Kapitel 3

Allgemeine Formulierung der Punktmechanik

Axiom 2.2 besagt, daß der zeitliche Bewegungsablauf eines Massenpunktes berechnet werden kann, wenn die Kräfte, welche auf den Massenpunkt wirken, vorgegeben sind. Es ist nun möglich, daß die Kräfte gar nicht explizit bekannt sind, sondern als geometrische Bedingungen vorliegen, welche die Bewegung einschränken. Man spricht von *Zwangsbedingungen* bzw. *Zwangskräften*. Ein Beispiel ist etwa die Fallbewegung eines Massenpunktes entlang einer schiefen Ebene.

Die Diskussion von Bewegungsgleichungen mit Einschränkungen allgemeiner Art geht auf LAGRANGE zurück. Bewegungsgleichungen, welche Zwangskräfte explizit einbinden, werden LAGRANGE-*Gleichungen erster Art* genannt. In den LAGRANGE-*Gleichungen zweiter Art* wird eine bestimmte Klasse von einschränkenden Bedingungen durch eine optimale Wahl des Koordinatensystems direkt einbezogen.

3.1 Die LAGRANGE-Gleichungen erster Art

Es bewege sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer beliebigen Fläche $\mathcal{A}$ im Raum, wie in Abb. 3.1a dargestellt. (Die Reibung wird dabei vernachlässigt.) Damit die Bewegung auch wirklich auf dieser Fläche stattfindet, müssen folgende Anfangsbedingungen vorliegen: zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ befand sich der Massenpunkt auf der Fläche $[\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \in \mathcal{A}]$ und hatte eine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$, welche in der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $\mathbf{r}_0$ liegt. Die Schwerkraft $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ kann dann nicht die einzige Kraft sein, die auf den Massenpunkt einwirkt. Wäre dies der Fall, so würde, je nach Anfangsbedingung, eine Wurfparabel oder eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung des Massenpunktes vorliegen. Es

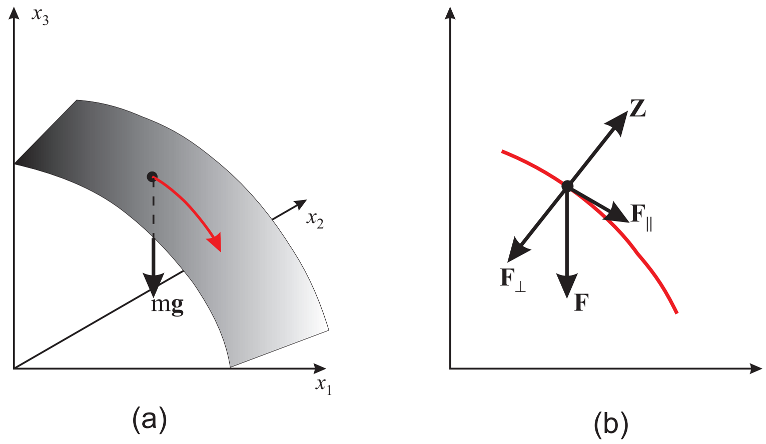


Abbildung 3.1: Zur Bewegung eines Massenpunktes mit Zwangsbedingungen.

treten also Kräfte auf, welche die Unterlage auf die Masse ausübt, die aber nicht bekannt sind. Man kann aber über eine einfache Überlegung zu diesen zusätzlichen Kräften gelangen: wir zerlegen die Schwerkraft $\mathbf{F}$, wie in Abb. 3.1b in jedem Punkt der Fläche in eine Komponente tangential an die Fläche ($\mathbf{F}_{\|}$) und in eine Komponente senkrecht dazu ($\mathbf{F}_{\perp}$). Die Komponente ($\mathbf{F}_{\|}$) reguliert offensichtlich die Bewegung entlang der Fläche. Da aber keine Verschiebung der Masse in Normalenrichtung auftritt, muß die Komponente der Schwerkraft in diese Richtung ($\mathbf{F}_{\perp}$) durch eine Zwangskraft $\mathbf{Z}$ kompensiert werden. Die Zwangskraft zeichnet sich also dadurch aus, daß sie senkrecht zur *momentanen* Bewegungsrichtung steht, daß also

$$\mathbf{Z}\, d\mathbf{r} = 0 \tag{3.1}$$

gilt. Die Zwangsbedingung selbst ist aber eine geometrische Bedingung, die Einschränkung der Bewegung im $\mathbb{R}^3$ auf eine Fläche, oder gar nur auf eine Raumkurve. Es wird also Randbedingungen der Form

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r},t) &= 0 & & \text{(Fläche)} \\ g_1(\mathbf{r},t) &= 0, \quad g_2(\mathbf{r},t) = 0 & & \text{(Raumkurve)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

geben.

Gleichung (3.1) sagt nun aus, daß $\mathbf{Z}$ senkrecht auf die Fläche $g(\mathbf{r}) = 0$ steht. (Wir betrachten zunächst nur stationäre Zwangsbedingungen.) Wir bestimmen nun das totale Differential von $g(\mathbf{r}) = 0$ in $\mathbb{R}^3$

$$dg = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = (\nabla g)\, d\mathbf{r} = 0. \tag{3.3}$$

Somit steht der Gradientenvektor $\operatorname{grad} g = \nabla g$ senkrecht auf $d\mathbf{r}$ und damit muß $\mathbf{Z}$ proportional $\operatorname{grad} g(\mathbf{r})$ sein:

$$g(\mathbf{r}) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Z} \parallel \operatorname{grad} g(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{Z} = \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{r}), \tag{3.4}$$

mit λ dem (noch unbekannten) LAGRANGE-*Multiplikator*. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{r}), \quad g(\mathbf{r}) = 0 \tag{3.5}$$

für die Bewegung entlang der Fläche. Dies läßt sich unmittelbar auf den Fall der Bewegung entlang einer Raumkurve erweitern. Wir erhalten dann mit

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha \operatorname{grad} g_\alpha(\mathbf{r}), \quad g_\alpha(\mathbf{r}) = 0 \tag{3.6}$$

die LAGRANGE-*Gleichung erster Art*. Die Kraft $\mathbf{F}$ wird dabei als gegeben erachtet. Es handelt sich hier um 5 Gleichungen, 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung und zwei algebraische Gleichungen zur Bestimmung der fünf Unbekannten $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ und $\lambda_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2$. (Das Argument t wurde λ_α angefügt, da ja grundsätzlich die Randbedingungen g_α auch explizite Funktionen der Zeit sein können, wie noch zu diskutieren sein wird.) Zusammen mit den Anfangsbedingungen reichen diese Gleichungen aus um alle unbekannten Funktionen bestimmen zu können.

Die Angabe von drei Zwangsbedingungen ist sinnlos, da dann die Bewegung auf einen Punkt im Raum, also den Stillstand, eingeschränkt wäre.

3.1.1 Klassifikation der Zwangsbedingungen

Wir geben nun die Zwangsbedingung ganz allgemein als $g(\mathbf{r}, t) = 0$ vor, und damit ergibt sich für das totale Differential:

$$dg = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial g}{\partial t} dt = 0. \tag{3.7}$$

Definition 3.1 *Sind die Koeffizientenfunktionen $a_i(\mathbf{r}, t)$ einer allgemeinen Differentialform*

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(\mathbf{r}, t) dx_i + a_0(\mathbf{r}, t) dt = 0 \tag{3.8}$$

die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(\mathbf{r}, t)$ nach den jeweiligen Variablen, so bezeichnet man die Zwangsbedingung als holonom.

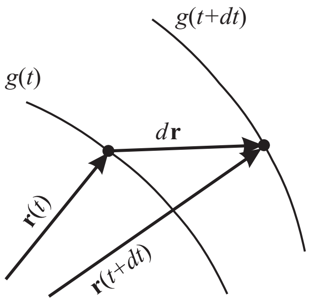
Definition 3.2 *Ist $a_0 = \partial f/\partial t = 0$, die Zwangsbedingung also stationär, so spricht man von* skleronomen *(starren) Zwangsbedingungen. Ist hingegen $a_0 \neq 0$, so spricht man von* rheonomen *(fließenden) Zwangsbedingungen.*

Aufgrund dieser Definitionen, sind die im vorhergehenden Abschnitt behandelten Zwangsbedingungen skleronom-holonom.

Untersucht man rheonome Zwangsbedingungen, so stellt sich die Frage nach dem Ansatz für die Zwangskräfte. Hier gibt die Erfahrung (das Experiment) die Antwort: auch im rheonomen Fall stehen die Zwangskräfte zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf die vorgegebenen geometrischen Gebilde. Es gilt daher auch in diesem Fall Gleichung (3.6), nun aber in der verallgemeinerten Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha(t)\,\mathrm{grad}\, g_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad g_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{3.9}$$

Wir können nun noch zeigen, daß die Zwangskräfte am Massenpunkt, welcher sich auf einer zeitlich veränderlichen Fläche/Kurve bewegt, Arbeit leisten. Wir betrachten dazu einen Massenpunkt, dessen Position zum Zeitpunkt t auf der Fläche $g(t)$ durch den Vektor $\mathbf{r}(t)$ markiert wird. Im Zeitintervall dt bewegt sich der Massenpunkt auf der Fläche, diese bewegt sich jedoch ebenfalls. Die Position auf der Fläche $g(t+dt)$ zum Zeitpunkt $t+dt$ kann man dann durch den Vektor $\mathbf{r}(t) + d\mathbf{r}$ beschreiben. Die Zwangsbedingungen (3.7) entsprechen aber der Aussage



$$\nabla g(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = -\frac{\partial g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt, \tag{3.10}$$

und dies besagt, daß die am Massenpunkt von den Zwangskräften [proportional zu $\nabla g(\mathbf{r}, t)$] geleistete (infinitesimale) Arbeit ungleich Null ist.

Definition 3.3 *Zwangsbedingungen, welche nicht einem totalen Differential entsprechen, bezeichnet man als* nicht holonom.

Solche Zwangsbedingungen entstehen, wenn Geschwindigkeiten und Koordinaten in irgendeiner Weise verknüpft werden.

3.1.2 Erhaltungsgrößen

Mögliche Aussagen über Erhaltungsgrößen sind nur eingeschränkt möglich, da die Zwangskräfte meist unbekannt sind und die Zwangsbedingungen oft Symmetrien verletzen, welche den Erhaltungssätzen zugrunde liegen.

Es gelte nun für einen Massepunkt

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F} + \mathbf{Z}, \tag{3.11}$$

und

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{F} + \mathbf{Z}). \tag{3.12}$$

Bei Verschwinden der rechten Seite führen (3.11) und (3.12) zur Impuls- und Drehimpulserhaltung.

Wir wollen nun die Energieerhaltung diskutieren. Wir verwenden (2.38)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}T$$

und setzen konservative Kräfte $\mathbf{F}$ voraus:

$$\mathbf{F}\,\dot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})\,\dot{\mathbf{r}} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = -\frac{d}{dt}U.$$

Dann ergibt (3.6) für skleronom-holonome Zwangsbedingungen

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha \nabla g_\alpha(\mathbf{r})\,\dot{\mathbf{r}}, \quad g_\alpha(\mathbf{r}) = 0.$$

Es muß aber auch die totale Zeitableitung der Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{dg_\alpha(\mathbf{r},t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial g_\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= \nabla g_\alpha(\mathbf{r},t)\,\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial g_\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

verschwinden, und dies ergibt:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}.$$

Für skleronome-holonome Zwangsbedingungen ist aber aufgrund der Definition 3.2 $\partial g_\alpha/\partial t = 0$ und es ist daher

$$T + U = \text{konst.} \tag{3.13}$$

3.2 Das D'ALEMBERTsche Prinzip

Die bisher durchgeführten Überlegungen können nicht in einfacher Weise auf die Diskussion von Systemen von Massenpunkten übertragen werden. Wir wollen daher im Folgenden einen anderen Ansatz diskutieren.

3.2.1 Formulierung für einen Massenpunkt

Wir gehen von der NEWTONschen Bewegungsgleichung (2.23) aus und interpretieren sie in der Form: *Der Trägheitswiderstand* ($m\ddot{\mathbf{r}}$) *und die eingeprägte Kraft* $\mathbf{F}$ *sind im Gleichgewicht.* (Eine wirkliche und eine fiktive Kraft sind also im Gleichgewicht.)

Definition 3.4 *Die mögliche, aber nur gedachte infinitesimale Verschiebung*

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \,\delta x_i \quad \mathit{mit} \quad \delta t = 0, \tag{3.14}$$

welche instantan ist, wird virtuelle Verschiebung *genannt. Sie unterscheidet sich von der wirklichen Verschiebung* d$\mathbf{r}$*, für welche das infinitesimale Zeitintervall stets* $dt \neq 0$ *ist.*

Man kann dann die Gleichgewichtsbedingung (2.23) auch in der Form

$$\delta A = (m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F})\,\delta\mathbf{r} = 0 \tag{3.15}$$

schreiben. Es folgt:

> Die *virtuelle Arbeit* δA, die man an dem System im formalen Gleichgewicht bei einer virtuellen Verschiebung verrichtet, ist gleich Null. Dies ist das D'ALEMBERT*sche Prinzip* oder das *Prinzip der virtuellen Arbeit* in seiner einfachsten Form.

Wir sehen also, daß dies nichts anderes als eine Neuformulierung von Axiom 2.2 ist. (Man kann aber auch formulieren, daß wegen der Beliebigkeit von $\delta\mathbf{r}$ das D'ALEMBERTsche Prinzip nur gültig ist, wenn die NEWTONschen Bewegungsgleichungen gelten.)

Wir wollen dieses Ergebnis auf mechanische Systeme mit Zwangsbedingungen ausdehnen. Für holonome Randbedingungen gilt (3.7), für virtuelle Verschiebungen hingegen nur

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\delta x_i = \nabla\, g(\mathbf{r},t)\delta\mathbf{r} = 0, \tag{3.16}$$

da ja $\delta t = 0$ ist. Nach (3.16) sind die Komponenten der virtuellen Verschiebung voneinander abhängig. Wir multiplizieren nun (3.16) mit dem LAGRANGE-Multiplikator λ und kombinieren mit (3.15). Man erhält

$$[m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F} - \lambda\nabla\, g(\mathbf{r},t)]\,\delta\mathbf{r} = 0 \tag{3.17}$$

und argumentiert, daß man die frei wählbare Größe λ etwa so wählt, daß

$$m\ddot{x}_1 - F_1 - \lambda\frac{\partial g(\mathbf{r},t)}{\partial x_1} = 0 \tag{3.18}$$

erfüllt ist. Es ist dann noch

$$\sum_{i=2}^{3}\left[m\ddot{x}_i - F_i - \lambda\frac{\partial g(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\right]\delta x_i = 0 \tag{3.19}$$

aufzulösen, wobei die zwei virtuellen Verschiebungen δx_i, $i = 2,3$ frei wählbar sind. Wir kombinieren (3.18) und (3.19) und erhalten mit

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda\nabla\, g(\mathbf{r},t)$$

wieder die LAGRANGE-Gleichung erster Art.

Zur Gewinnung der LAGRANGE-Gleichung (3.6) benutzten wir die (experimentell nachvollziehbare) Aussage, daß die Zwangskraft zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf die vorgegebene Fläche steht. Dies führte zum Ansatz $\mathbf{Z} = \lambda\nabla\, g(\mathbf{r},t)$. Im D'ALEMBERTschen Prinzip wird das System mit virtuellen Verschiebungen getestet und der Ausgangspunkt ist Gleichung (3.15). Bei Zwangsbedingungen finden die virtuellen Verschiebungen nur auf der vorgegebenen Fläche statt, weshalb $\nabla\, g(\mathbf{r},t)\delta\mathbf{r} = 0$ zu fordern ist. Beide Ansätze sind also einander äquivalent, die zweite Betrachtungsweise ist aber wesentlich flexibler, da sie auch auf nicht holonome Systeme erweiterbar ist.

3.2.2 Formulierung für Systeme von Massenpunkten

Auf den n-ten Massenpunkt wirken Kräfte $\mathbf{F}_n$ (eingeprägte Kräfte), welche auch summarisch alle inneren Kräfte enthalten sollen. Für die virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{r}_n$ kann man die virtuelle Arbeit

$$\delta A_n = (m\ddot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{F}_n)\,\delta\mathbf{r}_n = 0$$

bestimmen, und da δA_n eine skalare Größe ist, addieren sich die einzelnen Arbeitsbeiträge, welche an den anderen $N-1$ Massenpunkten zu leisten sind zur virtuellen Gesamtarbeit

$$\delta A = \sum_{n=1}^{N}(m\ddot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{F}_n)\,\delta\mathbf{r}_n = 0. \tag{3.20}$$

Dies ist das d'Alembertsche Prinzip für ein System von N Massenpunkten.

Einzelne Massen des Systems können an Kurven oder Flächen gebunden sein. Es könnten auch die Abstände zwischen den Massepunkten vorgegebene Werte haben. Es seien also r einschränkende Bedingungen gegeben. Die Zwangsbedingungen liegen entsprechend (3.8) in der Form

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^{(k)}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; t)\, dx_i + a_0^{(k)}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; t)\, dt = 0, \quad k = 1, \ldots, r$$

vor und daraus ergeben sich für die virtuellen Verschiebungen

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^{(k)}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; t)\, \delta x_i = 0, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Wir gewinnen nun die Bewegungsgleichungen wie zuvor: multipliziere die Zwangsbedingungen mit λ und addiere sie zu der Aussage des d'Alembertschen Prinzips:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left[m_n \ddot{x}_i^{(n)} - F_i^{(n)} - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_i^{(k)} \right] \delta x_i^{(n)} = 0, \tag{3.21}$$

mit $x_i^{(n)}$ der i-ten Komponente von $\mathbf{r}_n$ und $F_i^{(n)}$ der i-ten Komponente der Kraft $\mathbf{F}_n$. Es sind nun die r Lagrange-Multiplikatoren λ_k so zu wählen, daß r Klammerausdrücke verschwinden. Die restlichen $3N - r$ Verschiebungen sind frei wählbar und damit müssen die restlichen Klammerausdrücke ebenenfalls Null ergeben. Liegen nun r holonome Randbedingungen

$$a_i^{(k)} = \frac{\partial g_k(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; t)}{\partial x_i^{(k)}}$$

vor, so folgen schließlich die Lagrange-Gleichungen erster Art für ein System von N Massenpunkten

$$\begin{aligned} m_n \ddot{x}_i^{(n)} &= F_i^{(n)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i^{(n)}}, \quad n = 1, \ldots, N,\ i = 1, 2, 3 \\ g_k(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; t) &= 0, \quad k = 1, \ldots, r \leq 2N. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Wir sehen, daß das Problem die Auflösung von $3N + r$ Gleichungen erfordert. Bei r Zwangsbedingungen verbleiben im System noch $f = 3N - r$ *Freiheitsgrade.*

3.3 Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Vielfach ist man an der Berechnung der Zwangskräfte nicht interessiert. Es ist dann bequemer eine Formulierung zu wählen, welche es erlaubt die Zwangskräfte zu eliminieren.

3.3.1 Verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten

Wir gehen von den Lagrange-Gleichungen erster Art für N Massenpunkte in der Form (3.22) aus. Bei r Zwangsbedingungen sind dann nur $f = 3N - r$ der $3N$ kartesischen Koordinaten voneinander unabhängig. Wir wählen nun f *verallgemeinerte Koordinaten* q_k, $k = 1, \ldots, f$ und ihre Wahl ist so zu treffen, daß die q_i die Lage aller Massenpunkte festlegen,

$$x_i^{(n)} = x_i^{(n)}(q_1, \ldots, q_f; t), \quad n = 1, \ldots, N, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.23}$$

und daß die Zwangsbedingungen für beliebige Werte der q_i erfüllt sind:

$$g_\alpha \left[x_1(q_1^{(1)}, \ldots, q_f; t), \ldots, x_3^{(N)}(q_1, \ldots, q_f; t) \right] = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{3.24}$$

Dies kann leicht an einem Beispiel transparent gemacht werden: wir untersuchen einen Massenpunkt, welcher sich auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R bewegt. Seine Bahnen unterliegen daher der Zwangsbedingung

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - R^2 = 0. \tag{3.25}$$

Wir wählen nun die Winkel ϑ und φ als verallgemeinerte Koordinaten und setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\vartheta, \varphi) = R \sin\vartheta \, \cos\varphi \\ x_2 &= x_2(\vartheta, \varphi) = R \sin\vartheta \, \sin\varphi \\ x_3 &= x_3(\vartheta, \varphi) = R \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Hier ist R ein Parameter und keine Koordinate. Es ist unmittelbar einsichtig, daß (3.25) für beliebige Werte von ϑ und φ erfüllt ist.

3.3.2 Elimination der Zwangskräfte

Die verallgemeinerten Koordinaten wurden so gewählt, daß die Zwangsbedingungen für sie keine Einschränkungen darstellen. Daher unterliegt die $q_k(t)$-Bewegung keinen Zwangskräften mehr. Die Unabhängigkeit der Zwangsbedingungen von den q_k entsprechend (3.24) bedeutet aber auch, daß die totale

Ableitung der g_α nach den q_k verschwindet:

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = 0, \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i^{(n)}}\frac{\partial x_i^{(n)}}{\partial q_k} = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,r, \quad k = 1,\ldots,f. \tag{3.26}$$

Damit können wir die Zwangskräfte eliminieren. Wir multiplizieren (3.22) mit $\partial x_i^{(n)}/\partial q_k$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} m_n \ddot{x}_i^{(n)}\frac{\partial x_i^{(n)}}{\partial q_k} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} F_i^{(n)}\frac{\partial x_i^{(n)}}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\lambda_\alpha\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i^{(n)}}\frac{\partial x_i^{(n)}}{\partial q_k} \\ &\overset{(3.26)}{=} \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} F_i^{(n)}\frac{\partial x_i^{(n)}}{\partial q_k}, \quad \forall\, k.\end{aligned} \tag{3.27}$$

In (3.27) steht $x_i^{(n)}$ für $x_i^{(n)}(q_1,\ldots,q_f;t)$ und dies gilt auch für die Argumente von $F_i^{(n)} = F_i^{(n)}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$, mit $\mathbf{r}^T$ dem Vektor $(x_1^{(1)},\ldots,x_3^{(N)})$. Diese Gleichungen stellen somit f Bewegungsgleichungen für die f Funktionen $q_k(t)$ dar. Es sind keine Zwangsbedingungen zu berücksichtigen und auf der linken Seite steht die zu $q_k(t)$ gehörende Beschleunigung $\sum \ddot{x}_i^{(n)}(\partial x_i^{(n)}/\partial q_k)$ und auf der rechten Seite die zugehörige Kraft $\sum F_i^{(n)}(\partial x_i^{(n)}/\partial q_k)$.

3.3.3 Die Lagrange-Funktion

Die Beziehung (3.27) ist für praktische Anwendungen nicht gut geeignet und wir wollen sie weiter umformen. Dazu führen wir die folgende Notation ein:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x_1,\ldots,x_{3N}), \quad \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_{3N}) \\ \mathbf{q} &= (q_1,\ldots,q_f), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f),\end{aligned} \tag{3.28}$$

mit $\dot{\mathbf{q}}$ dem Vektor der *verallgemeinerten Geschwindigkeit*. Wir haben dabei zur Vereinfachung folgende Notation eingeführt:

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 & := & x_1^{(1)}, & x_2 & := & x_2^{(1)}, & x_3 & := & x_3^{(1)} \\ x_4 & := & x_1^{(2)}, & x_5 & := & x_2^{(2)}, & x_6 & := & x_3^{(2)} \\ \ldots & & & & & & & & \\ x_{3N-2} & := & x_1^{(N)}, & x_{3N-1} & := & x_2^{(N)}, & x_{3N} & := & x_3^{(N)}. \end{array}$$

Wir wollen auch die Kräfte und Massen wie folgt bezeichnen

$$\begin{array}{lllllllll} F_1 & := & F_1^{(1)}, & F_2 & := & F_2^{(1)}, & F_3 & := & F_3^{(1)} \\ F_4 & := & F_1^{(2)}, & F_5 & := & F_2^{(2)}, & F_6 & := & F_3^{(2)} \\ \ldots & & & & & & & & \\ F_{3N-2} & := & F_1^{(N)}, & F_{3N-1} & := & F_2^{(N)}, & F_{3N} & := & F_3^{(N)}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rclrclrcl}
m_1 & := & m_1, & m_2 & := & m_1, & m_3 & := & m_1 \\
m_4 & := & m_2, & m_5 & := & m_2, & m_6 & := & m_2 \\
\dots & & & & & & & & \\
m_{3N-2} & := & m_N, & m_{3N-1} & := & m_N, & m_{3N} & := & m_N.
\end{array}$$

um die Notation zu vereinfachen.

Es gelten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n(\mathbf{q}, t), \quad n = 1, \dots, 3N, \\
q_k &= q_k(\mathbf{r}, t), \quad k = 1, \dots, f.
\end{aligned}$$

Des weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n = \frac{d}{dt} x_n(\mathbf{q}, t) &= \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_n(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\
&= \dot{x}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

womit $\dot{x}_n$ als Funktion von $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ und t definiert wurde. Ganz offensichtlich gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k}. \qquad (3.30)$$

Für die kinetische Energie gilt Gleichung (2.78b)

$$T = T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_n \left(\dot{x}_i^{(n)} \right)^2, \qquad (3.31)$$

und wir erhalten in den verallgemeinerten Koordinaten unter Verwendung von (3.29) für die kinetische Energie:

$$T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i,k=1}^{f} m_{ik}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{f} b_k(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k + c(\mathbf{q}, t). \qquad (3.32)$$

Da $\dot{x}_n$ linear in den $\dot{q}_k$ ist, ist T maximal quadratisch in $\dot{q}_k$. Die sich beim Einsetzen ergebenden Koeffizienten haben wir zunächst mit $m_{ik}(\mathbf{q}, t)$, $b_k(\mathbf{q}, t)$ und $c(\mathbf{q}, t)$ bezeichnet.

Hängen die $x_n(\mathbf{q}, t)$ nicht explizit von der Zeit ab, so wird (3.29) zu $\dot{x}_n = \sum_k (\partial x_n / \partial q_k) \, \dot{q}_k$ und damit vereinfacht sich (3.32) auf:

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0 \quad \forall n \quad \rightarrow \quad T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i,k=1}^{f} m_{ik}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_k. \qquad (3.33)$$

Aus (3.31) folgt weiter

$$\frac{\partial T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}, \quad \forall\, k, \tag{3.34}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \overset{(3.30)}{=} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen voraus, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} &= \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_n}{\partial t \partial q_k} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial x_n}{\partial t}\right) \overset{(3.29)}{=} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k},
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}. \quad \forall\, k \tag{3.35}$$

Wir definieren nun die *verallgemeinerten Kräfte*

$$Q_k := \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \forall\, k, \tag{3.36}$$

und setzen (3.35) mit (3.34) und (3.36) in die Bewegungsgleichungen (3.27) ein. Dies ergibt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad \forall\, k. \tag{3.37}$$

Dies ist eine andere Form der LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art.

Wir beschränken uns zunächst auf Kräfte $\mathbf{F}_n$, welche durch ein Potential beschrieben werden können. Für ihre Komponenten gilt

$$F_i^{(n)} = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_i^{(n)}}.$$

Wir beachten weiters die Transformation (3.28) und erhalten für (3.36)

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U(\mathbf{q},t)}{\partial q_k}, \quad \forall k. \tag{3.38}$$

Berücksichtigen wir weiters, daß $\partial U/\partial \dot{q}_k = 0$ ist, so können wir (3.37) in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k}$$

umformen. Wir führen die LAGRANGE-*Funktion*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) - U(\mathbf{q},t) \tag{3.39}$$

ein, und erhalten die LAGRANGE-Gleichungen der zweiten Art in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial q_k}, \quad \forall\, k. \tag{3.40}$$

Die LAGRANGE-Funktion wurde als Differenz von kinetischen und potentiellen Energien eingeführt, wobei T und U als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten anzusehen sind. Da man aber verschiedene verallgemeinerte Koordinaten für ein bestimmtes System einführen kann, liegt $\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ nicht eindeutig fest.

Die Gleichungen (3.40) stellen ein System von f Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Bahnkurven $q_k(t)$ dar. Es sind dies die bevorzugten Gleichungen zur Lösung von Problemen der Mechanik. Dies hat folgende Gründe:

(1) Im Vergleich zu den LAGRANGE-Gleichungen erster Art haben wir es nur mit $f = 3N - r$ anstelle von $3N + r$ Gleichungen zu tun. Aufgrund dieser Vereinfachung können wir aber die Zwangskräfte nicht bestimmen.

(2) Für komplexe Systeme ist die Aufstellung der LAGRANGE-Funktion viel einfacher als die Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Dies liegt vor allem daran, daß die LAGRANGE-Funktion eine *skalare* Größe ist.

(3) Die LAGRANGE-Funktion ist im allgemeinen eine besonders einfache Funktion der in Frage kommenden Variablen. Dies ist ein wichtiger Gesichtspunkt für die Entwicklung neuer physikalischer Theorien. (Modellbildung in der theoretischen Physik.)

Benötigt man dennoch die Zwangskräfte, so bietet sich folgende Vorgangsweise an:

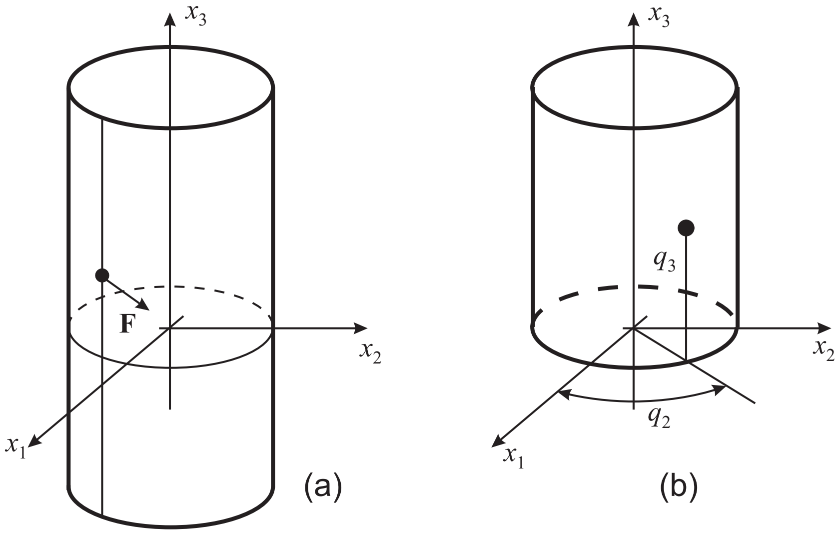


Abbildung 3.2: Ein Massenpunkt m bewegt sich auf der Zylinderfläche unter dem Einfluß einer harmonischen Zentralkraft. (a) Skizze der Situation, (b) Wahl der verallgemeinerten Koordinaten.

(a) Löse das Bewegungsgproblem mit Zwangsbedingungen unter Verwendung der LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art.

(b) Stelle die LAGRANGE-Gleichungen erster Art auf, setze die Lösung von Schritt (a) ein und bestimme die LAGRANGE-Mulktiplikatoren und damit die Zwangskräfte.

3.3.4 Ein Beispiel

Wir wollen die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art in der Form (3.37) für die Berechnung des Bewegungsablaufs eines Massenpunktes der Masse m, der sich auf einer Zylinderfläche

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$$

unter dem Einfluß einer harmonischen Zentralkraft

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

bewegt, verwenden. Der Kraftvektor **F** zeigt also zu jedem Zeitpunkt auf den Koordinatenursprung, wie in Abb. 3.2a dargestellt wurde.

Es sind nun die verallgemeinerten Koordinaten zu wählen. Die beste Wahl orientiert sich in den meisten Fällen an der Symmetrie des Problems und an den Zwangsbedingungen. Hier wählt man günstig

$$q_1 = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0,$$

und wegen der Zylindersymmetrie des Problems Zylinderkoordinaten (siehe Anhang A, Abschnitt A.1.2)

$$\begin{aligned} q_2 &= \arctan\frac{x_2}{x_1} \\ q_3 &= x_3, \end{aligned} \tag{3.41}$$

wie in Abb. 3.2 angedeutet wurde. Wegen $q_1 = 0$ gilt die Rücktransformation

$$x_1 = R\cos\, q_2, \quad x_2 = R\sin\, q_2, \quad x_3 = q_3,$$

und es folgt weiter

$$\dot{x}_1 = -R\dot{q}_2\sin\, q_2, \quad \dot{x}_2 = R\dot{q}_2\cos\, q_2, \quad \dot{x}_3 = \dot{q}_3. \tag{3.42}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2 = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right).$$

Wir benötigen noch die Ableitungen der kinetischen Energie:

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial q_3} = 0,$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= mR^2\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = mR^2\ddot{q}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= m\dot{q}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) = m\ddot{q}_3. \end{aligned}$$

Schließlich ist noch die verallgemeinerte Kraft zu bestimmen. Dazu benötigt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} &= -R\sin q_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial q_2} = R\cos q_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial q_2} = 0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} &= 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial q_3} = 1. \end{aligned}$$

Die verallgemeinerte Kraftkomponente Q_1 verschwindet, da q_1 in (3.41) nicht auftritt. Die anderen Komponenten erhält man mit

$$\begin{aligned} Q_2 &= \sum_{i=1}^{3} F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_2} = -k\sum_{i=1}^{3} x_i\frac{\partial x_i}{\partial q_2} \\ &= -k\left[(R\cos q_2)(-R\sin q_2) + (R\sin q_2)(R\cos q_2) + 0\right] \\ &= 0, \\ Q_3 &= \sum_{i=1}^{3} F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_3} = -k\sum_{i=1}^{3} x_i\frac{\partial x_i}{\partial q_3} = -k\,q_3. \end{aligned}$$

Damit folgen aus (3.37) die sehr einfachen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{q}_2 &= 0, \\ m\ddot{q}_3 + kq_3 &= 0, \end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} q_2(t) &= c_1 + c_2 t \\ q_3(t) &= c_3 \cos\omega_0 t + c_4 \sin\omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

q_2 ist dabei der Polarwinkel des Punktes am Zylindermantel. Die Winkelbewegung ist uniform. q_3 entspricht der x_3-Koordinate und bezeichnet die Position des Massenpunktes relativ zur (x_1, x_2)-Ebene. Die Bewegung ist eine Schwingung des Massenpunktes auf dem Zylindermantel.

Wir wählen nun noch Anfangsbedingungen, etwa $q_2(0) = 0$ und $q_3(0) = h$. Weiters wählen wir eine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ parallel zur x_2-Achse. Damit folgt aus (3.42)

$$\dot{q}_2(0) = \frac{v_0}{R}, \quad \dot{q}_3(0) = 0.$$

Damit ergeben sich aus (3.43) die Bewegungsgleichungen

$$q_2(t) = \frac{v_0}{R} t, \quad q_3(t) = h\cos\omega_0 t.$$

Es folgt für $h = 0$ eine uniforme Kreisbewegung das Massenpunkts und für $v_0 = 0$ und $h \neq 0$ eine harmonische Oszillation des Massepunkts um den Punkt $\mathbf{r} = (R, 0, h)$ in x_3-Richtung. Im allgemeinen Fall ist der uniformen Kreisbewegung noch eine Oszillation in x_3-Richtung überlagert. Stimmen Umlauffrequenz $\omega = v_0/R$ und Oszillatorfrequenz ω_0 nicht überein, so ist die Bahn des Massenpunkts nicht geschlossen.

3.3.5 Erhaltungsgrößen

Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ hängt von allen verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten sowie von der Zeit ab. In speziellen Fällen kann $\mathcal{L}$ von einer oder mehrereren Koordinaten oder von der Zeit unabhängig sein. Diese Möglichkeiten wollen wir nun studieren.

Energieerhaltung

Wir bestimmen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k-\mathcal{L}\right) &= \sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}+\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k \\
&\quad -\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k-\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left[\dot{q}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\
&\overset{(3.40)}{=} -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Hieraus folgt der Erhaltungssatz

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0 \quad\rightarrow\quad \sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}-\mathcal{L}=\text{konst.} \tag{3.45}
$$

Hängen die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit ab, dann ist die kinetische Energie von der Form (3.33). Hängt zudem $U = U(\mathbf{q}, t)$ nicht von der Geschwindigkeit ab, so gilt

$$
\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k=2T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \qquad \frac{\partial x_n}{\partial t}=0,\, U=U(\mathbf{q},t),
$$

und (3.45) wird zum Erhaltungssatz

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial x_n}{\partial t} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad\rightarrow\quad E := T+U=\text{konst.} \tag{3.46}
$$

Durch $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ wird ferner U auf $U = U(\mathbf{q})$ eingeschränkt. (3.46) gibt hinreichende, aber nicht notwendige Bedingungen für die Energieerhaltung an.

Zyklische Koordinaten

Definition 3.5 *Die Koordinate* q_k *heißt* zyklisch*, wenn sie in der* Lagrange-*Funktion nicht explizit auftritt, also*

$$
\frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial q_k}=0
$$

erfüllt ist.

Aus den Bewegungsgleichungen (3.40) folgt dann, daß der zugehörige *verallgemeinerte Impuls*

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.47}$$

erhalten ist. Es gilt nämlich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} p_k = 0 \quad \rightarrow \quad p_k = \text{konst.} \tag{3.48}$$

Ein triviales Beispiel ist das freie Teilchen mit $T = m\dot{\mathbf{r}}^2/2$ und $U = 0$. Damit hängt $\mathcal{L}$ nicht von $\mathbf{r}$ ab und der Impuls $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ ist konstant.

Verallgemeinerte Potentiale

Unter gewissen Bedingungen ist die Benützung der LAGRANGE-Funktion möglich, auch wenn die Kräfte nicht konservativ sind. Wir illustrieren dies anhand einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft $\mathbf{F}^{\text{diss}} = -\sum_i \kappa_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i$. Für diese ergeben sich die verallgemeinerten Kräfte entsprechend (3.36):

$$\begin{aligned}
Q_k^{\text{diss}} &= \sum_{i=1}^{3} F_i^{\text{diss}} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3} \kappa_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\
&\overset{(3.30)}{=} -\sum_{i=1}^{3} \kappa_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\kappa_i}{2} \dot{x}_i^2 \right] .
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis legt es nahe die *(*RAYLEIGH*sche) Dissipationsfunktion*

$$R = \sum_{i=1}^{3} \frac{\kappa_i}{2} \dot{x}_i^2 = R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

einzuführen, sodaß die LAGRANGE-Gleichungen (3.37) in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \forall\, k \tag{3.49}$$

geschrieben werden können. Sie besteht aus einem konservativen und einem dissipativen Anteil.

Es folgt allgemein:

Satz 3.1 *Ist es möglich eine Potentialfunktion*

$$U^* = U^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

zu definieren, so daß die generalisierten Kräfte in der Form

$$Q_k = -\left[\frac{\partial U^*}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_k} \right) \right]$$

geschrieben werden können, dann kann man die Lagrange-*Gleichungen in der Form* (3.40) *mit*

$$\mathcal{L} = T - U^*$$

benützen. Die Größe U^* bezeichnet man als das verallgemeinerte Potential.

Die Hamilton-Funktion

Wir beschränken uns jetzt, der Einfachheit halber, auf ein System mit nur einem Massenpunkt. Die Lagrange-Funktion (3.39) ist dann eine Funktion von bis zu sieben Variablen und wir erhalten für ihre totale Ableitung nach der Zeit

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{3.50}$$

Wir verwenden weiters die Lagrange-Gleichung zweiter Art (3.40) und erhalten nach Multiplikation mit $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \dot{q}_k,$$

und setzen dies in (3.50) ein. Dies ergibt:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Wir verwenden nun noch den verallgemeinerten Impuls entsprechend der Definition (3.47) und finden das Ergebnis:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{f} p_k \, \dot{q}_k - \mathcal{L} \right] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{3.51}$$

Dies erlaubt die Einführung einer weiteren zentralen Größe der klassischen Mechanik:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{f} p_k \, \dot{q}_k - \mathcal{L}. \tag{3.52}$$

Es ist dies die Hamilton-*Funktion*. Sie hat zwei Eigenschaften: (1) sie hat, wie die Lagrange-Funktion die Dimension einer Energie, und (2) ist die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängig, so ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \overset{(3.51)}{\rightarrow} \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0). \tag{3.53}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die HAMILTON-Funktion der Gesamtenergie des Systems entspricht, wenn das System konservativ ist, und wenn die Transformation zwischen kartesischen und verallgemeinerten Koordinaten (3.23) nicht explizit von der Zeit abhängt, wenn also

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0, \forall k \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0, \; i = 1,2,3 \tag{3.54}$$

gilt. Unter diesen Voraussetzungen gilt zunächst

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k,$$

und wir erhalten für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k,l=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

wie auch bereits in Gleichung (3.33) angedeutet wurde. Die $\dot{q}_k$ sind dabei die verallgemeinerten Geschwindigkeiten und damit ist die kinetische Energie eine homogene Funktion zweiten Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und der EULERsche Satz 2.7 (Seite 38) ist anwendbar:

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

Da des weiteren nach Voraussetzung $\partial U / \partial \dot{q}_k = 0$ gilt, ist der verallgemeinerte Impuls (3.47) nur durch die Ableitung der kinetischen Energie bestimmt:

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

und daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^{f} p_k \, \dot{q}_k = 2T.$$

Daraus folgt für die HAMILTON-Funktion:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{f} p_k \, \dot{q}_k - \mathcal{L} = 2T - T + U = T + U = E. \tag{3.55}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{H}$ unter den genannten Bedingungen tatsächlich gleich der Gesamtenergie des Systems ist.

Die Voraussetungen (3.54) sind hinreichend aber nicht notwendig. $\mathcal{H}$ kann auch die Gesamtenergie darstellen, ohne daß die Kräfte konservativ oder die Transformationsgleichungen unabhängig von der Zeit sind. Die Frage ob $\mathcal{H}$ der Gesamtenergie entspricht ist weiters unabhängig davon ob $\mathcal{H}$ eine Konstante der Bewegung ist oder nicht. Sie kann auch eine Erhaltungsgröße sein ohne der Gesamtenergie zu entsprechen. Schließlich soll noch angemerkt werden, daß Gleichung (3.55) auch als LEGENDRE-*Transformation* bezeichnet wird.

Ein Beispiel

Wir betrachten ein System ohne Zwangsbedingungen mit einem Massenpunkt, welcher einem Kraftfeld ausgesetzt ist. Dieses Kraftfeld wird von einem Potential $U(\mathbf{r})$ abgeleitet. Wir wollen zur Beschreibung Kugelkoordinaten (siehe Anhang A, Abschnitt A.1.3) verwenden. Es gelten daher die Transformationsgleichungen (A.7). Daraus ergibt sich dann, wegen (A.8) für die LAGRANGE-Funktion

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(\rho,\vartheta,\varphi). \tag{3.56}$$

Wir berechnen weiters die verallgemeinerten Impulse entsprechend (3.47):

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = m\rho^2\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}.$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß das Teilchen unter dem Einfluß einer Zentralkraft steht und damit gilt $U(\rho,\vartheta,\varphi) = U(\rho)$. Es folgt dann für die HAMILTON-Funktion entsprechend (3.55)

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - \mathcal{L} \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + U(\rho) = E.\end{aligned}$$

Entsprechend der Definition 3.5 ist φ eine zyklische Variable und damit gilt

$$p_\varphi = \text{konst} \quad \to \quad p_\varphi(t) = p_\varphi(0). \tag{3.57}$$

Wählen wir das Koordinatensystem nun so, daß der Massenpunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der x_3-Achse liegt, so folgt damit auch $\vartheta(0) = 0$ und damit $\sin\vartheta(0) = 0$. Dies führt zu $p_\varphi(t) = p_\varphi(0) = 0$. Diese Gleichung kann aber für Zeiten $t > 0$ nur erfüllt sein, wenn $\dot{\varphi} = 0$ ist. [Es sei denn es findet überhaupt keine Bewegung statt, wovon wir aber nicht ausgehen wollen, oder der Massenpunkt bewegt sich entlang der x_3-Achse, also $\vartheta(t) = 0$.] Ist $\dot{\varphi} = 0$, so findet die Bewegung in einer Ebene statt, welche die x_3-Achse und die Gerade

$x_1 = x_2 \tan\varphi$ enthält. Die Bewegung ist also eine ebene Bewegung. Für diese Wahl des Koordinatensystems vereinfacht sich die LAGRANGE-Funktion (3.56) zu

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\vartheta^2\right) - U(\rho),$$

und wir sehen, daß der Winkel ϑ ebenfalls eine zyklische Variable ist. Damit ist der entsprechende verallgemeinerte Impuls eine Erhaltungsgröße

$$p_\vartheta = m\,\rho^2\,\dot\vartheta \overset{(2.33)}{=} \ell = \text{konst.}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Flächensatz, wie er in Zusammenhang mit Gleichung (2.33) besprochen wurde.

3.4 Das HAMILTON-Prinzip

Axiom 3.1 *Einem mechanisches System mit f Freiheitsgraden*

$$\mathbf{q} = \{q_k \,|\, k = 1, \ldots, f\}$$

sei eine LAGRANGE-*Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ zugeordnet. Weiters sei die physikalische Bahnkurve (also die Lösung der Bewegungsgleichungen)*

$$\mathbf{q}(t) = \{q_k(t) \,|\, k = 1, \ldots, f\}$$

im Intervall $t_1 \le t \le t_2$ gegeben. Sie nimmt die Randwerte $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{a}$ und $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{b}$ an. Diese Bahnkurve macht das Wirkungsintegral

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{3.58}$$

extremal.

(Man spricht von einem Wirkungsintegral deshalb, weil man das Produkt aus Energie und Zeit als *Wirkung* bezeichnet.)

Wir haben also ein Variationsproblem vorliegen, wie es im Anhang A, Abschnitt A.3 besprochen wird. Wir können daher das Axiom 3.1 auch anders formulieren, indem wir fordern, daß die Variation des Wirkungsintegrales im betrachteten Zeitintervall verschwinden muß, also:

$$\delta\,S[\mathbf{q}] = 0. \tag{3.59}$$

Entsprechend Gleichung (A.34) führt dieses Variationsproblem zu folgendem System EULERscher Gleichungen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}\right) = 0, \quad \forall\, k. \tag{3.60}$$

Diese entsprechen aber den LAGRANGE-Gleichungen (3.40) und wir sehen, daß das HAMILTON-Prinzip eine alternative Formulierung des NEWTONschen Axioms 2.2 ist. Es besagt im wesentlichen, daß die Bewegung so abläuft, daß die Bahnkurve die Wirkung *stationär* macht. (Die Variation des Wirkungsintegrals gegenüber Veränderungen der Bahnkurve ist ja Null.) Dabei ist es nicht wichtig ob es sich beim stationären Punkt um ein Extremum handelt oder nicht. In konkreten Anwendungen macht aber die Lösung der LAGRANGE-Gleichungen $S[\mathbf{q}]$ im allgemeinen minimal, weshalb das HAMILTON-Prinzip auch das *Prinzip der kleinsten Wirkung* genannt wird.

Wir betrachten nun das Variationsproblem

$$\delta\, S[\mathbf{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0,$$

mit r Nebenbedingungen $g_\alpha(\mathbf{q}, t) = 0$. Entsprechend Gleichung (A.38) ist dann die Funktion

$$\mathcal{L}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha(t) g_\alpha(\mathbf{q}, t)$$

zu bilden und das Variationsproblem

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$$

mit den EULERschen Gleichungen (A.39) als Lösung, entspricht unmittelbar den LAGRANGE-Gleichungen erster Art entsprechend Gleichung (3.22).

3.4.1 Die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen

Entsprechend (3.52) ist die HAMILTON-Funktion mit der LAGRANGE-Funktion über die LEGENDRE-*Transformation*

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{f} p_k\, \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

verknüpft. Wir wollen nun einen Satz von Bewegungsgleichungen ableiten, welcher auf die Grundgrößen $q_k(t)$ und $p_k(t)$ Bezug nimmt. Dazu bilden wir zunächst das totale Differential der HAMILTON-Funktion:

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_k p_k\, d\dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k\, dp_k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &\overset{(3.47)}{=} \sum \dot{q}_k\, dp_k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Wir benützen nun (3.60) in Verbindung mit (3.47) und erhalten

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k},$$

was dann

$$d\mathcal{H} = \sum_k \dot{q}_k \, dp_k - \sum_k \dot{p}_k \, dq_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{3.61}$$

ergibt. Damit ist $\mathcal{H}$ offensichtlich eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse und, gegebenenfalls, der Zeit. Die LEGENDRE-Transformation vermittelt also einen Übergang von einer Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten ($\mathcal{L}$) auf eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse ($\mathcal{H}$). Wir benutzen dies nun und erhalten:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \rightarrow \quad d\mathcal{H} = \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \tag{3.62}$$

Durch Vergleich mit (3.61) erhält man dann die HAMILTON*schen Bewegungsgleichungen*:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{3.63}$$

Diese Gleichungen sind wieder den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art äquivalent. Sie spiegeln nur ein Standardtheorem aus der Theorie der Differentialgleichungen wieder. Dieses besagt: Man kann ein System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung für n Funktionen stets in ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $2n$ Funktionen umschreiben.

3.4.2 Die POISSON-Klammern

Sie sind ein Hilfsmittel, mit welchem man die zeitlichen Änderungen physikalischer Größen in kompakter Form darstellen kann. Sie sind ein wichtiges Bindeglied zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik.

Definition 3.6 *Für zwei beliebige Größen*

$$u = u(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \textit{und} \quad v = v(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

definieren wir die POISSON-*Klammer als:*

$$\{u, v\} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right). \tag{3.64}$$

Aus dieser Definition folgt

$$\{u, v\} = -\{v, u\}\,, \tag{3.65}$$

und die JACOBI-Identität

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0, \tag{3.66}$$

welche unter Verwendung der Definition (3.64) recht mühsam bewiesen werden kann. Von besonderem Interesse sind die fundamentalen POISSON-Klammern:

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}, \quad \{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0, \quad \forall\, k, l, \tag{3.67}$$

mit dem KRONECKER-Symbol

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l, \\ 0 & k \neq l. \end{cases}$$

Wir bestimmen nun

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial u}{\partial p_k}\dot{p}_k \right) \\ &\overset{(3.63)}{=} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right) \\ &\overset{(3.64)}{=} \frac{\partial u}{\partial t} + \{u, \mathcal{H}\}\,. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Insbesonders finden wir

$$\dot{q}_k = \{q_k, \mathcal{H}\}\,, \quad \dot{p}_k = \{p_k, \mathcal{H}\} \tag{3.69}$$

als symmetrische Form der HAMILTONschen Bewegungsgleichungen.

3.5 Raum-Zeit Symmetrien

Unter Symmetrie versteht man Invarianz unter bestimmten Operationen. Wir gehen bei unseren Untersuchungen von einem Inertialsystem (x_1, x_2, x_3) und der Zeit t aus und betrachten die Operation

$$x_i \to x_i', \quad t \to t', \tag{3.70}$$

dabei sollen die x_i', t' und die x_i, t durch eine GALILEI-Transformation (2.100) verknüpft sein:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j - v_i\, t - a_i, \quad t' = t - t_0. \tag{3.71}$$

(3.70) und (3.71) werden folgende Operationen beschreiben:

1. Zeitliche Verschiebung um einen konstanten Betrag t_0.
2. Räumliche Verschiebung um einen konstanten Vektor $\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$.
3. Räumliche Verschiebung um drei konstante Winkel (in α_{ij} enthalten).
4. Räumliche Verschiebung um den zeitabhängigen Vektor $\mathbf{v}t = t \sum_i v_i \mathbf{e}_i$.

Äußere Einflüße auf ein System führen im allgemeinen dazu, daß das System nicht invariant unter den angeführten Operationen ist. Wir wollen jetzt aber den Einfluß solcher Operationen auf ein abgeschlossenes System von N Teilchen untersuchen, welches von der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} U_{ij} \left(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \right) \tag{3.72}$$

beschrieben wird. Besitzt $\mathcal{L}$ eine solche Raum-Zeit Symmetrie, so können wir erwarten eine Erhaltungsgröße aufzufinden.

Homogenität in der Zeit

Wir beginnen mit zeitlichen Verschiebungen

$$\mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i, \qquad t \quad \rightarrow \quad t' = t + \varepsilon, \tag{3.73}$$

mit ε einer Konstanten. Wegen $dt' = dt$ gilt $\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ und daraus folgt

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\ldots, \mathbf{r}'_i, \ldots, \dot{\mathbf{r}}'_i, \ldots; t') = \mathcal{L}(\ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_i, \ldots; t + \varepsilon). \tag{3.74}$$

Die Lagrange-Funktion (3.72) eines abgeschlossenen Systems hängt aber nicht von der Zeit ab, also folgt unter der Transformation (3.73)

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0.$$

Damit ist aber $\mathcal{L}'_0$ von ε unabhängig, also $\partial \mathcal{L}'_0 / \partial \varepsilon = 0$. Wir wollen nun zeigen, daß $d\mathcal{L}'_0 / d\varepsilon$ von der Form dQ/dt ist, womit Q eine Erhaltungsgröße ist. Wir werden also folgendes Schema entwickeln:

$$\left. \frac{d\mathcal{L}'_0}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad Q = \text{konst.}$$

Es gilt für die Zeittranslation (3.73)

$$\begin{aligned} 0 = \left. \frac{d\mathcal{L}'_0}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &\overset{(3.74)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial t} \overset{(3.44)}{=} \frac{d}{dt} \left[\mathcal{L}_0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i \right] \\ &\overset{(3.46)}{=} -\frac{d}{dt} \left(T + U \right), \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i} := \operatorname{grad}_i \mathcal{L}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j^{(i)}} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3} x_j^{(i)} \mathbf{e}_j.$$

Es gilt also der Erhaltungssatz der Energie und somit ist die Energie eines abgeschlossenen Systems diejenige Erhaltungsgröße, welche sich aus der Homogenität der Zeit ergibt.

$$\boxed{\text{Homogenität der Zeit} \quad \rightarrow \quad \text{Energieerhaltung.}}$$

Homogenität des Raums

Wir betrachten eine räumliche Verschiebung

$$\mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon\, \mathbf{n}, \qquad t \quad \rightarrow \quad t' = t, \tag{3.75}$$

mit $\mathbf{n}$ einem konstanten, aber beliebigen Vektor. Dies ergibt für eine allgemeine LAGRANGE-Funktion die Transformation

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\ldots,\mathbf{r}'_i,\ldots,\dot{\mathbf{r}}'_i,\ldots;t') = \mathcal{L}(\ldots,\mathbf{r}_i + \varepsilon\,\mathbf{n},\ldots,\dot{\mathbf{r}}_i,\ldots;t). \tag{3.76}$$

Da $d\dot{\mathbf{r}}'_i = d\dot{\mathbf{r}}_i$ ist, ändern sich die Geschwindigkeiten nicht. Dies gilt auch für die Koordinatendifferenzen $\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$. Die LAGRANGE-Funktion (3.72) des konservativen Systems wird unter der Transformation (3.75) invariant sein, und es gilt wieder

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0.$$

Dies bedeutet

$$0 = \left.\frac{d\mathcal{L}'_0}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \overset{(3.76)}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathbf{r}_i}\mathbf{n} \overset{(3.40)}{=} \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}\mathbf{n} \overset{(3.47)}{=} \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i\,\mathbf{n} = \frac{d(\mathbf{P}\,\mathbf{n})}{dt}, \tag{3.77}$$

mit $\mathbf{P}$ dem Gesamtimpuls des Systems. (3.77) gilt für beliebige (feste) Richtungen von $\mathbf{n}$, sodaß aus (3.77) $\mathbf{P} = \mathbf{konst}$ folgt. Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems wird als Erhaltungsgröße identifiziert, welche sich aus der Homogenität des Raumes ergibt.

$$\boxed{\text{Homogenität des Raumes} \quad \rightarrow \quad \text{Impulserhaltung.}}$$

Isotropie des Raumes

Wir betrachten eine infinitesimale Drehung um einen konstanten Winkel ε, die Drehachse sei durch den Einheitsvektor $\mathbf{n}$ festgelegt. [Siehe Abb. 2.11c und Gleichung (2.109).] Wir verwenden die Transformation:

$$\mathbf{r}_i \quad \to \quad \mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \varepsilon\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i)\,, \qquad t \quad \to \quad t' = t. \tag{3.78}$$

ε und $\mathbf{n}$ sind zeitunabhängig und damit gilt für die Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{r}}_i \quad \to \quad \dot{\mathbf{r}}_i' = \dot{\mathbf{r}}_i + \varepsilon\,(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_i)\,. \tag{3.79}$$

Für eine allgemeine LAGRANGE-Funktion gilt dann die Transformation

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\ldots,\mathbf{r}_i',\ldots,\dot{\mathbf{r}}_i',\ldots;t') = \mathcal{L}(\ldots,\mathbf{r}_i+\varepsilon\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i)\,,\ldots,\dot{\mathbf{r}}_i+\varepsilon\,(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_i)\,,\ldots;t). \tag{3.80}$$

Aus (3.78) und (3.79) folgt:

$$(\dot{\mathbf{r}}_i')^2 = \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_k')^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Die Transformation (3.78) gilt nur für infinitesimales ε und damit kann man die Terme $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ vernachlässigen. Da $\mathcal{L}_0$ entsprechend (3.72) nur von $\dot{\mathbf{r}}_i$ und von den Abständen $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$ abhängt gilt auch in diesem Fall

$$\mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0.$$

Wir erhalten nunmehr:

$$\begin{aligned}
0 = \left.\frac{d\mathcal{L}_0'}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &\overset{(3.80)}{=} \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\mathbf{r}_i}(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}\right)(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i\,(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_i)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{n}\,(\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i) = \frac{d\,(\mathbf{n}\,\mathbf{L})}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Dabei ist $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i)$ der Gesamtdrehimpuls des Systems. Da (3.81) für beliebige (konstante) Drehrichtungen $\mathbf{n}$ gilt, folgt unmittelbar $\mathbf{L} = \mathbf{konst}$. Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems wird als diejenige Erhaltungsgröße identifiziert, welche sich aus der Isotropie des Raums ergibt.

$$\boxed{\text{Isotropie des Raumes} \quad \to \quad \text{Drehimpulserhaltung.}}$$

Relativität

Das Relativitätsprinzip besagt, daß relativ zueinander bewegte Inertialsysteme gleichwertig sind. Unter dem Gesichtspunkt der Galilei-Transformation bedeutet dies, daß ein System und ein relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes System sich gleich verhalten. Wir betrachten die Transformation

$$\mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{n}\varepsilon\, t, \qquad t \quad \rightarrow \quad t' = t. \tag{3.82}$$

$\mathbf{n}$ ist dabei ein Eiheitsvektor in beliebiger (konstanter) Richtung und wir führen einen Vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\mathbf{n}$ ein. Aus (3.82) folgt weiter

$$\dot{\mathbf{r}}_i \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Wir untersuchen nun wieder die Lagrange-Funktion (3.72). Die Differenzen der Ortsvektoren sind invariant unter der Transformation (3.82) und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_0 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\mathbf{r}}'_i\right)^2 - U' \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\varepsilon}\right)^2 - U \\
&= \mathcal{L}_0 + \sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i\, \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\varepsilon}^2.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$\mathcal{L}_0$ ist offensichtlich nicht mehr invariant und wir können keine Erhaltungsgröße ableiten. Die Invarianz wird bereits für das freie Teilchen verletzt ($U = 0$), aber Invarianz gegenüber der Transformation (3.82) galt für das Axiom 2.1. Die Lagrange-Gleichungen haben wir auf Basis dieses Newtonschen Axioms abgeleitet und ganz speziell sind für das freie Teilchen die Gleichungen (3.83) äquivalent zu Axiom 2.1. Die Lagrange-Gleichungen genügen daher dem Relativitätsprinzip und man kann sich leicht selbst davon überzeugen, daß $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}'_0$ *gleichwertig*, wenn auch nicht gleich sind.

Angesichts der Äquivalenz von $\delta \int dt\mathcal{L} = 0$ und den Bewegungsgleichungen, ist es unmittelbar einsichtig, daß eine gegebene Lagrange-Funktion gleichwertig zu $\mathcal{L}' = \text{konst} \cdot \mathcal{L}$ oder zu $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \text{konst}$ ist. Eine wichtige Klasse von gleichwertigen Lagrange-Funktionen ergibt sich aus den sogenannten *Eichtransformationen.* Dabei wird zu $\mathcal{L}$ die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(\mathbf{q}, t)$ addiert:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t). \tag{3.84}$$

Das Wirkungsintegral für $\mathcal{L}'$ lautet

$$S'[\mathbf{q}] = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}' = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L} + f(\mathbf{q}(t_b), t_b) - f(\mathbf{q}(t_a), t_a).$$

Wir variieren nun die Bahnen $\mathbf{q}(t)$ und erhalten

$$\delta\, S' = \delta\, S + \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_{t_b} \delta\, q_i(t_b) - \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_{t_a} \delta\, q_i(t_a) = \delta\, S,$$

da die Randwerte $\mathbf{q}(t_a)$ und $\mathbf{q}(t_b)$ bei der Variation festgehalten werden, also $\delta\, \mathbf{q}(t_a) = \delta\, \mathbf{q}(t_b) = 0$ gilt. Somit sind die Bedingungen $\delta\, S' = 0$ und $\delta\, S = 0$ gleichwertig und führen zu denselben Bewegungsgleichungen. Ganz offensichtlich ist, wie man unschwer aus Gleichung (3.83) ersehen kann, daß die Galilei-Transformation eine solche Eichtransformation ist, da (3.83) als

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left[m_i\, \mathbf{r}_i \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\, m_i\, \boldsymbol{\varepsilon}^2 t \right]$$

geschrieben werden kann.

Solche Eichtransformationen sind von besonderer Bedeutung in der Elektrodynamik und in der Quantenfeldphysik.

3.6 Das Noether-Theorem

Der Zusammenhang zwischen den Symmetrien der Raum-Zeit von Inertialsystemen und Erhaltungsgrößen wurde im vorhergehenden Abschnitt untersucht. Auf der Grundlage des Hamilton-Prinzips kann der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen in großer Allgemeinheit formuliert werden:

> *Jede einparametrige Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgröße.*

Dieser Zusammenhang wurde von der Mathematikerin Emmy Noether abgeleitet.

Wir gehen von Hamilton-Prinzip

$$\delta\, S[\mathbf{q}] = \delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$$

aus. Wir betrachten nun Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit, welche von einem kontinuierlichen Parameter ε abhängen:

$$\begin{aligned} q_k \quad \rightarrow \quad q'_k(t') &= \Psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t; \varepsilon) = q_k + \varepsilon \psi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ t \quad \rightarrow \quad t'(t) &= \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t; \varepsilon) = t + \varepsilon \phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dieser allgemeine Ansatz läßt zu, daß die transformierten Größen von den verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten und von der Zeit abhängen. Wir beschränken uns nun auf infinitesimale Transformationen, also etwa die infinitesimale Drehung um eine feste Achse und damit können wir die Terme $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ vernachlässigen. Die Transformation (3.73) ergibt sich dann aus $\phi = 1$ und $\psi_k = 0$. $\varepsilon = 0$ ist die triviale Transformation und $q'_k = q_k$ für $\varepsilon \neq 0$ sagt aus, daß die Bahnkurve selbst bei der Transformation unverändert bleibt.

Wir vergleichen nun die Wirkung $S[\mathbf{q}(t)]$ für die Bahnen $\mathbf{q}(t)$ und die Randwerte t_a und t_b mit der Wirkung $S' = S[\mathbf{q}'(t')]$, welche sich für die Bahnen $\mathbf{q}'(t')$ und die entsprechenden Randwerte t'_a und t'_b ergibt. Ist

$$S' = \int_{t'_a}^{t'_b} dt' \, \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = S = \int_{t_a}^{t_b} dt \, \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{3.86}$$

so ist die Wirkung *invariant* unter den Transformationen (3.85). Da die Wirkung S die Bewegungsgleichungen festlegt, ist $S' = S$ der mathematische Ausdruck für die Symmetrie des durch $\mathcal{L}$ beschriebenen Systems unter der betrachteten Transformation. Wir formen nun (3.86) um

$$\int_{t'_a}^{t'_b} dt' \, \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = \int_{t_a}^{t_b} dt \, \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') \frac{dt'}{dt} \tag{3.87}$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} dt \, \left\{ \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \left[\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') \frac{dt'}{dt} \right]_{\varepsilon=0} \right\},$$

und es ist für die Invarianzbeziehung (3.86) notwendig und hinreichend wenn

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') \frac{dt'}{dt} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3.88}$$

erfüllt ist. Dies ist die *Invarianzbedingung.*

Aus dieser Bedingung leiten wir nun eine Erhaltungsgröße $Q = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) =$ konst ab. Dazu verwenden wir die EULER-Gleichungen (3.60), womit die abzuleitende Aussage nur für die tatsächlichen Bahnkurven $\mathbf{q}(t)$ gilt. Aus (3.85) folgt:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{d\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{d\phi}{dt}, \tag{3.89}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dq_k'}{dt'} &= \frac{dq_k'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left(\dot{q}_k + \varepsilon \frac{d\psi_k}{dt}\right)\left(1 - \varepsilon \frac{d\phi}{dt}\right) \\ &= \dot{q}_k + \varepsilon \frac{d\psi_k}{dt} - \varepsilon \dot{q}_k \frac{d\phi}{dt}, \end{aligned} \tag{3.90}$$

wobei wiederum Terme $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ vernachlässigt wurden. Wir werten nun die Invarianzbedingung (3.88) aus:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathcal{L}\left(\ldots, q_k + \varepsilon\psi_k, \ldots, \dot{q}_k + \varepsilon \frac{d\psi_k}{dt} - \varepsilon \dot{q}_k \frac{d\phi\{t}{d,} \ldots ; t + \varepsilon\phi\right)\left(1 + \varepsilon \frac{d\phi}{dt}\right)\right]_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\psi_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\psi_k}{dt} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\phi + \mathcal{L}\frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\psi_k + \left[\mathcal{L} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right]\frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Dieses Ergebnis ist an der Stelle $\varepsilon = 0$ zu nehmen und damit stehen im Argument von $\mathcal{L}$ wieder die nicht transformierten Variablen. Mit (3.44)

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{L} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

erhalten wir aus (3.91):

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\psi_k - \left(\mathcal{L} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\phi\right] = 0.$$

Daraus folgt das Noether-Theorem: Ist die Wirkung (oder korrekter: ein Funktional) $S[\mathbf{q}]$ invariant unter einer einparametrigen Transformationsschar (3.85), so folgt die Erhaltungsgröße

$$Q = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\psi_k - \left(\mathcal{L} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\phi = \text{konst.} \tag{3.92}$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Sie gilt für tatsächliche Bahnen $q_k(t)$ und ist dann ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen. Es gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Symmetrie} & & \text{Erhaltungsgröße} \\ & \xrightarrow{\text{Noether}} & \\ S' = S \quad \text{oder} \quad (3.88) & & Q = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \text{konst} \end{array}} \tag{3.93}$$

Man geht folgendermaßen vor: man schreibt die Funktionen ψ_k und ϕ in (3.85) für die interessierende Transformation an. Dann überprüft man durch Auswertung von (3.88) ob eine Symmetrie bezüglich dieser Transformation vorliegt. Dies hängt natürlich vom $\mathcal{L}$ des zu untersuchenden Systems ab. Ist die Invarianzbedingung erfüllt, dann bestimmt man aus $\mathcal{L}$, ψ_k und ϕ die Erhaltungsgröße Q.

Wir betrachten dies anhand eines einfachen Beispiels: $\mathcal{L}$ hänge nicht explizit von einer bestimmten Koordinate q_k ab, also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_f, t\right).$$

Wir untersuchen die Transformation

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i + \varepsilon\delta_{ik}, \quad & \psi_i &= \delta_{ik} \\ t' &= t, & \phi &= 0. \end{aligned}$$

In $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')$ kommt die k-Komponente nur bei den Geschwindigkeiten vor, und hier gilt

$$\frac{dq_k'}{dt'} = \frac{dq_k}{dt}$$

und damit sind alle Argumente von $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')$ von ε unabhängig und

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt}\right] = \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$$

und die Invarianzbedingung ist erfüllt. Es folgt dann aus (3.92)

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \overset{(3.47)}{=} p_k = \text{konst}. \tag{3.94}$$

Der zur verallgemeinerten Koordinate q_k gehörende verallgemeinerte Impuls p_k ist somit Erhaltungsgröße.

Wir sind bisher von der Invarianzbedingung $S' = S$ ausgegangen. Die Bewegungsgleichungen sind aber der Forderung $\delta\, S = 0$ äquivalent und es genügt daher für die Symmetrie die *schwache Bedingung*: $\delta\, S' = \delta\, S$, also

$$\delta \int_{t_a'}^{t_b'} dt'\, \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = \delta \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{3.95}$$

Nun wissen wir aber, daß zu $\mathcal{L}$ die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(\mathbf{q}, t)$ addiert werden kann, ohne daß dadurch $\delta\, S$ verändert wird. (Siehe auch Seite 73.) Ist also der durch die Transformation entstandene Zusatzterm in (3.87) eine solche totale Zeitableitung

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt}\right] = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t), \tag{3.96}$$

beschrieben, dann ist (3.95) erfüllt. Wir ersetzen nun in der Ableitung, welche zu (3.92) führte (3.88) durch (3.96) und erhalten als Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\psi_k - \left(\mathcal{L} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\phi - f(\mathbf{q}, t) = \text{konst}$$

für die tatsächliche Bewegung.