ist der sogenannte *Flächensatz*: Die vom Fahrstrahl im Zeitintervall dt überstrichene Fläche $dA = \rho^2\,d\varphi/2$ ist konstant (siehe auch Abb. 2.5).

2.5.2 Energieerhaltung

Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $\mathbf{F}$ von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Wir bezeichnen dann das Skalarprodukt

$$dW = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} \tag{2.34}$$

als die *Arbeit* dW, welche die Kraft $\mathbf{F}$ am Teilchen leistet. Die entlang des Weges $\mathcal{C}$ geleistete Arbeit W ist dann durch

$$W = \int_{\mathcal{C}} dW = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r}'\, \mathbf{F}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_2 \in \mathcal{C} \tag{2.35}$$

gegeben. $d\mathbf{r}'$ ist das entlang $\mathcal{C}$ gerichtete Wegelement. Die Arbeit hängt somit vom Anfangs- und Endpunkt, aber auch vom Weg $\mathcal{C}$ zwischen diesen Punkten ab. Die Arbeit ist aber auch gleich der *Energie*, die vom Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ auf das Teilchen übertragen wird. Entsprechend (2.35) wird die Arbeit in

$$\mathrm{N\,m} = \mathrm{J(oule)} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}},$$

also in Energieeinheiten angegeben.

Die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit wird *Leistung* genannt:

$$N = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F}\, d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\, \dot{\mathbf{r}}. \tag{2.36}$$

Entsprechend (2.36) wird die Leistung in

$$\mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{W(att)}$$

angegeben.

Wir multiplizieren nun Gleichung (2.23) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}$

$$m\, \ddot{\mathbf{r}}\, \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\, \dot{\mathbf{r}}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\, \frac{m\, \dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \mathbf{F}\, \dot{\mathbf{r}} \overset{(2.36)}{=} N. \tag{2.37}$$

Nun ist aber N die an das System übertragene Leistung. Die zu- oder abgeführte Energie ändert somit die Geschwindigkeit des Teilchens und wir identifizieren daher mit

$$T = \frac{m}{2}\, \dot{\mathbf{r}}^2 \tag{2.38}$$

die *kinetische Energie* des Teilchens (im betrachteten Inertialsystem). Es ist dies die mit der Bewegung des Teilchens verbundene Energie. Sie folgt, wie gezeigt wurde, unmittelbar aus Axiom 2.2.

Zur Berechnung der Arbeit gemäß (2.35) muß im allgemeinen die Bahn $\mathbf{r}(t)$ des Massenpunktes bekannt sein, also das Problem gelöst sein. Es gibt aber eine wichtige Klasse von Kräften, bei denen man diese Information nicht benötigt. Systeme, bei denen der Wert des Arbeitsintegrals (2.35) vom Weg $\mathcal{C}$ unabhängig ist, heißen *konservativ* (= energieabgeschlossen). Das Arbeitsintegral hängt dann nur mehr von Anfangs- ($\mathbf{r}_1$) und Endpunkt ($\mathbf{r}_2$) ab. Wir wollen nun solche Systeme weiter untersuchen und wollen vorraussetzen, daß die Kraft $\mathbf{F}$ nicht von der Geschwindigkeit und auch nicht von der Zeit abhängt. Es gilt dann für das konservative System

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{r}\,\mathbf{F} = \int\limits_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{r}\,\mathbf{F}, \quad \mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_2 \in \mathcal{C}_1,\, \mathcal{C}_2, \tag{2.39}$$

oder

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_2} d\mathbf{r}\,\mathbf{F} = 0. \tag{2.40}$$

Ist der Integrationsweg geschlossen, so gilt weiter:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{F} = 0. \tag{2.41}$$

Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes [Anhang A, Gleichung (A.17)] folgt weiter

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{F} = \int\limits_{\mathcal{A}} dA\; (\mathrm{rot}\mathbf{F}\,\mathbf{n}) = 0, \tag{2.42}$$

wenn $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{C}$ eingeschlossene Fläche ist und $\mathbf{n}$ der Flächennormalvektor der Fläche $\mathcal{A}$. Weiters gilt (A.13):

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}, \qquad \nabla = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

mit ∇ dem Differentialoperator *Nabla* (A.10).

Entsprechend (2.42) folgt für konservative Systeme:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{2.43}$$

Das Kraftfeld ist also ein *wirbelfreies* Vektorfeld [Anhang A, Gleichung (A.13)]. Da aber $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f(\mathbf{r}) = 0$ gilt [Anhang A, Gleichungen (A.15)], folgt, daß ein solches Vektorfeld stets als der Gradient eines Skalarfeldes $U(\mathbf{r})$ geschrieben werden kann

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r}) = -\nabla\, U(\mathbf{r}), \tag{2.44}$$

mit $U(\mathbf{r})$ dem *Potential*. Wir erhalten weiters:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}) &= \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'\,\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -\int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'\,\mathrm{grad}_{\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \\ &= -\int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Man normiert noch $U(\mathbf{r}_0)$ auf Null und bezeichnet dann $U(\mathbf{r})$ als die *potentielle Energie*. Dies ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen Massepunkt im Kraftfeld $\mathbf{F}$ vom Punkt $\mathbf{r}_0$ zum Punkt $\mathbf{r}$ zu verschieben.

Aus (2.35) und (2.38) folgt weiter, daß die Änderung der kinetischen Energie

$$\Delta T = T(t_1) - T(t_0) = W, \tag{2.46}$$

also gleich der von der Kraft am Massepunkt geleisteten Arbeit ist. Die Kombination von (2.45) und (2.46) ergibt dann für konservative Systeme

$$T(t_1) - T(t_2) = W = U(\mathbf{r}(t_2)) - U(\mathbf{r}(t_1)),$$

also schließen wir:

$$T(t) + U(\mathbf{r}(t)) = E = \text{konst.} \tag{2.47}$$

Wir haben damit den *Erhaltungssatz der Gesamtenergie E* aufgefunden.

Wir beobachten schließlich, daß (2.47) aus (2.23) unter Verwendung von (2.44) abgeleitet werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \\ m\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2\right) = -\dot{\mathbf{r}}\,\nabla U(\mathbf{r}) \\ &= -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{dU}{dt}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 + U\right) = 0,$$

mit Gleichung (2.47) als Konsequenz.

Ist die Kraft $\mathbf{F}$ zeitabhängig, dann ist das System *nicht* konservativ. Es kann aber trotzdem sein, daß man eine Potentialfunktion $U(\mathbf{r}, t)$ finden kann, sodaß

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$$

ist. Eine solche Potentialfunktion ist aber keine potentielle Energie. Man kann mit ihr wohl einen Ausdruck für die Gesamtenergie E bilden, sie bleibt aber nicht erhalten. Ebenso ist im allgemeinen das System dann nicht konservativ, wenn eine Kraft geschwindigkeitsabhängig ist. So ergibt sich etwa für die Reibungskraft

$$\mathbf{F}_f = -\alpha\,\dot{\mathbf{r}}$$

aus der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\mathbf{r}} &= -\alpha\,\dot{\mathbf{r}} \\ m\,(\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}}) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2\right) = -\alpha\,\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{dT}{dt} < 0. \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie E ist in diesem Fall gleich T und diese wird durch die Reibung vermindert; die entstehende Wärme verringert die anfänglich vorhandene Menge mechanischer Energie.

Eine Ausnahme bilden solche geschwindigkeitsanhängigen Kräfte, welche senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Teilchens stehen, wie etwa die LORENTZkraft in der Elektrodynamik.

2.5.3 Integrale der Bewegung

Eine *Erhaltungsgröße* (= *Integral* oder *Konstante der Bewegung*) ist eine Funktion der Koordinaten, Geschwindigkeiten und der Zeit, die längs der Bahn des Teilchens konstant ist

$$I = I(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \text{konst}, \qquad (2.48)$$

wenn für $\mathbf{r}$ bzw. $\dot{\mathbf{r}}$ die analytischen Ausdrücke für die Bahn $\mathbf{r}(t)$ bzw. deren Ableitungen eingesetzt werden. Kommt im Ausdruck (2.48) die Zeit t nicht explizit vor, dann heißt $I(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ein *zeitfreies Integral der Bewegung*. Um die Konstanz einer Größe I zu beweisen, ist es nicht nötig, die Lösung $\mathbf{r}(t)$ zu kennen. Bildet man die totale Zeitableitung von Gl. (2.48) und setzt die NEWTONsche Bewegungsgleichung (2.23) ein, findet man

$$\frac{dI}{dt} = \sum_i \frac{\partial I}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial I}{\partial v_i}\dot{v}_i + \frac{\partial I}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial I}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial I}{\partial v_i}\frac{F_i}{m} + \frac{\partial I}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0. \qquad (2.49)$$

Die in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Beweise für die Erhaltungssätze des Impulses, der Energie und des Drehimpulses sind zu Gl. (2.49) äquivalent. Die Erhaltung der vorgenannten Größen ist bedingt durch grundlegende Symmetrien der Raum-Zeit, die auch in der NEWTONschen Bewegungsgleichung wirksam werden. Die Impulserhaltung resultiert aus der Homogenität des kräftefreien Raumes, die Energiegerhaltung aus der Homogenität der Zeit, die Drehimpulserhaltung aus der sphärischen Symmetrie der Zentralkraft. Weitere Integrale der Bewegung gibt es nur für spezielle Kräfte, von denen uns einige im Verlauf der Vorlesung begegnen werden.

Integrale der Bewegung sind sehr nützlich für die Lösung eines mechanischen Problems. Sie ermöglichen es, die Zahl der abhängigen Variablen und damit die Zahl der Differentialgleichungen zu erniedrigen. Im günstigsten Fall ist mit ihrer Hilfe das Problem vollständig gelöst. Hiezu der folgende

Satz 2.2 *Kennt man zu einem mechanischen Problem (eines Massenpunktes im dreidimensionalen Raum) 5 zeitfreie Integrale der Bewegung, dann ist die Gestalt der Bahn gefunden.*

Die Unabhängigkeit der Integrale

$$I_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = C_i, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

bedeutet, daß die Funktionaldeterminante der I_i nach 5 der Variablen x_1, x_2, x_3; $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ ungleich Null ist. Das ist aber auch die Bedingung dafür, daß man die obigen 5 Gleichungen nach diesen 5 Variablen auflösen kann. Eine der Variablen verbleibt als Parameter, z.B. x_3

$$x_1 = x_1(x_3, C_i), \quad x_2 = x_2(x_3, C_i), \quad \dot{x}_j = \dot{x}_j(x_3, C_i).$$

Analog gilt der

Satz 2.3 *Kennt man 6 unabhängige, zeitabhängige Integrale der Bewegung, dann ist das mechanische Problem vollständig gelöst.*

Für die Bewegung eines Teilchens im dreidimensionalen Raum gibt es immer 6 unabhängige Integrale der Bewegung, z.B. die Anfangslage $\mathbf{r}_0$ und die -geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0$. Leitet man die Lösung des Problems zu diesen Anfangsdaten nach der Geschwindigkeit ab, erhält man:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0; t), \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0; t). \tag{2.50}$$

Löst man dieses System von 6 unabhängigen Gleichungen nach den 6 Größen $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ auf (dies ist im Prinzip immer möglich), dann bekommt man die 6 Erhaltungsgrößen

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \text{konst}, \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \text{konst}.$$

Dieser Auflösungsprozess kann dynamisch auch so dargestellt werden: vom Zeitpunkt t läßt man das System mit umgekehrter Geschwindigkeit zurücklaufen:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}(\mathbf{r}, -\dot{\mathbf{r}}; -t), \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, -\dot{\mathbf{r}}; -t).$$

Weitere Erhaltungsgrößen, wie z.B. die Energie oder der Drehimpuls hängen von den vorgenannten ab. Aber die Anfangslage und -geschwindigkeit sind 'uninteressante' Erhaltungsgrößen, sie ermöglichen keine allgemeinen Aussagen über die Bewegung. Im Gegensatz dazu sind Drehimpuls, Gesamtenergie und die anderen bereits besprochenen Erhaltungsgrößen 'interessant', denn sie gestatten allgemeine Aussagen über die Bewegung und sie schränken in vielen Fällen die Bewegung des Massenpunktes ein. Z.B. die Drehimpulserhaltung bedingt die Ebenheit der Bewegung und den Flächensatz, der Energiesatz eines gebundenen Teilchens verbietet die Entfernung ins Unendliche. Solche interessante Erhaltungsgrößen heißen *isolierende Integrale der Bewegung* und hängen mit der Symmetrie des Kraftfeldes zusammen. Solche isolierende Integrale der Bewegung sind auch von großer Bedeutung für die statistische Mechanik, weil im allg. die Verteilungsfunktion, die den Zustand eines Systems von vielen Teilchen beschreibt, nur von solchen isolierenden Integralen abhängen kann.

2.6 Der Phasenraum

Die Bewegung eines Massenpunktes kann man sich als eine Kurve im Raum der Koordinaten vorstellen. Hat das Teilchen 2 Freiheitsgrade, dann ist das eine Kurve in einer Ebene; bei 3 Freiheitsgraden eine Kurve im dreidimensionalen Raum. Aber derartige Kurven können nicht alle Informationen wiedergeben, die zu einer vollständigen Beschreibung einer Bahn gehören; denn es ist nicht ersichtlich, mit welcher Geschwindigkeit der Massenpunkt der Kurve im Ortsraum entlangläuft.

Für Darstellungen, die eine vollständige Beschreibung der Bahn liefern, verwendet man den *Phasenraum*; dieser wird von allen Lagekoordinaten und allen Geschwindigkeitskomponenten aufgespannt. Bei einem Freiheitsgrad ($f = 1$) ist dieser Phasenraum zweidimensional, z.B. $(x, \dot{x})$, also eine Ebene. Bei 2 Freiheitsgraden ist der Phasenraum vierdimensional, bei 3 sechsdimensional,..., allgemein also $2f$-dimensional. Da man einen vier- oder noch höherdimensionalen Raum nicht darstellen kann, muß man sich leider meist mit Projektionen dieses Raumes begenügen. Trotzdem geben diese Darstellungen oft sehr nützliche Einsichten und werden häufig verwendet.

Die Lösungen (2.50)

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0; t), \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0; t)$$

sind Raumkurven im Phasenraum. Jedem Zeitpunkt t entspricht ein Punkt dieser Kurve; dessen $2f$ Koordinaten geben die zu diesem Zeitpunkt vom Massenpunkt angenommenen Lagekoordinaten und Geschwindigkeitskomponeten an. Man nennt daher diese Raumkurve im $2f$-dimensionalen Phasenraum *Phasenkurve*. Wenn sich der Massenpunkt im Laufe der Zeit bewegt, dann entsprechen aufeinerfolgende Punkte der Phasenkurve seinen aufeinanderfolgenden Zuständen. Den Punkt der auf der Kurve den momentanen Zustand des Massenpunkts beschreibt, nennt man *Phasenpunkt*. Während der Bewegung des Massenpunkts läuft er auf der Phasenkurve dahin.

Ein zeitfreies Integral der Bewegung ist eine Funktion der Lagekoordinaten und Geschwindigkeit:

$$I(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \text{konst.}$$

Es ergibt eine Hyperfläche im Phasenraum. Der Phasenpunkt verbleibt während der ganzen Bewegung auf dieser; mit anderen Worten: die Phasenkurve liegt in dieser Hyperfläche. Gibt es weitere unabhängige zeitfreie Integrale der Bewegung, dann kann die Phasenkurve nur im Durchschnitt all dieser Flächen liegen. Die Bewegungsmöglichkeiten des Phasenpunkts, damit auch des realen Massenpunkts, werden damit mehr oder weniger eingeschränkt. Daraus ist auch ersichtlich, daß es maximal $2f - 1$ zeitfreie Integrale der Bewegung geben kann. Denn die zugehörigen Flächen schneiden sich dann gerade in einer Kurve, der Phasenkurve. Gäbe es ein weiteres unabhängiges zeitfreies Integral, dann würde die zugehörige Fläche die Phasenkurve in einem Punkt (oder vielleicht eine diskrete Menge von solchen) schneiden; der Phasenpunkt wäre fixiert, der reale Massenpunkt unbeweglich.

Bei *isolierenden Integralen der Bewegung* ist die zugehörige Fläche im Phasenraum 'verhältnismäßig einfach'. Oft schränkt ein solches die Beweglichkeit des Phasenpunktes auf Teilgebiete des Phasenraumes ein. Auch die Bewegung des realen Massenpunkts muß dann einfacher und übersichtlicher sein. Bei nichtisolierenden Integralen der Bewegung können diese Flächen wild oszillieren und vielfach zusammenhängen. Dann ist ihre Wirksamkeit als 'Käfig' für den Phasenpunkt sehr gering oder nicht existent.

Eine Einsicht über das Vorhandensein von Integralen der Bewegung liefert die von den berühmten französischen Mathematiker erfundene und nach ihm benannte POINCARÉ-Abbildung. Diese erhält man, indem man im Phasenraum eine geeignete Ebene auswählt und die Punkte einzeichnet, in denen die Phasenkurve die Ebene durchstößt. Sind Integrale der Bewegung vorhanden, dann bilden die Phasenpunkte ein regelmäßiges Muster, liegen oft auf einer Kurve. Liegt kein (oder fast kein) Integral der Bewegung vor, dann ist die Bewegung chaotisch und die Durchstoßpunkte verteilen sich regellos über die Ebene.

Man kann auch die Impulskomponenten statt der Geschwindigkeitskomponenten als Koordinaten des Phasenraumes heranziehen. In den meisten Fällen gibt dies nur einen unwesentlichen Unterschied, da sich die beiden Größen nur um die konstante Masse unterscheiden.

Im Abschnitt 3.4.1 zu den HAMILTON-Bewegungsgleichungen wird der kanonische Impuls eingeführt; dieser ist nicht immer gleich dem gewöhn-

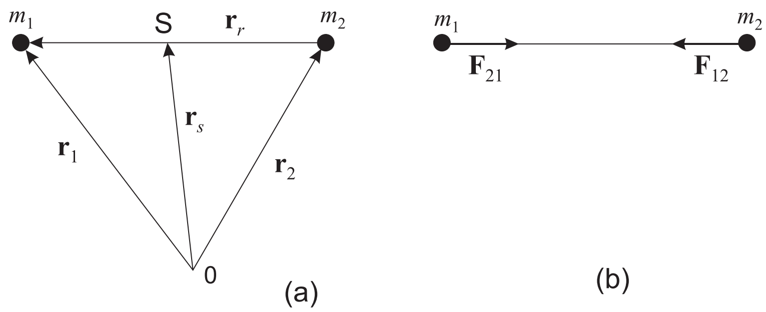


Abbildung 2.6: (a) Definition der Schwerpunkts- und Relativkoordinaten im Zweiteilchensystem. Die Relativkoordinate $\mathbf{r}_r$ ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs. (b) Kraft und Gegenkraft im Zweiteilchensystem.

lichen oder linearen Impuls wie er in diesem Kapitel definiert worden ist; bei geschwindigkeitsabhängigen Kräften etwa unterscheidet sich der lineare Impuls (er ist proportional zur Geschwindigkeit) vom kanonischen. Der "eigentliche" Phasenraum wird mittels des kanonischen Impulses definiert; für manche Untersuchungen kann es aber zweckmäßiger sein, die Geschwindigkeitskomponenten statt der des kanonischen Impulses zu verwenden.

2.7 Systeme von zwei Massenpunkten

2.7.1 Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften

In den Koordinaten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ der Massen m_1 und m_2 (siehe Abb. 2.6) gelten die Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}, \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

und es folgt

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}. \tag{2.51}$$

Wir führen die *Schwerpunktskoordinate*

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2\right) \tag{2.52}$$

ein und dann ist wegen (2.51) $\ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0}$; der Schwerpunkt S bewegt sich somit gleichförmig geradlinig. Die eigentliche Dynamik der Bewegung steckt also in der *Relativbewegung*. Wir führen nun die *Relativkoordinate*

$$\mathbf{r}_r = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{2.53}$$

ein. Damit ergibt sich

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_r, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_r, \tag{2.54}$$

und es folgt die Bewegungsgleichung

$$\mu\,\ddot{\mathbf{r}}_r = \mathbf{F}_{21}, \tag{2.55}$$

mit der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.56}$$

Nach der Abtrennung des Schwerpunktes ist das Zweiteilchenproblem auf die Bewegung *eines* Teilchens der Masse μ reduziert.

2.7.2 Das KEPLER-Problem der Bewegung zweier Himmelskörper

Wir sind nun in der Lage das Problem der Bewegung zweier Himmelskörper unter dem Einfluß der Gravitationskraft zu studieren. Dazu führen wir die Gravitationskraft zwischen zwei Massen m_i und m_k, welche sich an den Orten $\mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_k$ befinden ein:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\gamma\, m_i m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3}. \tag{2.57}$$

Hier ist γ die NEWTONsche *Gravitationskonstante.*

Es gelten die Bewegungsgleichungen unter Verwendung von (2.53)

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_r^2}\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_r} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_r^2}\frac{\mathbf{r}_r}{r_r} \\ m\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_r^2}\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_r} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r_r^2}\frac{\mathbf{r}_r}{r_r} \end{aligned}$$

mit $r_r = |\mathbf{r}_r|$. Aus diesen folgen die Bewegungsgleichungen in den Schwerpunkts- bzw. Relativkoordinaten

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0}, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}}_r = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_r^2}\frac{\mathbf{r}_r}{r_r}, \tag{2.58}$$

mit μ entsprechend (2.56). Somit bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig geradlinig (oder bleibt in Ruhe), die Relativbewegung ist identisch mit der Bewegung *eines* fiktiven Teilchens der Masse μ unter dem Einfluß der Kraft

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_r^2}\frac{\mathbf{r}_r}{r_r}.$$

Dies ist eine Zentralkraft, sie ist auf den Ursprung (einer der beiden Himmelskörper) zu oder von ihm weggerichtet. Sie kann aus dem Potential

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r_r} = -B\frac{1}{r_r} \tag{2.59}$$

abgeleitet werden. Wir haben weiters bereits festgestellt, daß für Zentralkräfte der Drehimpuls (2.28) nach Betrag und Richtung erhalten bleibt; damit verläuft die Bewegung in einer Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\ell}$. Es gilt weiters der Flächensatz (2.33) und daraus folgt, wenn man den Ursprung in die Sonne legt, das *zweite* KEPLER*sche Gesetz*:

> *Der Radiusvektor (Fahrstrahl) von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Um die Bahnkurve studieren zu können gehen wir auf zweidimensionale Polarkoordinaten (ρ, φ) über und verwenden (2.33) in der Form

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu\rho^2}. \tag{2.60}$$

Weiters berücksichtigen wir den Energiesatz (2.47)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 + U(\rho) \\ &\overset{(2.32)}{=} \frac{1}{2}\mu\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + U(\rho) = \text{konst} \end{aligned} \tag{2.61}$$

und erhalten daraus

$$\dot{\rho}^2 = 2\frac{E - U(\rho)}{\mu} - \rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Eine 'Division' durch $\dot{\varphi}^2$ erlaubt nun eine Parametrisierung von ρ mit φ. Wir beachten nun

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}},$$

und erhalten unter Verwendung von (2.60) die Bahnkurve

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \rho^4\left[2\mu\frac{E - U(\rho)}{\ell^2} - \frac{1}{\rho^2}\right],$$

oder

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu}{\ell^2}\left[E - U(\rho)\right] - \frac{1}{\rho^2}}.$$

Berücksichtigen wir jetzt noch (2.59) und führen wir weiters die Funktion $\sigma(\varphi) = \rho^{-1}(\varphi)$ ein, so folgt die Differentialgleichung

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu}{\ell^2}\left(E + B\sigma\right) - \sigma^2},$$

welche durch Einführen der Konstanten

$$p = \frac{\ell^2}{B\mu}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu B^2}} \tag{2.62}$$

auf die einfache Form

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2}$$

umgeformt werden kann. Diese Differentialgleichung wird durch den Ansatz

$$\sigma - \frac{1}{p} = \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

gelöst. Wir erhalten die Bahnkurve

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{2.63}$$

mit der Integrationskonstanten φ_0.

Wir wollen nun die Lösung (2.63) diskutieren und dies macht man am besten durch Einführen von kartesischen Koordinaten (x, y) mit dem Zusammenhang

$$x = \rho \cos\varphi + c, \quad y = \rho \sin\varphi, \tag{2.64}$$

wobei nun c die Rolle der Integrationskonstanten übernimmt. Es folgt weiter aus (2.63) und (2.64):

$$\rho^2 = (p - \varepsilon\, \rho\, \cos\varphi)^2 = [p - \varepsilon(x - c)]^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Es soll nun c so gewählt werden, daß der in x lineare Term verschwindet, da dann die entstehende Gleichung leicht als Kegelschnittgleichung identifiziert werden kann. Wir benützen dazu

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + y^2 &= [p - \varepsilon(x - c)]^2 \\ (1 - \varepsilon^2)(x - c)^2 + y^2 &= p^2 - 2\varepsilon p(x - c), \end{aligned} \tag{2.65}$$

und für den Fall $\varepsilon \neq 1$ führt die Wahl

$$c = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}$$

offensichtlich zum Erfolg. Führen wir noch

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

ein, so erhalten wir schließlich für (2.63) das Ergebnis:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2.66}$$

Es sind zwei Fälle möglich:

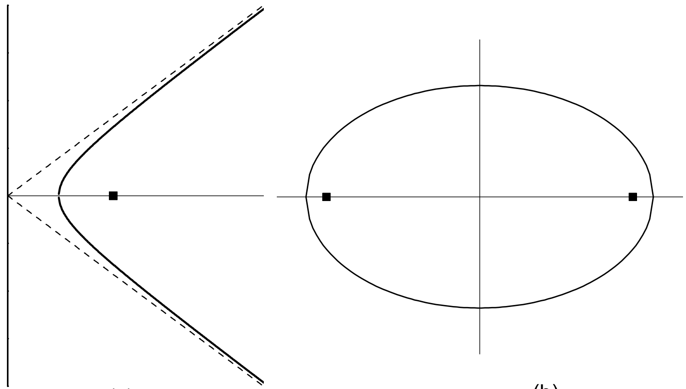


Abbildung 2.7: (a) Ist die Energie E positiv, so sind die Bahnkurven der Realtivbewegung Hyperbeläste. Bei attraktiver Kraft ist der das Kraftzentrum umlaufende Ast der physikalische. (b) Ist die Energie E negativ, so ist die Bahnkurve der Relativbewegung eine Ellipse mit dem Kraftzentrum in einem der beiden Brennpunkte.

1. $\varepsilon > 1$ **und damit** $c > a$
   In diesem Fall beschreibt (2.66) eine Hyperbel und das Kraftzentrum liegt im Brennpunkt der Hyperbel (siehe Abb. 2.7a). Der dem Kraftzentrum zugewendete Hyperbelast ist der physikalische Zweig, wenn B positiv und damit auch p positiv ist. Dies trifft für die Gravitationskraft zu und solche Hyperbeläste beschreiben offensichtlich die Bahnen von Meteoriten. Für diese ist E positiv (da $\varepsilon > 0$ ist), sie besitzen also genügend kinetische Energie um dem anziehenden Gravitationsfeld ins Unendliche entweichen zu können.

   Der dem Kraftzentrum abgewandte Hyperbelast ist der physikalisch relevante, wenn B und damit p negativ ist. Dies tritt etwa bei der Streuung gleichförmiger elektrischer Ladung auf.

2. $\varepsilon < 1$**, also** $c < a$
   Damit ist E negativ und das Teilchen kann nicht mehr aus dem Kraftfeld entweichen. Die Bahnkurve verläuft zur Gänze im Endlichen; (2.66) beschreibt eine Ellipse. Die große Halbachse ist durch

   $$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{B}{2(-E)}$$

   und die kleine durch

   $$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{pa} = \frac{1}{\sqrt{2\mu(-E)}}$$

gegeben. Dieses Ergebnis entspricht dem zweiten KEPLERschen Gesetz:

> *Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.*

Die Fläche dieser Ellipse ist $A = \pi\, ab = \pi\, a\sqrt{ap}$. Ist $\mathcal{T}$ die volle Umlaufzeit, so sagt der Flächensatz (2.33) aus, daß $A = \mathcal{T}\ell/(2\mu)$. Damit wird

$$\frac{a^3}{\mathcal{T}^2} = \frac{\ell^2}{4\pi^2\mu^2 p} = \frac{B}{4\pi^2\mu} = \frac{\gamma(m_1+m_2)}{4\pi^2} = \text{konst.} \tag{2.67}$$

Vernachläßigt man also die gegenseitige Wechselwirkung der Planeten untereinander gegenüber ihrer Wechselwirkung mit der Sonne, und sind die Massen der Planeten klein gegenüber der Masse der Sonne, so gilt entsprechend (2.67) das dritte KEPLERsche Gesetz:

> *Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachsen zu den Quadraten der Umlaufzeiten ist für alle Planeten eines gegebenen Planetensystems gleich.*

Die Kreisbahn ist natürlich auch als Lösung enthalten. Sie tritt für $\varepsilon = 0$ auf.

Es ist noch der Fall $\varepsilon = 1$ zu untersuchen. Dieser Fall tritt nach Gleichung (2.62) dann auf, wenn $E = 0$ ist. Dies bedeutet, daß das Teilchen wohl dem Gravitationszentrum entkommt, im Unendlichen aber mit verschwindender kinetischer Energie ankommen wird. Entsprechend (2.65) ergibt sich dann die Bahnkurve

$$y^2 + 2px - 2pc - p^2 = 0,$$

wobei c frei gewählt werden kann, also setzen wir $c = 0$. Die Bewegung verläuft dann entlang einer Parabel.

Wenn wir nun für den Fall der elliptischen Bahnkurve die Relativbewegung der zwei Himmelskörper studieren wollen, so müssen wir die Bewegung unter Verwendung von Gleichung (2.54) in die wirklichen Koordinaten transformieren. Wir legen den Koordinatenursprung in den gemeinsamen Schwerpunkt ($\mathbf{r}_s = 0$) und erhalten dann mit $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho}.$$

Die beiden Himmelskörper durchlaufen also die im Maßstab $m_2/(m_1+m_2)$ bzw. $m_1/(m_1+m_2)$ skalierte Ellipse $\rho(\varphi)$ entsprechend Gleichung (2.63), wobei der Systemschwerpunkt im Brennpunkt beider Ellipsen liegt.

2.7.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls

So wie sich die Bewegungsgleichungen in solche für Schwerpunkts- und Relativkoordinaten zerlegen lassen, kann man auch die Summe der Impulse als auch die der Drehimpulse in Anteile für die Schwerpunkts- und Relativbewegung auftrennen.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{p}_s$ den Impuls des Schwerpunkts und mit $\mathbf{p}_r$ den Impuls der Relativbewegung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_s &:= (m_1+m_2)\,\dot{\mathbf{r}}_s \overset{(2.52)}{=} m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_r &:= \mu\,\dot{\mathbf{r}}_r \overset{(2.53,2.56)}{=} \frac{m_2\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_2}{m_1+m_2} \end{aligned} \tag{2.68}$$

oder auch

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_r + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_s, \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_r + \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{p}_s.$$

Wir erhalten für die gesamte kinetische Energie:

$$T_1+T_2 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}_r^2}{2\mu} + \frac{\mathbf{p}_s^2}{2(m_1+m_2)}. \tag{2.69}$$

Die kinetische Energie läßt sich somit als Summe aus der kinetischen Energie der Relativbewegung und der kinetischen Energie des Schwerpunkts angeben.

Abschließend untersuchen wir noch die Summe der Drehimpulse:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2 &= \mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s(m_1+m_2) + \\ &\quad \mathbf{r}_r \times \dot{\mathbf{r}}_r \left[m_1 \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \right] \\ &= (m_1+m_2)\mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s + \mu\,\mathbf{r}_r \times \dot{\mathbf{r}}_r \\ &= \boldsymbol{\ell}_s + \boldsymbol{\ell}_r. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Der Gesamtdrehimpuls zerfällt in die Summe aus dem Drehimpuls des Schwerpunkts $\boldsymbol{\ell}_s$ relativ zum Ursprung und dem Drehimpuls $\boldsymbol{\ell}_r$ der Relativbewegung. Während $\boldsymbol{\ell}_s$ von der Wahl des Ursprungs abhängt, ist $\boldsymbol{\ell}_r$ davon unabhängig. Damit ist $\boldsymbol{\ell}_r$ die dynamisch relevante Größe.

2.8 Systeme endlich vieler Teilchen

2.8.1 Wichtige Sätze

Wir betrachten n Massenpunkte $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, die den inneren Kräften $\mathbf{F}_{ik}$ (zwischen i und k wirkend) und äußeren Kräften $\mathbf{F}_i$ unterworfen sein mögen. Die inneren Kräfte seien Zentralkräfte, sie sind also von der Form

$$\mathbf{F}_{ik} = F_{ik}(r_{ik}) \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{r_{ik}}, \quad r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|\,, \tag{2.71}$$

und $F_{ik}(r) = F_{ki}(r)$ ist eine skalare, stetige Funktion des Abstandes r. Zu diesen Kräften gibt es die Potentiale

$$U_{ik}(r) = -\int_{r_0}^{r} dr'\, F_{ik}(r'),$$

und es gilt (2.44)

$$\mathbf{F}_{ik} = -\nabla_k U_{ik}(r_{ik}), \tag{2.72}$$

mit

$$r_{ik} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \left(x_j^{(i)} - x_j^{(k)} \right)^2}$$

und

$$\nabla_k = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j^{(k)}}.$$

Es lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \cdots + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_1 \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_2 \\ \ldots & \\ m_n \ddot{\mathbf{r}}_n &= \mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_{2n} + \cdots + \mathbf{F}_{n-1,n} + \mathbf{F}_n \end{aligned} \tag{2.73}$$

oder

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ki} + \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}, \qquad \forall\, i. \tag{2.74}$$

Es folgt zunächst

Satz 2.4 *Der Schwerpunkt S des n-Teilchensystems verhält sich wie ein Massenpunkt der Masse $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, welcher unter der Wirkung der Resultierenden der äußeren Kräfte steht:*

$$M \ddot{\mathbf{r}}_s = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i. \tag{2.75}$$

Dies ist der Schwerpunktssatz.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Aufsummierung von (2.73) und aus Axiom 2.3.

Satz 2.5 *Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte:*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\ell}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \tag{2.76}$$

Dies ist der Drehimpulssatz.

Für ein festes i folgt aus (2.71) und (2.73):

$$m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k\neq i}^{n} F_{ik}(r_{ik}) \frac{\mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{r_{ik}} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \tag{2.77}$$

Weiters gilt

$$m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = m_i \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\ell}_i,$$

und (2.76) folgt aus der Aufsummierung von (2.77), wobei sich die Beiträge der inneren Kräfte wegen der Antisymmetrie des Vektorproduktes aufheben.

Satz 2.6 *Die zeitliche Änderung der gesamten inneren Energie ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte:*

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \mathbf{F}_i, \tag{2.78a}$$

mit

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} T_i \tag{2.78b}$$

$$U := \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} U_{ik}(r_{ik}) = U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n). \tag{2.78c}$$

Dies ist der Energiesatz.

Der Beweis ist leicht geführt: für ein festes i gilt

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i \sum_{k\neq i}^{n} U_{ik}(r_{ik}) + \mathbf{F}_i,$$

was aus (2.72) und (2.73) folgt. Wir multiplizieren mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und erhalten:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = -\dot{\mathbf{r}}_i \nabla_i \sum_{k \neq i}^{n} U_{ik}(r_{ik}) + \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{F}_i.$$

Summation über alle Teilchen ergibt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \nabla_i U_{ik}(r_{ik}) + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{F}_i.$$

Wir greifen nun $i = a$, $k = b$ und $i = b$, $k = a$ mit $b > a$ aus dieser Summe heraus. Dies ergibt

$$\dot{\mathbf{r}}_a \nabla_a U_{ab} + \dot{\mathbf{r}}_b \nabla_b U_{ba} = \left[\dot{\mathbf{r}}_a \nabla_a + \dot{\mathbf{r}}_b \nabla_b\right] U_{ab} = \frac{d}{dt} U_{ab},$$

da $U_{ab} = U_{ba}$ ist. Daraus folgt schließlich mit

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} U_{ik}(r_{ik})\right] = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \, \mathbf{F}_i$$

die Gleichung (2.78).

2.8.2 Das abgeschlossene n-Teilchen System

Wir können nun das abgeschlossene n-Teilchen System definieren:

Definition 2.3 *Ein n-Teilchen System heißt* abgeschlossen*, wenn alle äußeren Kräfte verschwinden.*

Daraus folgt:

$$M \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0}, \quad M \dot{\mathbf{r}}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_s = \text{konst.} \tag{2.79}$$

Es bleibt also der Gesamtschwerpunktsimpuls des abgeschlossenen Systems erhalten (*Impulssatz*). Es folgt weiters aus (2.76)

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{L} = \text{konst,} \tag{2.80}$$

womit auch der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße ist. Schließlich folgt noch aus (2.78)

$$T + U = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{k>i}^{n} U_{ik}(r_{ik})\right] = E = \text{konst,} \tag{2.81}$$

die Erhaltung der Gesamtenergie.

Zusammengefaßt kann gesagt werden, daß das abgeschlossene n-Teilchen System durch insgesamt 10 Erhaltungsgrößen charakterisiert ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_s &= \text{konst}, && \text{Impulssatz}\\
\mathbf{r}(t) - \frac{1}{M}\mathbf{p}_s\, t &= \mathbf{r}_s(0), && \text{Schwerpunktsatz}\\
E = T + U &= \frac{\mathbf{p}_s^2}{2M} + T_r + U, && \text{Energiesatz}\\
\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\ell} &= \mathbf{r}_s \times \mathbf{p}_s + \boldsymbol{\ell}_r, && \text{Drehimpulssatz.}
\end{aligned}$$

2.8.3 Der elastische Stoß zweier Massen

Es wird die Bewegung zweier Massen im freien Raum betrachtet wobei wir annehmen wollen, daß keine äußeren Kräfte auftreten. Die zwei Massen stellen somit ein abgeschlossenes System dar und die im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Erhaltungssätze spielen eine zentrale Rolle. Die Standardsituation sieht folgendermaßen aus: Zwei Massen bewegen sich (gleichförmig) aufeinander zu, sodaß sie zu irgendeinem Zeitpunkt zusammenstoßen. Der Stoßprozess wird von inneren Kräften beherrscht. Erfüllen diese Kräfte Axiom 2.3, so gilt völlig unabhängig von den Details des Stoßes, daß der Gesamtimpuls der Massen erhalten bleibt. Konzentrieren wir uns des weiteren auf den elastischen Stoß, so tritt kein Energieverlust auf und es gilt der Energiesatz.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man den Stoßvorgang im Schwerpunktsystem (dort ist der Gesamtimpuls Null) betrachtet. Die Beobachtung des physikalischen Vorganges erfolgt natürlich im Laborsystem. - Die nachfolgende Darstellung ist einer unveröffentlichten Arbeit von Dr. H. Neuer (mit Erlaubnis des Autors) entnommen.

Die Koordinaten der Massen m_1 und m_2 im Laborsystem (LS) und im Schwerpunktsystem (SS) sind:

	vor dem Stoß	nach dem Stoß
LS	$\mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_2;\, \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1,\, \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2;$	$\bar{\mathbf{r}}_1,\, \bar{\mathbf{r}}_2;\, \bar{\mathbf{v}}_1,\, \bar{\mathbf{v}}_2$
SS	$\mathbf{r}'_1,\, \mathbf{r}'_2;\, \mathbf{v}'_1 = \dot{\mathbf{r}}'_1,\, \mathbf{v}'_2 = \dot{\mathbf{r}}'_2;$	$\bar{\mathbf{r}}'_1,\, \bar{\mathbf{r}}'_2;\, \bar{\mathbf{v}}'_1,\, \bar{\mathbf{v}}'_2.$

Die Umrechnung vom LS ins SS erfolgt mittels der Transformation, welche bereits im Zusammenhang mit Satz 2.1 auf Seite 11 eingeführt wurde

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_s, \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_s, \qquad i = 1,2; \qquad (2.82)\\
&= \mathbf{r}'_i + \mathbf{v}_s\, t.
\end{aligned}$$

Impulssatz im LS (Erhaltung des Gesamtimpulses):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \\ &= \bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = m_1\bar{\mathbf{v}}_1 + m_2\bar{\mathbf{v}}_2. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Energiesatz im LS (Erhaltung der Gesamtenergie, welche natürlich auf die kinetische Energie beschränkt ist):

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \bar{v}_2^2. \tag{2.84}$$

Impulssatz im SS (der Gesamtimpuls im SS ist Null):

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \bar{\mathbf{p}}_1' + \bar{\mathbf{p}}_2' = 0. \tag{2.85}$$

Energiesatz im SS:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1 \bar{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \bar{v}_2'^2. \tag{2.86}$$

Aus Gln. (2.82) und (2.85) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' &= m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_s) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_s) = 0, \\ \mathbf{v}_s &= \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Aus Gl. (2.85)

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = 0 = m_1\bar{\mathbf{v}}_1' + m_2\bar{\mathbf{v}}_2'$$

folgt

$$|\mathbf{v}_1'| = \frac{m_2}{m_1}|\mathbf{v}_2'| \quad |\bar{\mathbf{v}}_1'| = \frac{m_2}{m_1}|\bar{\mathbf{v}}_2'|,$$

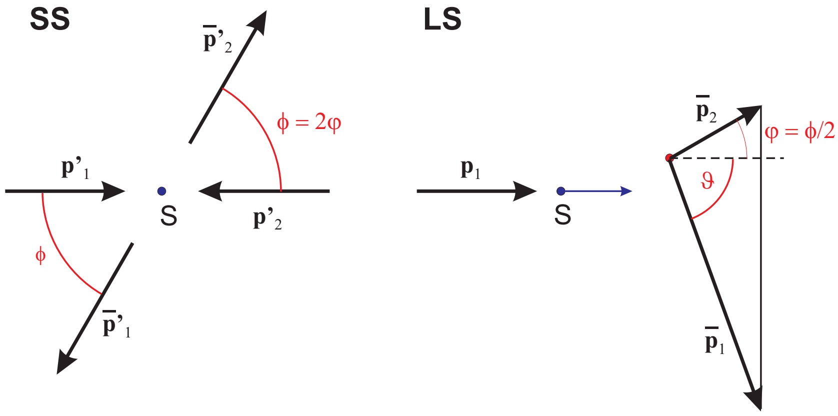
und damit erhält man aus dem Energiesatz (2.86):

$$|\mathbf{v}_1'| = |\bar{\mathbf{v}}_1'|, \qquad |\mathbf{v}_2'| = |\bar{\mathbf{v}}_2'|. \tag{2.88}$$

Im SS hat jedes Teilchen nach dem Stoß den gleichen Betrag der Geschwindigkeit wie vor dem Stoß. Da im SS die Impulse gleich groß und entgegengesetzt sein müssen, kann man den Ansatz (siehe Abb. 2.8):

$$\bar{\mathbf{v}}_1' = -|\mathbf{v}_1'|\,\mathbf{e} \qquad \bar{\mathbf{v}}_2' = |\mathbf{v}_2'|\,\mathbf{e} \tag{2.89}$$

machen. **e** ist dabei ein willkürlicher Einheitsvektor; er enthält 2 Freiheitsgrade, die erst durch den eigentlichen Stoßvorgang näher bestimmt werden. Von den 6 Freiheitsgraden, welche die beiden Massenpunkte m_1, m_2 besitzen,



(a) (b)

Abbildung 2.8: Stoß auf ein Targetteilchen. (a) Schwerpunktsystem, (b) Laborsystem.

sind aufgrund der 4 Erhaltungssätze (der 3 Komponenten des Gesamtimpulses und der Gesamtenergie) nur diese 2 Freiheitsgrade übrig geblieben.

Rücktransformation ins LS gibt als Resultat

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_s = \frac{m_2}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
\mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_s = -\frac{m_1}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
\bar{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{v}_s + \bar{\mathbf{v}}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M} - \frac{m_2}{M}\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,\mathbf{e} \\
\bar{\mathbf{v}}_2 &= \mathbf{v}_s + \bar{\mathbf{v}}_2' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M} + \frac{m_1}{M}\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,\mathbf{e}.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß der Einheitsvektor $\mathbf{e}$ im SS bestimmt werden muß! Die letzten beiden der obigen Gleichungen geben folgenden Sachverhalt wieder (siehe Abb. 2.9): Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts im Laborsystem bleibt während des ganzen Vorgangs unverändert. Die beiden Geschwindigkeitsvektoren, die den Einlauf der Teilchen beschreiben, spannen eine Ebene $\mathcal{A}$ auf; die Geschwindigkeitsvektoren, welche den Auslauf beschreiben, spannen eine andere Ebene $\bar{\mathcal{A}}$ auf. Der elastische Stoßvorgang bewirkt das Umschlagen von der einen Ebene in die andere. Er führt auch den Vektor der anfänglichen Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ in den neuen Relativvektor $\bar{\mathbf{v}}_{rel} = \bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{e}\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ über; der Vektor der Relativgeschwindigkeit ändert seine Richtung, nicht aber seinen Betrag.

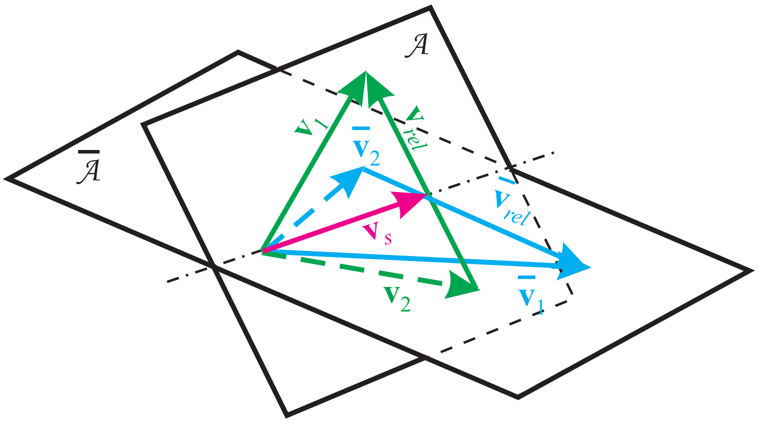


Abbildung 2.9: Die Geschwindigkeiten zweier Teilchen vor und nach dem elastischen Stoß.

Der Stoß auf ein ruhendes Target

Es wird nun ein wichtiger Spezialfall weiter behandelt: m_2 sei vor dem Stoß in Ruhe, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Dann liegen die 3 Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\bar{\mathbf{v}}_1$, $\bar{\mathbf{v}}_2$ wegen des Impulssatzes (2.83)

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\bar{\mathbf{v}}_1 + m_2\bar{\mathbf{v}}_2 \tag{2.90}$$

in einer Ebene.

Wir setzen an

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{im LS,} \\
\mathbf{e} &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi = 2\varphi \quad \text{im SS.}
\end{aligned}$$

Damit erhält man aus Gl. (2.90) für das stoßende Teilchen

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \frac{v}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} m_1 - m_2\cos(2\varphi) \\ -m_2\sin(2\varphi) \end{pmatrix}, \tag{2.91}$$

und für das gestoßene Teilchen (Zielteilchen = Targetteilchen)

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \frac{2m_1 v\cos\varphi}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}; \tag{2.92}$$

2φ ist der Winkel im SS (siehe Abb. 2.8). Man sieht aber aus Gl. (2.92), daß φ der Ablenkwinkel für v_2 im LS ist. Der Ablenkwinkel für v_1 sei ϑ :

$$\tan\vartheta = -\frac{\sin(2\varphi)}{(m_1/m_2) - \cos(2\varphi)}. \tag{2.93}$$

Bei der Inversion dieser Formel erhält man nicht den vollen Winkelbereich $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ wegen der Beschränkung des Hauptwertes des arctan. Am besten geht man von Gl. (2.91) aus und rechnet

$$re^{i\vartheta} = \frac{m_1}{m_2} - \cos(2\varphi) - i\sin(2\varphi). \tag{2.94}$$

Weitere Spezialisierung auf gleiche Massen gibt

$$m_1 = m_2, \quad v_2 = 0.$$

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = v\sin\varphi \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = v\cos\varphi \begin{pmatrix} cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{2.95}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{\mathbf{v}}_1 \perp \bar{\mathbf{v}}_2, \qquad \vartheta + \varphi = 90^0.$$

Im LS stehen nach dem Stoß die beiden Geschwindigkeiten aufeinander senkrecht, wenn $m_1 = m_2$ ist. Es gibt keine Rückwärtsstreuung. Diese ist nur möglich, wenn $m_1 < m_2$ ist.

2.8.4 Virial und zeitliche Mittelwerte

Wir nehmen an, daß das n-Teilchen System abgeschlossen sei und durch die Bewegungsgleichungen (2.73) beschrieben sei. Die inneren Kräfte sollen Potentialkräfte aber nicht notwendiger Weise Zentralkräfte sein. Allgemeine Lösungen von (2.73) für $n > 2$ sind, wenn überhaupt, nur in Sonderfällen möglich. Man kann aber über den hier vorgestellten Zugang qualitative Aussagen machen. Wir gehen davon aus, daß wir die Lösungen $\mathbf{r}_i(t)$ kennen. Wir bilden dann die Abbildung

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i(t)\, \mathbf{p}_i(t) \tag{2.96}$$

vom Phasenraum in die reellen Zahlen $V(t)$. Diese Abbildung wird *Virial* genannt. Die Lösungen von (2.73) seien nun so beschaffen, daß kein Teilchen ins Unendliche entweicht (n ist konstant) und keines zu irgendeinem Zeitpunkt einen unendlichen Impuls gewinnt. Dann bleibt $V(t)$ für alle Zeiten beschränkt.

Wir definieren nun zeitliche Mittelwerte

$$\langle f \rangle := \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} dt\, f(t),$$

und wir erhalten dann für den Mittelwert der Zeitableitung von $V(t)$:

$$\left\langle \dot{V} \right\rangle = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} dt \, \frac{d}{dt} V(t) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{V(\Delta) - V(-\Delta)}{2\Delta} = 0,$$

da $V(t)$ als beschränkt angenommen wurde. Nun ist aber

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \dot{\mathbf{r}}_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i(t) \nabla_i U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$$

und es gilt im zeitlichen Mittel

$$2 \langle T \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \nabla_i U \right\rangle = 0. \tag{2.97}$$

Diese Beziehung wird *Virialsatz* genannt.

Gleichung (2.97) wird besonders einfach, wenn das Potential U eine homogene Funktion vom Grade k in den Argumenten $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ ist. Es gilt dann:

Satz 2.7 *Für homogene Funktionen m-ten Grades*

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \ldots, x_n)$$

gilt der Satz von Euler*:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m \, f.$$

Es gilt also $\sum_i \mathbf{r}_i \nabla_i U = k \, U$ und damit gilt

$$2 \langle T \rangle - k \langle U \rangle = 0$$

zusammen mit dem Energiesatz:

$$\langle T \rangle + \langle U \rangle = E.$$

2.9 Bezugssysteme

2.9.1 Die Galilei-Transformation

Die Newtonschen Axiome sind im Sinne von Galilei relativistische Gesetze: sie haben in allen Inertialsystemen die selbe Form. Hieraus kann man die

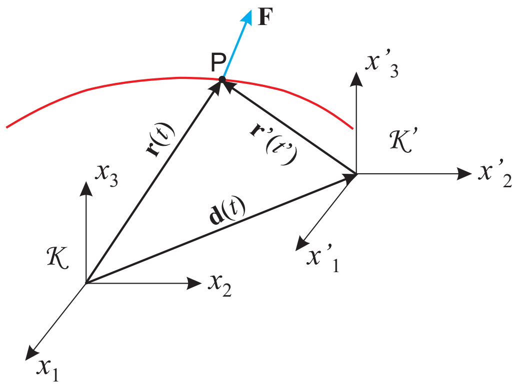


Abbildung 2.10: Es werden ein Inertialsystem $\mathcal{K}$ und ein anderes Bezugssystem $\mathcal{K}'$ betrachtet, deren Ursprünge durch den zeitabhängigen Vektor $\mathbf{d}(t)$ verbunden sind. Gesucht ist die Transformation für die Bahnkurve des Punktes P.

Transformation zwischen Inertialsystemen bestimmen, die GALILEI-Transformation.

Wir betrachten das Inertrialsystem $\mathcal{K}$ mit den kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeitkoordinate t. Ein Punkt $P(\mathbf{r}, t) \in \mathcal{K}$ wird als *Ereignis* bezeichnet und die Bahnkurve ist die zeitliche Aufeinanderfolge solcher Ereignisse. In einem anderen Bezugssystem $\mathcal{K}'$ wird dasselbe Ereignis andere Koordinatenwerte nämlich (x_1', x_2', x_3', t') haben. Da es sich aber um dasselbe Ereignis handelt müssen die gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten in bestimmter Weise zusammenhängen.

In der NEWTONschen Mechanik geht man davon aus, daß die von einer Uhr angezeigte Zeit unabhängig von der Bewegung ist. Man kann daher in einem beliebigen Bezugssystem dieselbe (absolute) Zeit verwenden, also insbesonders $t' = t$ in $\mathcal{K}'$ und $\mathcal{K}$. Wir wollen aber unterschiedliche Zeitnullpunkte zulassen und schreiben daher:

$$t' = t - t_0, \tag{2.98}$$

mit t_0 einer konstanten (zeitunabhängigen) Verschiebung.

Eine Teilchenbahn ist eine Aufeinanderfolge von solchen Ereignissen und beim Übergang von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}'$ wird die Bahnkurve, wie in Abb. 2.10 angedeutet, von $\mathbf{r}(t)$ zu $\mathbf{r}'(t')$. Wir untersuchen nun diese Transformation in Hinblick auf Axiom 2.1, also auf $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ in $\mathcal{K}$. Der Ursprung des Bezugssystemes $\mathcal{K}'$ liegt bei $\mathbf{d}(t)$ und wir nehmen zunächst an, daß $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ achsparallel sind. Es gilt dann offensichtlich (Abb. 2.10)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t') + \mathbf{d}(t)$$

und damit folgt

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}'(t') + \ddot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{0},$$

und damit ist das Bezugssystem $\mathcal{K}'$ dann und nur dann ein Inertialsystem, wenn $m\ddot{\mathbf{r}}'(t') = \mathbf{0}$ gilt, was der Forderung

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{0}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{d}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{a}$$

entspricht. Das Bezugssystem $\mathcal{K}'$ muß sich also mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu $\mathcal{K}$ bewegen, womit der Satz 2.1 bewiesen wurde. $\mathbf{a}$ ist noch ein konstanter Vektor, um welchen der Ursprung von $\mathcal{K}'$ gegenüber $\mathcal{K}$ verschoben sein kann.

Wir erhalten also für die Transformation von einem Inertrialsystem $\mathcal{K}$ auf ein sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegendes, achsenparalleles Inertialsystem $\mathcal{K}'$ das Ergebnis:

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}t - \mathbf{a}, \quad t' = t - t_0. \tag{2.99}$$

Dies ist die *spezielle* GALILEI-*Transformation*.

Es kann aber auch sein, daß die Achsen von $\mathcal{K}'$ gegenüber denen von $\mathcal{K}$ verdreht sind. Wir wollen hier zunächst eine relative Drehung der Koordinatenachsen um einen *konstanten* Winkel untersuchen. Eine solche Drehung wird durch die orthogonale Transformation

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, x_j, \quad \alpha^T = \alpha$$

beschrieben. Hier ist α die Drehmatrix, α^T die zu α transponierte Matrix und die α_{ij} sind die Elemente der Drehmatrix. Daraus ergibt sich die *allgemeine* GALILEI-*Transformation*:

$$x_i'(t') = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, x_j(t) - v_i t - a_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad t' = t - t_0. \tag{2.100}$$

Wir untersuchen nun die Transformation der Geschwindigkeiten auf der Basis der Transformation (2.100) und erhalten zunächst

$$dx_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, dx_j - v_i dt,$$

was im weiteren

$$\dot{x}_i'(t') = \frac{dx_i'}{dt'} = \frac{dx_i'}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \dot{x}_j(t) - v_i$$

ergibt. Es folgt weiter

$$\ddot{x}'_i(t') = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\ddot{x}_j(t), \tag{2.101}$$

oder

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}}'(t') = \mathbf{0}, \tag{2.102}$$

und $\mathcal{K}'$ ist ein Inertialsystem. Wir haben also auch in diesem Fall GALILEI-*Kovarianz* vorliegen.

Wir studieren nun die Bewegung des Massenpunktes unter Einfluß einer nicht dissipativen, also geschwindigkeitsunabhängigen Kraft. Es gelte in $\mathcal{K}$

$$m\ddot{x}_i(t) = F_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t);$$

wir multiplizieren mit α_{ji} und summieren über i

$$\begin{aligned} m\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji}\ddot{x}_i(t) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji}\, F_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \\ &\overset{(2.101)}{=} \quad m\ddot{x}'_j(t'). \end{aligned}$$

Wir führen nun die Komponenten des Vektors $\mathbf{F}$ im System $\mathcal{K}'$ mit

$$F'_j(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t') = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji} F_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

ein. Damit gilt:

$$m\ddot{x}'_j(t') = F'_j(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t'). \tag{2.103}$$

Da aber eine Drehung des Bezugssystems einen Vektor invariant läßt, gilt natürlich

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}$$

nur die Komponenten der Kraft sind unterschiedliche Funktionen der Argumente.

2.9.2 Das linear beschleunigte Bezugssystem

Wir setzen voraus, daß der Vektor $\mathbf{d}(t)$ in Abb. 2.10 durch

$$\mathbf{d}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{b}\, t^2$$

gegeben sei. Damit lautet die Transformation vom Inertialsystem $\mathcal{K}$ in das Bezugssystem $\mathcal{K}'$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t') + \frac{1}{2}\mathbf{b}\, t^2. \tag{2.104}$$

Es folgt dann für die Bewegung des kräftefreien Teilchens in $\mathcal{K}'$:

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} \quad \in \mathcal{K}, \quad \longrightarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}}'(t') = -m\mathbf{b} \quad \in \mathcal{K}'. \tag{2.105}$$

Damit gilt Axiom 2.1 in $\mathcal{K}'$ nicht und $\mathcal{K}'$ ist kein Inertialsystem. Der Zusatzterm entspricht einem konstanten Kraftfeld $\mathbf{F} = -m\mathbf{b}$, wenn wir die Bewegungsgleichung mit Axiom 2.2 entsprechend Gleichung (2.23) vergleichen. Solche Kräfte werden *Trägheitskräfte* genannt, da sie ihren Ursprung im Trägheitsterm $m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ haben. Man nennt sie auch *Scheinkräfte*, da sie in einem Inertialsystem nicht auftreten. Im beschleunigten System sind sie aber durchaus real: man erfährt diese Kräfte etwa als Passagier, wenn das Fahrzeug beschleunigt.

Es ist bemerkenswert, daß die Trägheitskräfte in gleicher Weise auftreten wie Gravitationskräfte, wie man aus Gleichung (2.24) ersehen kann. Es gilt im Gravitationsfeld die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = m\mathbf{g}, \tag{2.106}$$

und (2.104) führt zu

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = m(\mathbf{g} - \mathbf{b}), \quad \in \mathcal{K}'. \tag{2.107}$$

Wählen wir nun ein frei fallendes Bezugssystem, so ist $\mathbf{b} = \mathbf{g}$ und wir haben in $\mathcal{K}'$ die gleichen Bewegungsgleichungen wie ohne Gravitation. Die Gravitationskräfte werden eliminiert.

2.9.3 Das rotierende Bezugssystem

Solche Bezugssysteme sind von besonderem Interesse, insbesonders weil die Erde ein solches Bezugssystem darstellt. In Abb. 2.11 sind die wesentlichen Verhältnisse dargestellt. Das rotierende Bezugsystem $\mathcal{K}'$ mit den Koordinaten x_1', x_2', x_3' rotiert relativ zum Inertialsystem $\mathcal{K}$ mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 um die x_3-Achse. Die *Winkelgeschwindigkeit* ist durch

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \tag{2.108}$$

gegeben. Die Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und $d\boldsymbol{\varphi}$ zeigen dabei in Richtung der x_3-Achse. $|d\boldsymbol{\varphi}|$ ist dabei der Winkel, um welchen sich $\mathcal{K}'$ im Zeitraum dt relativ zu $\mathcal{K}$ dreht.

Wir betrachten nun einen Vektor $\mathbf{G}$ (siehe Abb. 2.11c), welcher von $\mathcal{K}'$ aus gesehen zeitunabhängig ist; er hat also konstante Länge und bildet konstante Winkel mit den Koordinatenachsen. Wie in Abb. 2.11c skizziert, ändert sich ein solcher Vektor in $\mathcal{K}$ aufgrund der Rotation von $\mathcal{K}'$. Im Zeitindervall dt ist diese Änderung durch

$$d\mathbf{G}_{rot} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{G} = (\boldsymbol{\omega}\, dt) \times \mathbf{G} \tag{2.109}$$

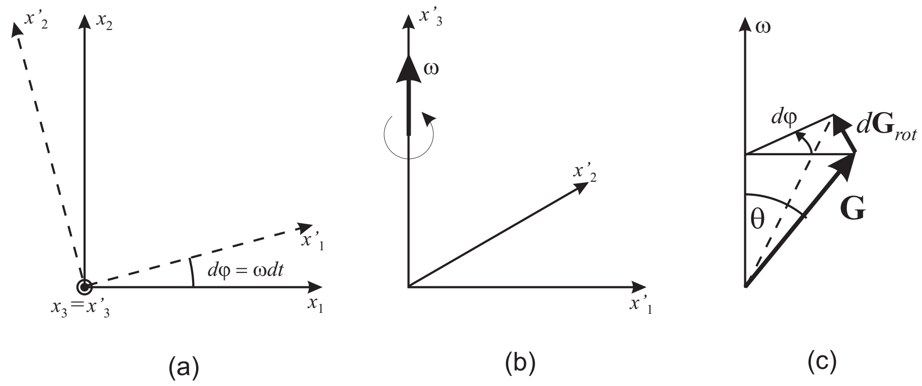


Abbildung 2.11: (a), (b) Es wird ein rotierendes Bezugssystem $\mathcal{K}'$ betrachtet (Koordinaten x_1', x_2', x_3') das sich gegenüber einem Inertialsystem $\mathcal{K}$ (Koordinaten x_1, x_2, x_3) mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die x_3-Achse dreht. (c) Darstellung der infinitesimalen Änderung $d\mathbf{G}_{rot}$ des Vektors $\mathbf{G}$.

gegeben. Wir betrachten nun einen beliebigen Vektor $\mathbf{G}(t)$. In $\mathcal{K}'$ ändere er sich während des Intervals dt um $d\mathbf{G}_{\mathcal{K}'}$. Seine Änderung in $\mathcal{K}$ ist dann durch

$$d\mathbf{G}_{\mathcal{K}} = d\mathbf{G}_{\mathcal{K}'} + d\mathbf{G}_{rot} \tag{2.110}$$

gegeben. Dies führt weiters zu

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\mathcal{K}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\mathcal{K}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \tag{2.111}$$

Wir untersuchen nun die Bahnkurve eines Massenpunktes und beschränken uns auf $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{konst}$. Weiters sollen die Uhren in beiden Systemen gleich gehen, also $t' = t$ sein. Die Ortsvektoren $\mathbf{r} \in \mathcal{K}$ und $\mathbf{r}' \in \mathcal{K}'$ zeigen vom gemeinsamen Ursprung zum betrachteten Massenpunkt P, sie sind also gleich: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$. Wir wenden nun (2.111) auf $\mathbf{r}(t)$ an:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{K}} &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{K}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{K}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned} \tag{2.112}$$

Für die Geschwindigkeiten schreiben wir

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{K}}, \quad \dot{\mathbf{r}}' = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{K}'} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt'}\right)_{\mathcal{K}'},$$

wobei wir mit t' andeuten wollen, daß wir die zeitliche Änderung auf $\mathcal{K}'$ beziehen wollen. Damit wird aus (2.112) $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ und wir wenden nochmals Gleichung (2.112) an, wobei wir berücksichtigen, daß $\boldsymbol{\omega}$ zeitlich konstant ist, und erhalten zunächst

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{K}} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{K}'} + 2\left(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'\right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right), \tag{2.113}$$

und mit

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{K}'} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2}\right)_{\mathcal{K}'}$$

erhalten wir

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' + 2\left(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'\right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right). \tag{2.114}$$

Für ein kräftefreies Teilchen in $\mathcal{K}$ gilt somit

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \in \mathcal{K} \quad \rightarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}}' = -2m\left(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'\right) - m\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) \in \mathcal{K}'. \tag{2.115}$$

Daraus ersehen wir, daß Axiom 2.1 in $\mathcal{K}'$ nicht gilt. Die hier auftretenden Trägheitskräfte werden CORIOLIS*kraft* und *Zentrifugalkraft* genannt:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -2m\left(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'\right) && \text{CORIOLISkraft} \\ \mathbf{Z} &= -m\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) && \text{Zentrifugalkraft.} \end{aligned} \tag{2.116}$$

Die Tatsache, daß die NEWTONschen Axiome nicht im beschleunigten Bezugssystem gelten, schließt solche Bezugssysteme für Berechnungen natürlich nicht aus. Es ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit ob man in einem Inertialsystem oder in einem anderen Bezugsystem rechnet.