Kapitel 4

Schwingungen, Oszillatoren

Wenn in einem System ein Teil aus der Ruhelage, z.B. durch einen Stoß, etwas herausgeschoben wird, dann treten meist Kräfte auf, die diesen in die Ruhelage zurücktreiben. Aufgrund der Trägheit der Masse dieses Teiles bleibt dieser aber nicht in der Ruhelage stehen, sodern schießt darüber hinaus. Dabei wachsen die rücktreibenden Kräfte wieder so an, daß diese Masse schließlich wieder umkehrt. Somit kommt es zu Schwingungen um die Ruhelage. Wenn auch Reibung vorhanden ist, wird dieser Schwingungsvorgang früher oder später zur Ruhe kommen (*gedämpfte Schwingung*). Im Idealfall, daß keine Reibung vorhanden ist, kommt es zu einer *ungedämpften Schwingung*.

Oft ist die genaue analytische Form der rücktreibenden Kraft nicht bekannt. Dann behilft man sich mit Reihenentwicklungen (Taylorreihen) um die Ruhelage, berücksichtigt aber meist nur einen Teil der Glieder, nämlich nur die niedrigsten Potenzen. Begnügt man sich mit den linearen Termen, spricht man von einem *harmonischen Oszillator*; werden auch noch höhere Potenzen mitgenommen, spricht man von einem *anharmonischen Oszillator*. Dies sind die einfachsten und wichtigsten Modelle für Schwingungen. Selbst wenn die Kraft genau bekannt ist, ist es oft zweckmäßig mit den gerade beschriebenen Näherungen zu arbeiten.

Wirkt keine äußere Kraft, heißt der Oszillator frei. Wirkt noch eine zusätzliche äußere (meist zeitabhängige) Kraft, dann kommt es zu erzwungenen Schwingungen und dabei kann Resonanz auftreten. In diesem Fall ist es besonders wichtig, die Reibung zu berücksichtigen.

4.1 Eindimensionale Bewegung

Die gerade zuvor besprochene Reihenentwicklung der rücktreibenden Kraft wird hier am eindimensionalen Fall erklärt. Die Kraft sei eine Funktion der Koordinate x, also $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{e}_x$. $f(x)$ wird nun in eine Taylorreihe um die

Gleichgewichtslage x_0 entwickelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3 f'''(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(x-x_0)^4 f^{(4)}(x_0) + \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Weil x_0 die Koordinate der Gleichgewichtslage ist, sind dort die auf die Masse m wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, die resultierende Kraft ist Null, $\Rightarrow$ $f(x_0) = 0$. x_0 sei weiters eine stabile Gleichgewichtslage: Die Kräfte, die bei einer Entfernung der Masse aus der Gleichgewichtslage wirksam werden, wollen die Masse in die Gleichgewichtslage zurücktreiben. Dazu muß gelten:

$$D = -f'(x_0) > 0. \tag{4.2}$$

4.1.1 Lineare Kraft. Harmonischer Oszillator

Wenn vorläufig die höheren Terme in der Entwicklung (4.1) vernachläßigt werden, dann lautet die Kraft:

$$\mathbf{F} = -(x-x_0)D\mathbf{e}_x = -(x-x_0)\mathbf{D}.$$

D heißt die *Direktionskraft*. Die Skala auf der x-Achse wird nun so gewählt, daß der Gleichgewichtspunkt der Nullpunkt ist, also $x_0 = 0$. Damit haben wir folgenden Ausdruck für die Kraft und die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x}\mathbf{e}_x = \mathbf{F} = -xD\mathbf{e}_x, \quad m\ddot{x} = F = -xD.$$

Division durch m und Einführung der Abkürzung $\omega^2 = D/m$ machen aus der obigen Bewegungsgleichung die Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{4.3}$$

Dies ist eine *Schwingungsgleichung*. In diese wird folgender Ansatz für die Lösungsfunktion x eingesetzt:

$$x = Ce^{\lambda t}, \qquad \ddot{x} = C\lambda^2 e^{\lambda t};$$
$$\ddot{x} + \omega^2 x = \left(\lambda^2 + \omega^2\right) C\, e^{\lambda t} = 0.$$

Diese Identität soll für alle Zeiten (innerhalb eines gewissen Zeitintervalls) gelten; $e^{\lambda t} \neq 0$. $C = 0$ ergäbe nur die triviale Lösung ($x \equiv 0$), diese ist uninteressant. Es muß daher gelten:

$$\begin{aligned} \lambda^2 = -\omega^2, &\quad \lambda = \pm i\omega; \\ x_1(t) = C_1\, e^{i\omega t}, &\quad x_2(t) = C_2\, e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

In der Vorlesung über Analysis und Differentialgleichungen wird gezeigt, daß diese beiden Funktionen ein Fundamentalsystem bilden und daher die allgemeine Lösung eine Linearkombination von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist:

$$x(t) = C_1\, e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \tag{4.5}$$

C_1 und C_2 sind willkürliche Konstanten $\in \mathbb{C}$. Für unser Problem sind nur reelle Lösungen von Bedeutung, wir formen daher mittels der EULERschen Identität

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

um:

$$\begin{aligned} x &= C_1\, e^{i\omega t} + C_2\, e^{-i\omega t} \\ &= C_1 \cos(\omega t) + iC_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) - iC_2 \sin(\omega t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i\,(C_1 - C_2) \sin(\omega t). \\ D_1 &:= C_1 + C_2, \qquad D_2 := i\,(C_1 - C_2)\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$x(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t). \tag{4.6}$$

Die allgemeine Lösung kann noch in anderer Form geschrieben werden, nämlich als:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \tag{4.7}$$

Der Übergang zwischen beiden Schreibweisen erfolgt auf folgende Weise

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos\varphi \cos(\omega t) - A \sin\varphi \sin(\omega t) \\ &= D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} D_1 &= A \cos\varphi, \\ D_2 &= -A \sin\varphi, \\ A &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \\ \tan\varphi &= -\frac{D_2}{D_1}. \end{aligned}$$

Die Konstanten C_1, C_2 bzw. D_1, D_2 oder A, φ sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Wir untersuchen eine spezielle Anfangsbedingung: m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ um die Strecke a aus der Ruhelage herausgezogen und wird dann ausgelassen:

$$x(t = 0) = x_0 = a, \quad \dot{x}(t = 0) = 0; \tag{4.8}$$

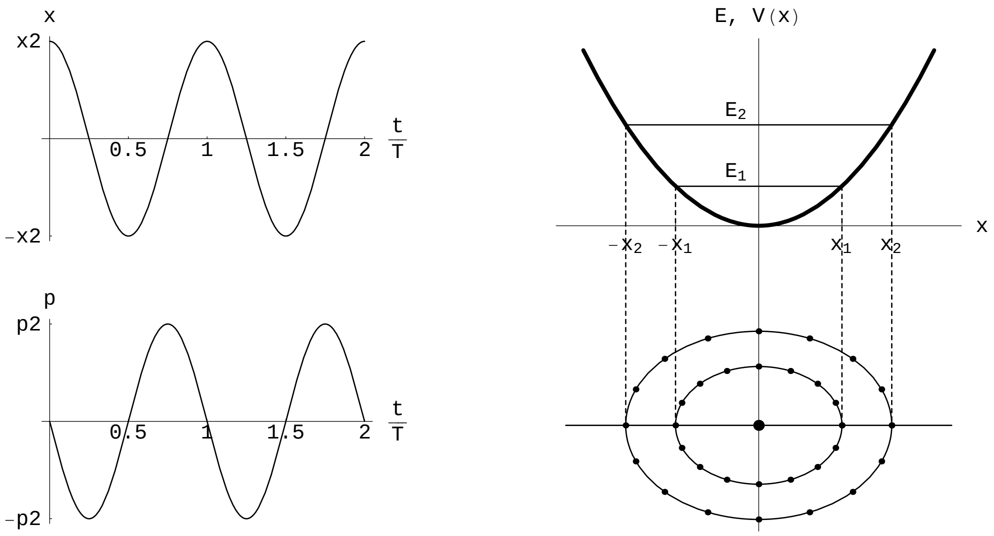


Abbildung 4.1: Lösung der Schwingungsgleichung bei Auslenkung des Massepunktes aus der Ruhelage [Gleichung (4.9)]. Links die Lage und der Impuls als Funktion der Zeit. Rechts oben das Potential, unten die Phasenkurve. Die Punkte schließen den Weg innerhalb gleicher Zeitintervalle ein.

Diese Anfangsbedingung wird in die allg. Lösung eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= D_1 &= a, \\ \dot{x}(t=0) &= \omega D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung zur obigen Anfangsbedingung ist:

$$x(t) = a\cos(\omega t). \tag{4.9}$$

Die Schwingung kann wie in Abb. 4.1 (links) dargestellt werden. Die Kurven geben die Lage $x(t)$ und den Impuls $p(t)$ des Massenpunkts als Funktion der Zeit t an.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $\omega = 2\pi\nu$ heißt die *Kreisfrequenz*, ν ist die *Frequenz* und $T = 1/\nu$ die *Schwingungsdauer*. Alle diese Größen sind durch die Direktionskraft $\mathbf{D}$ und die Masse m festgelegt:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{4.10}$$

Zu anderen Anfangsbedingungen ergeben sich auch andere spezielle Lösungen. Z.B. ergibt sich für die Anfangsbedingung: $t = 0 : x = 0,\ \dot{x} = 0$ die spezielle Lösung $x \equiv 0$. Wenn der Massenpunkt anfänglich im Gleichgewichtspunkt in Ruhe ist, bleibt er es in alle Ewigkeit. Wird hingegen die Masse aus der Ruhelage gestoßen, gibt dies die Anfangsbedingungen: $t = 0 :$

$x = 0$, $\dot{x} = v_0$ und wir erhalten die spezielle Lösung:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \tag{4.11}$$

Wird die Anfangsbedingung ganz allgemein gehalten, nämlich: Am Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist die Masse am Punkt $x = x_0$ und hat dort die Geschwindigkeit $\dot{x} = v_0$, dann lautet die spezielle Lösung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \tag{4.12}$$

Berechnung der Gesamtenergie

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \,\big|\, \cdot (m\dot{x}) \\ m\ddot{x}\dot{x} + m\omega^2 x\dot{x} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + m\frac{\omega^2}{2}x^2\right] = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, x^2 = T + V = \text{konst.} \tag{4.13}$$

Die Konstanz der Gesamtenergie E ergibt sich auch wenn man eine der Lösungen (4.9), (4.11) oder (4.12) in den Energieausdruck einsetzt. So liefert etwa (4.9) in den obigen Energieausdruck eingesetzt:

$$E = \frac{m}{2}a^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{m}{2}a^2\omega^2 \cos^2(\omega t) = \frac{m\omega^2}{2}a^2 = \text{konst.} \tag{4.14}$$

Man sieht auch hier, daß E nicht von t abhängt. Die Gesamtenergie ist proportional zum Quadrat der Amplitude a und auch zum Quadrat der Kreisfrequenz ω. Das Potential errät man leicht aus dem Ausdruck für die Gesamtenergie:

$$V(x) = \frac{m}{2}\omega^2\, x^2 \tag{4.15}$$

$$\mathbf{F}(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{e}_x = -m\omega^2 x\,\mathbf{e}_x = -m\frac{D}{m}\,x\mathbf{e}_x = -Dx\mathbf{e}_x. \tag{4.16}$$

Aufgrund von Gleichung (4.13) und Gleichung (3.39) erhalten wir die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators mit:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{4.17}$$

Entsprechend (3.47) erhalten wir den verallgemeinerten Impuls ($q_x = x$) mit

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

und somit folgt für die HAMILTON-Funktion (3.55):

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (m\dot{x})\dot{(x)} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nachdem das Problem homogen in der Zeit ist, die LAGRANGE-Funktion (4.17) ist ja invariant unter den Transformationen (3.73), so gilt Energieerhaltung, wie bereits mit Gleichung (4.14) gezeigt wurde.

Die Phasenkurve

In Abb. 4.1 ist rechts oben die potentielle Energie $V(x)$ eingezeichnet. Für eine gegebene Energie E_i oszilliert der Massenpunkt zwischen den Punkten $\pm x_i$ und diese Punkte kann man aus dem Energiesatz bestimmen. Man löst Gleichung (4.13) nach der Geschwindigkeit $\dot{x}$ auf, so ergibt sich:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}. \tag{4.19}$$

Die Geschwindigkeit muß reell sein; also darf der Radikand nicht negativ sein. In den Punkten $\pm x_i$, den Umkehrpunkten ist der Radikand und damit die Geschwindigkeit Null. Wir erhalten:

$$x_i = \pm\sqrt{\frac{2E_i}{m\omega^2}}. \tag{4.20}$$

Der Phasenraum des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist zweidimensional mit den verallgemeinerten Koordinaten x und den Impulsen $p = m\dot{x}$. Der verallgemeinerte Impuls ist maximal, wenn der Massepunkt durch die Ruhelage $x = 0$ schwingt, und damit ergibt sich aus (4.19):

$$p_i = \pm\sqrt{2E_i m}$$

Damit entspricht die Phasenkurve dieser Schwingung einer Ellipse mit den Halbachsen x_i und p_i, wie man aus (4.13) unmittelbar ersieht:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_i^2 \\ 1 &= \frac{1}{2mE_i}p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2E_i}x_i^2. \end{aligned}$$

Die Phasenkurve ist rechts unten in Abb. 4.1 dargestellt. Der dicke Punkt im Zentrum des Phasendiagramms (und die tiefste Stelle des Potentials) entspricht dem in der Gleichgewichtslage ruhenden Massenpunkt. Während die Masse im realen Raum eine Periode absolviert, durchläuft der Phasenpunkt seine Phasenkurve (hier die seiner Energie E_i entsprechende Ellipse) im Uhrzeigersinn. Es gibt nur eine Art von Bewegung, eine Schwingung mit größerer oder kleinerer Amplitude, je nach den Anfangsbedingungen.

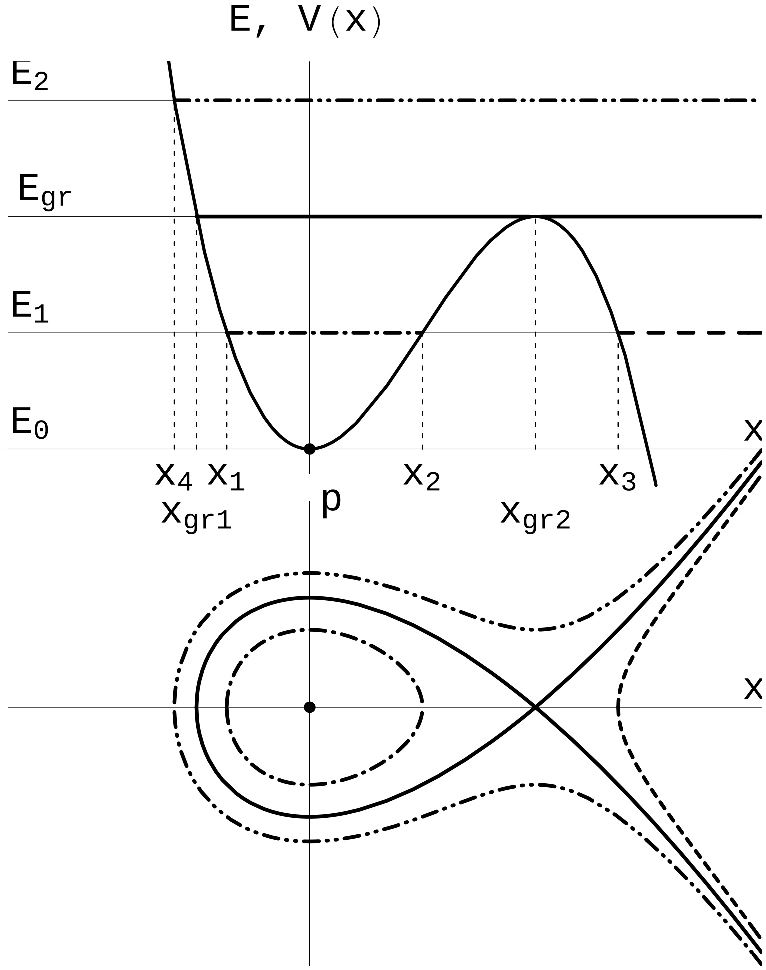


Abbildung 4.2: Anharmonische Schwingung. Oben das Potential V(x), Gl. (4.21)), und verschiedene Energiewerte. Unten die Phasenkurve.

4.1.2 Anharmonische Schwingung

Die Bewegungstypen werden zahlreicher, wenn man in der Entwicklung der Kraftfunktion, Gl. (4.1), den ersten nichtlinearen Term (mit $x_0 = 0$ und $f''(x_0)/2 := m\alpha$) hinzunimmt:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x, \qquad V(x) = m\omega^2\frac{x^2}{2} - m\alpha\,\frac{x^3}{3}. \tag{4.21}$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung kann exakt analytisch mit Hilfe elliptischer Funktionen und Integrale gelöst werden. Wichtige qualitative und quantitative Aussagen können bereits aus dem Energiesatz und dem Phasenraumdiagramm gefunden werden. Das Potential ist in Abb. 4.2 oben dargestellt. Sind die Schwingungsamplitude, damit auch die Gesamtenergie

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + m\omega^2\,\frac{x^2}{2} - m\alpha\,\frac{x^3}{3} \tag{4.22}$$

klein genug, dann schwingt der Massenpunkt zwischen $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$. Diese beiden Werte ergeben sich wieder aus den Schnittpunkten der horizontalen Geraden E_1 ($E_0 \leq E_1 \leq E_{gr}$) mit der Potentialfunktion V(x). Wegen der unsymmetrischen Form des Potentials liegen sie nicht symmetrisch zum Ursprung. Die zugehörige, strichpunktiert eingezeichnete, Phasenkurve (Abb. 4.2) ist geschlossen, es liegt eine anharmonische Schwingung vor. Dies nennt man auch einen *gebundenen Zustand*.

Löst man obige Gleichung nach der Geschwindigkeit $\dot{x}$ auf, so findet man eine Differentialgleichung, die durch Separation gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm\sqrt{2E/m - V(x)}, \\ dt &= \frac{dx}{\sqrt{2E/m - V(x)}}, \\ t &= \int\limits_0^t dt = \int\limits_{x(0)}^{x(t)} dx \, \frac{1}{\sqrt{2E/m - V(x)}}. \end{aligned}$$

Für die Zeit einer halben Periode ergibt sich daraus:

$$\frac{T}{2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{1}{\sqrt{2E/m - V(x)}}.$$

An den Umkehrpunkten ist $\dot{x} = 0$, also die obige Wurzel Null. Der Integrand ist also dort singulär. Doch ist es eine schwache Singularität (so wie die von $1/\sqrt{x - x_0}$ an der Stelle x_0), der Integrand ist also integrabel; das obige bestimmte Integral ist endlich.

Für $E > E_{gr}$ (wie z.B. für $E = E_2$) kann die Masse nach rechts bis ins Unendliche laufen (strich-doppelpunktierte Linie in der Phasenkurve von Abb. 4.2). Dies beschreibt einen *ungebundenen* oder *freien Zustand*. Im Bereich $0 < x_3 \leq x < \infty$ ist der Radikand ebenfalls positiv. Das Teilchen, damit auch sein Phasenpunkt, können ins Unendliche gelangen (strichlierte Linie in der Phasenkurve von Abb. 4.2). Wenn der Massenpunkt einwärts läuft, dann wird er an der Stelle $x = x_3$ reflektiert und gelangt dann ins Unendliche. Doch ist dieser Bereich vom physikalischen Standpunkt aus nicht sehr realistisch.

Je näher die Energie E an der Grenzenergie E_{gr} liegt, desto größer wird der Wert der Periode. Bei $E = E_{gr}$ fallen die Nullstellen x_2 und x_3 zusammen, $x_2 = x_3 = x_{gr}$; unter der Wurzel steht ein quadratischer Ausdruck $(x - x_{gr})^2$; der Integrand in dem obigen Ausdruck für die Periode hat einen Pol 1. Ordnung; das Integral nimmt den Wert Unendlich an. Das Teilchen kann sich nur von links oder rechts dem sog. Sattelpunkt nähern, es benötigt unendlich lange Zeit bis es diesen erreicht (voll ausgezogene Linie in der Phasenkurve

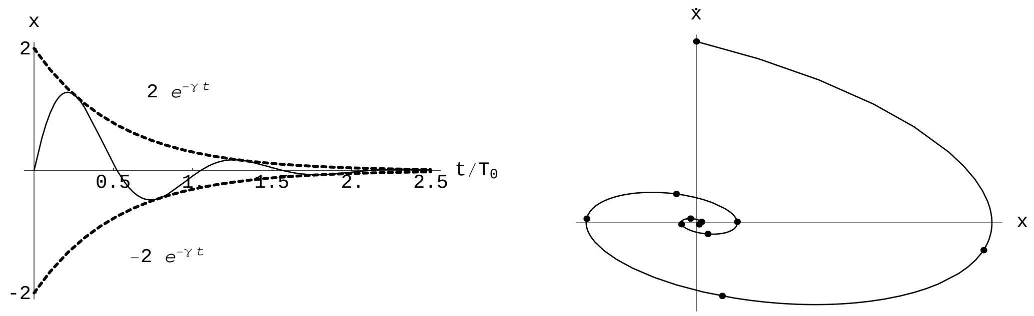


Abbildung 4.3: Gedämpfte Schwingung: Links die Lagekoordinate über der Zeit. Rechts die Phasenkurve. Die Punkte trennen gleiche Zeitintervalle $T_0/4$.

von Abb. 4.2). Der Phasenpunkt kann aber immer nur einen Teil eines Astes dieser Kurve durchlaufen. Diese Bewegung heißt *Limitationsbewegung.* Diese Kurve trennt zwei Gebiete des Phasenraumes, in denen verschiedenartige Bewegungen ablaufen. Deswegen heißt sie auch *Separatrix.*

4.1.3 Harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Die Verluste, die z.B. durch Reibung in der Feder oder in der Luft verursacht werden, können oft durch eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft

$$\mathbf{F}_r = -r\dot{x}\mathbf{e}_x := -2m\gamma\dot{x}\mathbf{e}_x \tag{4.23}$$

(r oder γ konstant) beschrieben werden. Statt (4.3) erhält man dann die Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\,\dot{x} + m\omega_0^2\,x = 0. \tag{4.24}$$

Mittels Exponentialansatz erhält man die charakteristische Gleichung

$$x = e^{\lambda t}: \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{4.25}$$

mit den Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{4.26}$$

Wir müssen drei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Quadratwurzel imaginär, Null oder reell ist.

Gedämpfte Schwingung ($\omega_0^2 > \gamma^2$)

λ_1 und λ_2 sind zueinander konjugiert komplex. Die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t} + Be^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t}\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left[C\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right) + D\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right)\right] \end{aligned} \tag{4.27}$$

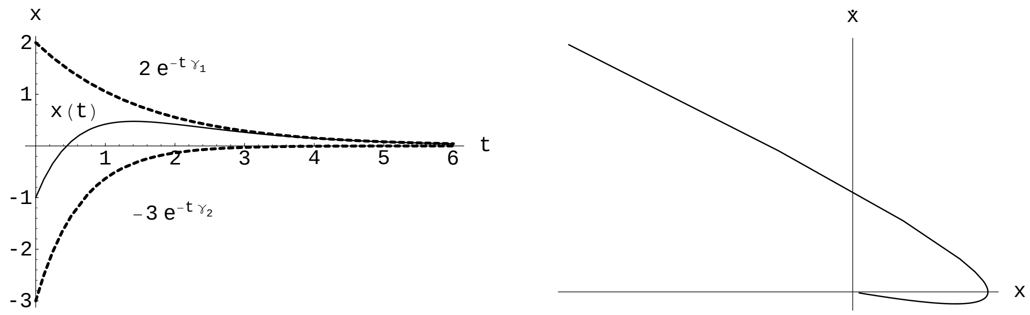


Abbildung 4.4: Aperiodische Bewegung, Kriechfall.

beschreibt für $t \geq 0$ eine *gedämpfte Schwingung*. Für $t \to \infty$ kommt der Oszillator wegen der Reibungsverluste zur Ruhe. Als Beispiel ist der Fall mit $D = 0$ in Abb. 4.3 gezeigt. Man beachte, daß die Frequenz des gedämpften Oszillators ($\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$) gegenüber der des ungedämpften Oszillators ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) herabgesetzt ist. Die Phasenkurve zieht sich allmählich auf den Ursprung zusammen, wobei die Schwingung immer langsamer wird.

Aperiodische Bewegung ($\gamma^2 > \omega_0^2$)

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,, \quad \lambda_2 < \lambda_1 < 0,$$
$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{4.28}$$

Die Reibung ist so stark, daß überhaupt keine Schwingung möglich ist; der Oszillator kehrt nach der Auslenkung in seine Ruhelage zurück. Dies verläuft entweder überhaupt monoton oder der Massenpunkt durchquert einmal die Ruhelage (siehe Abb. 4.4).

Der Grenzfall ($\gamma^2 = \omega_0^2$)

Hier gilt:

$$\lambda_1 = -\gamma = -\omega_0.$$

Da die charakteristische Gleichung (4.25) für λ nur eine Lösung hat, muß man noch eine zweite linear unabhängige Lösung finden. Man sieht durch Einsetzen, daß in diesem Fall mit $e^{(+\lambda_1 t)} = e^{(-\gamma t)}$ auch $t\,e^{(-\gamma t)}$ eine Lösung von (4.24) ist. Auch diese Lösung strebt für $t \to \infty$ gegen Null. Die allg. Lösung

$$x = Ae^{-\gamma t} + Bt\;e^{-\gamma t} \tag{4.29}$$

gibt ähnliche Bewegungsformen wie im Fall der aperiodischen Bewegung.

4.1.4 Harmonischer Oszillator mit zusätzlicher zeitabhängiger Kraft. Erzwungene Schwingung. Resonanz.

Auf den Massenpunkt m wirkt neben den Federn (oder sonstigen elastischen Kräften, die ihn in die Ruhelage zurückziehen wollen), noch eine zusätzliche zeitabhängige Kraft $\mathbf{F}_1(t) = mF_1(t)\mathbf{e}_x$:

$$m\ddot{x} = -Dx + mF_1(t), \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = F_1(t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{4.30}$$

$F_1(t)$ heißt manchmal das Störglied. Es macht aus der homogenen Differentialgleichung (4.3) bzw. (4.24) eine inhomogene Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der letzteren kann man aus der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (4.3), x_h, plus einer partikulären Lösung, x_p, der inhomogenen Gleichung (4.30) aufbauen:

$$x = x_h + x_p.$$

Dies beweist man, indem man zwei partikuläre Lösungen, $x_1(t)$ und $x_2(t)$, in obige Gleichung einsetzt

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = F_1(t), \qquad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = F_1(t),$$

und die resultierenden Gleichungen voneinander abzieht. Tatsächlich ist

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 - x_2) = 0. \qquad x_1 - x_2 = x_h = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

Lösung der homogenen Schwingungsgleichung (4.3).

Die partikuläre Lösung x_p hängt von der Art der zeitlichen Abhängigkeit der Kraft $\mathbf{F}_1(t)$ ab. Besonders wichtig sind periodische Anregungen. Wir betrachten den Sonderfall einer harmonischen Störkraft der Kreisfrequenz ω.

$$F_1(t) = C\cos(\omega t) = \Re\mathrm{e}\,(Ce^{i\omega t}), \tag{4.31}$$

(C ist reell und gibt die Stärke der anregenden Kraft an). Die Einführung des Realteiles gestattet eine bequeme Rechnung mit komplexen Größen. Wir finden eine partikuläre Lösung durch den Ansatz

$$x_p = B\, e^{i\omega t}.$$

für die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_1(t) = \Re\mathrm{e}\left(C\, e^{i\omega t}\right). \tag{4.32}$$

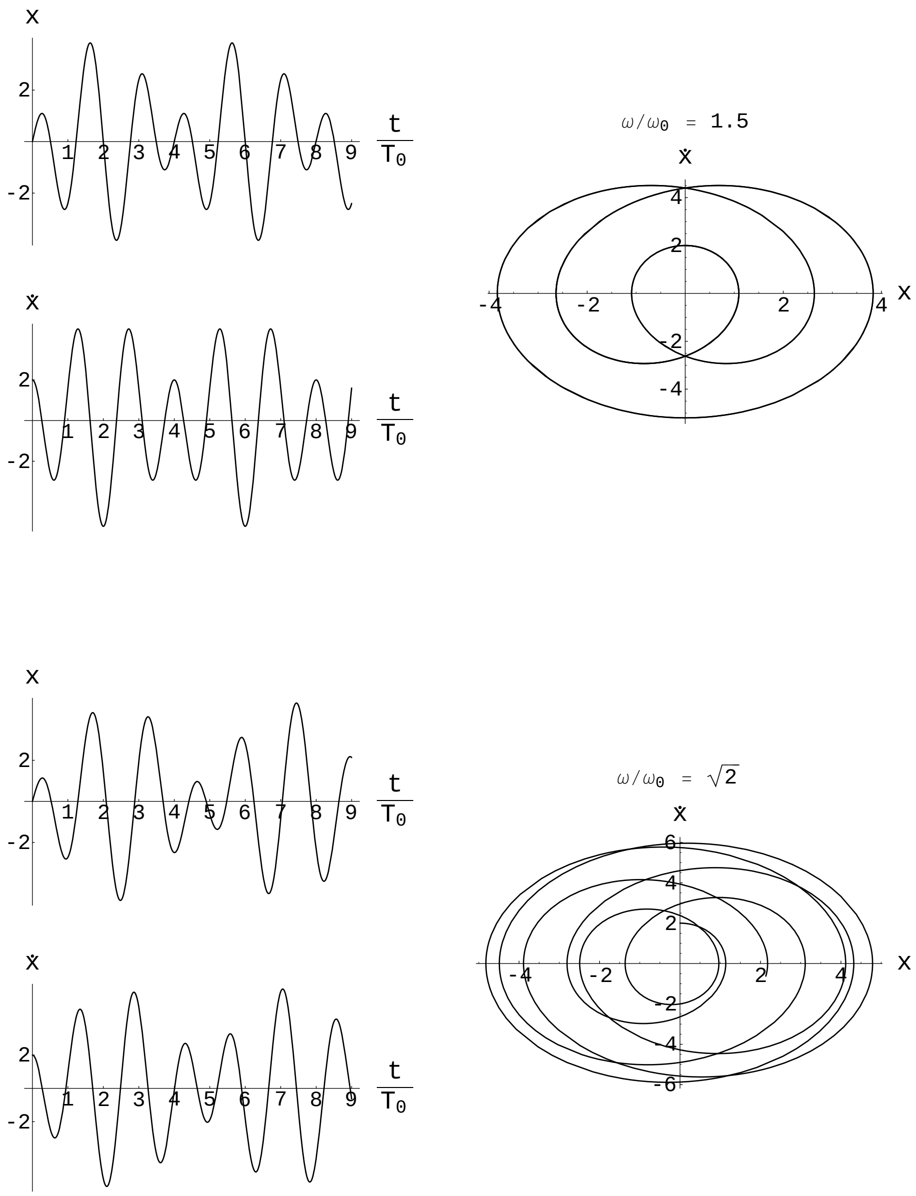


Abbildung 4.5: Auslenkung, Geschwindigkeit und Phasenkurve eines ungedämpften linearen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0, der von einer äußeren zeitharmonischen Kraft der Frequenz ω angeregt wird. Freqenzverhältnisse $\omega/\omega_0 = 1.5$ bzw. $= \sqrt{2}$.

Einsetzen der partikulären Lösung in diese Gleichung gibt:

$$(-\omega^2+\omega_0^2)Be^{i\omega t} = C\,e^{i\omega t}, \quad B = \frac{C}{\omega_0^2-\omega^2};$$
$$x_p = \Re e\left(\frac{C}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t}\right) = \frac{C}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t). \tag{4.33}$$

Die allgemeine Lösung ist also die Überlagerung zweier Schwingungen mit den Frequenzen ω und ω_0:

$$x = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t) + \frac{C}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t). \tag{4.34}$$

Die Auslenkung und die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit haben eine übersichtliche Form. Die Phasenkurve wird sehr undurchsichtig, wenn das Frequenzverhältnis ω/ω_0 nicht ein einfaches Zahlenverhältnis darstellt. (Vergleiche die zwei in Abb. 4.5 diskutierten Fälle.)

Die Lösung wird unendlich für $\omega = \omega_0$ (*Resonanz*). In diesem Fall ist die Reibung so wesentlich, daß sie nicht vernachlässigt werden darf. Wir betrachten daher die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \Re e(Ce^{i\omega t}). \tag{4.35}$$

Es wird der Schwingfall (siehe Abschnitt 4.1.3), $\gamma^2 < \omega_0^2$ untersucht. Wieder erhalten wir eine partikuläre Lösung der obigen inhomogenen Gleichung durch den Ansatz $x_p = \Re\mathrm{e}(D\,e^{i\omega t})$:

$$D(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)e^{i\omega t} = Ce^{i\omega t},$$
$$D = \frac{C}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega} = C\frac{\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}.$$

Die allgemeine Lösung besteht aus $\Re\mathrm{e}(De^{i\omega t})$, der partikulären Lösung von (4.35), und aus der allgemeinen Lösung (4.27) der homogenen Gleichung (4.24):

$$\begin{aligned} x &= e^{-\gamma t}\left[A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right)\right] \\ &\quad + \frac{C}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma^2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t) + 2\omega\gamma\sin(\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Man sieht, daß die Lösung der homogenen Gleichung mit zunehmender Zeit abklingt, sodaß das stationäre (langzeitliche) Verhalten von dem der partikulären Lösung bestimmt ist. Dies ersieht man auch aus der Phasenkurve,

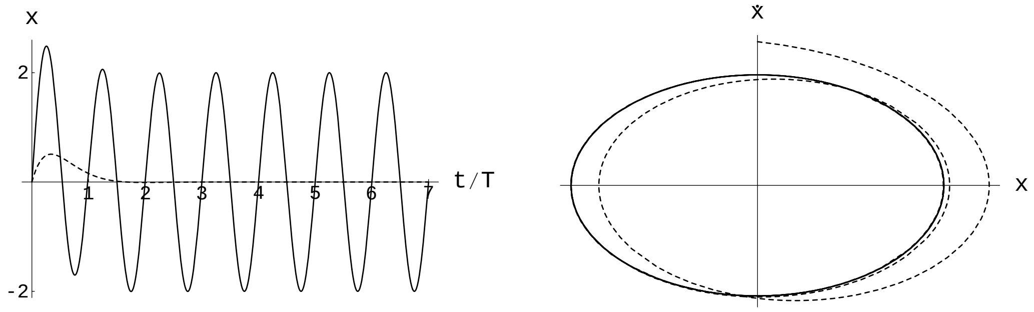


Abbildung 4.6: Amplitude und Phasenkurve eines gedämpften linearen Oszillators, der von einer äußeren zeitharmonischen Kraft angeregt wird. Links gibt die strichlierte Kurve die gedämpften Eigenschwingung an. Rechts gibt die ausgezogene Kurve die erzwungene Schwingung, die strichlierte den Einschwingvorgang.

Abb. 4.6. Die stationäre Lösung $x_p(t)$ wird daher genauer untersucht. Diese partikuläre Lösung [2. Zeile von Gleichung (4.36)] läßt sich als

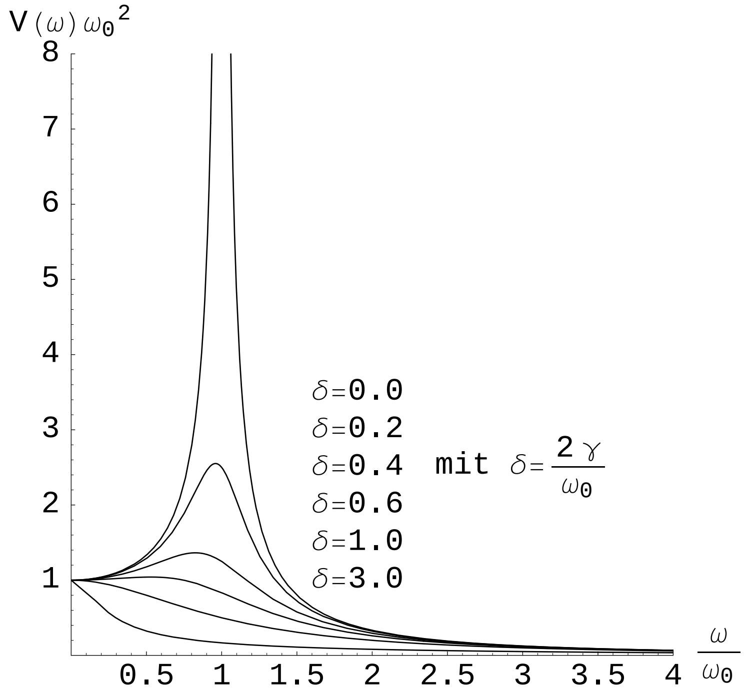
$$x_p(t) =: C\,V(\omega)\cos(\omega t - \varphi) \tag{4.37}$$

scheiben, mit

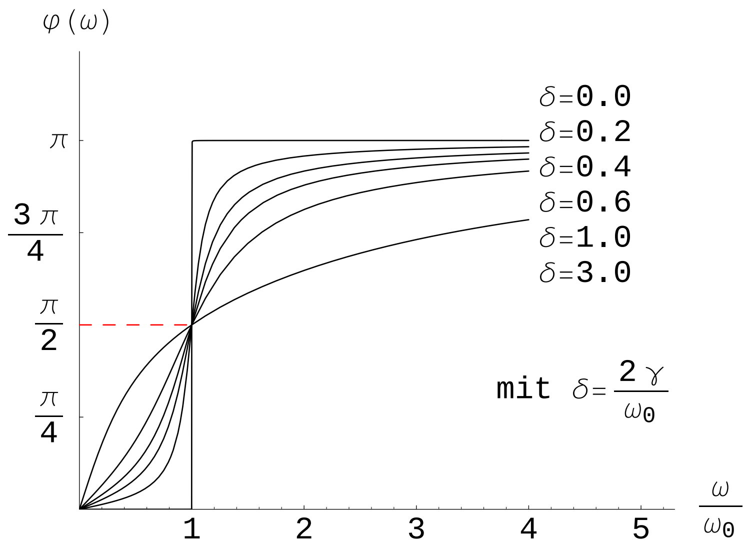
$$V(\omega) = \frac{\omega_0^{-2}}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_0)^2\right]^2 + (\omega/\omega_0)^2\,(2\gamma/\omega_0)^2}}, \tag{4.38}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\omega\gamma} = \arctan\left[\frac{1-(\omega/\omega_0)^2}{(\omega/\omega_0)\,(2\gamma/\omega_0)}\right]. \tag{4.39}$$

Dies ist ebenfalls eine harmonische Schwingung der Kreisfrequenz ω mit der Amplitude $V(\omega)$ und der Phasenverschiebung φ gegenüber der anregenden Schwingung. Man sieht, daß vor allem zwei dimensionslose Parameter in diese beiden Ausdrücke eingehen: ω/ω_0, das Verhältnis der anregenden Frequenz zur Eigenfrequenz ω_0 des ungestörten Systems und der Dämpfungsparameter $\delta = 2\gamma/\omega_0$. In Abb. 4.7 (a) ist $\omega_0^2 V(\omega)$ als Funktion dieser beiden Parameter dargestellt. Man sieht, daß bei schwacher Dämpfung (kleine δ) die Resonanz sehr stark ausgeprägt ist. $V(\omega)$ heißt deswegen auch der *Verzerrungsfaktor*. Für zunehmende Dämpfung wird das Maximum der Amplitude zu immer kleineren Frequenzen verschoben [genauso wie die Frequenz der freien Schwingung, Gl. (4.27)]. Bei sehr starker Dämpfung, etwa $\delta = 4$, gibt es kein Maximum mehr, die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist in weiten Bereichen unabhängig von der anregenden Frequenz, aber sehr klein. Abb. 4.7 (b) zeigt, daß für kleine ω/ω_0 die stationäre Schwingung in Phase mit der Erregung ist; bei $\omega/\omega_0 = 1$ ist sie um 90 verschoben, für noch höhere ω/ω_0 strebt die Phasendifferenz gegen 180.



(a)



(b)

Abbildung 4.7: (a) Resonanzkurven: Amplitude = Verzerrungsfaktor. (b) Resonanzkurven: Phase.

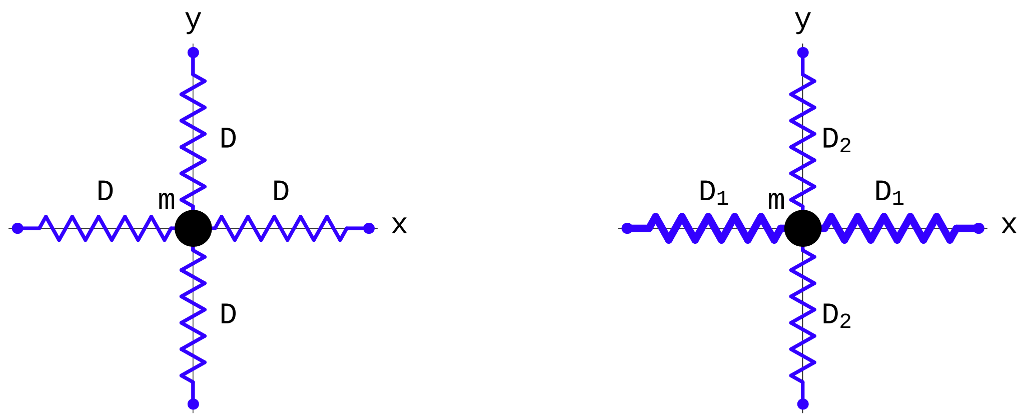


Abbildung 4.8: (a) Der isotrope harmonische Oszillator. (b) Der anisotrope harmonische Oszillator

4.2 Zwei Freiheitsgrade. Bewegung in zwei Raumrichtungen

Die Bewegung in einem Freiheitsgrad ist noch verhaltnismäßig übersichtlich. Wenn die Kraft nur vom Ort abhängt, dann existiert sicher ein Potential, die Energie ist erhalten, das System ist integrabel. Die Bewegung ist vorhersagbar. Zwei Freiheitsgrade bieten wesentlich mehr Bewegungsmöglichkeiten. Sind die Bewegungsgleichungen nichtlinear und gekoppelt, dann treten neue Phänomene auf, insbesondere chaotische Bewegung. Zuerst wird aber der lineare Fall behandelt, der *isotrope* und der *anisotrope harmonische Oszillator*. Diese Systeme sind integrabel. Als ein Beispiel eines nichtlinearen, nicht integrablen Systems wird das von Hénon-Heiles entwicklte Modell betrachtet.

4.2.1 Linearer Oszillator

Beim zweidimensionalen Oszillator muß man zwei Fälle unterscheiden, nämlich ob die Kraft in allen Richtungen dieselbe ist (*isotroper Oszillator*, Abb. 4.8a) oder in verschiedenen Richtungen verschieden (*anisotroper Oszillator*, Abb. 4.8b) ist.

Isotroper Oszillator

Beim isotropen Oszillator ist die Direktionskraft für alle Auslenkungen gleicher Größe gleich groß und immer zum Gleichgewichtspunkt gerichtet. Dieser Punkt wird als Koordinatenursprung genommen. Die Kraft ist dann proportional zum Radiusvektor $\mathbf{r}^T = (x, y)$:

$$\mathbf{F} = -D\,\mathbf{r} \tag{4.40}$$

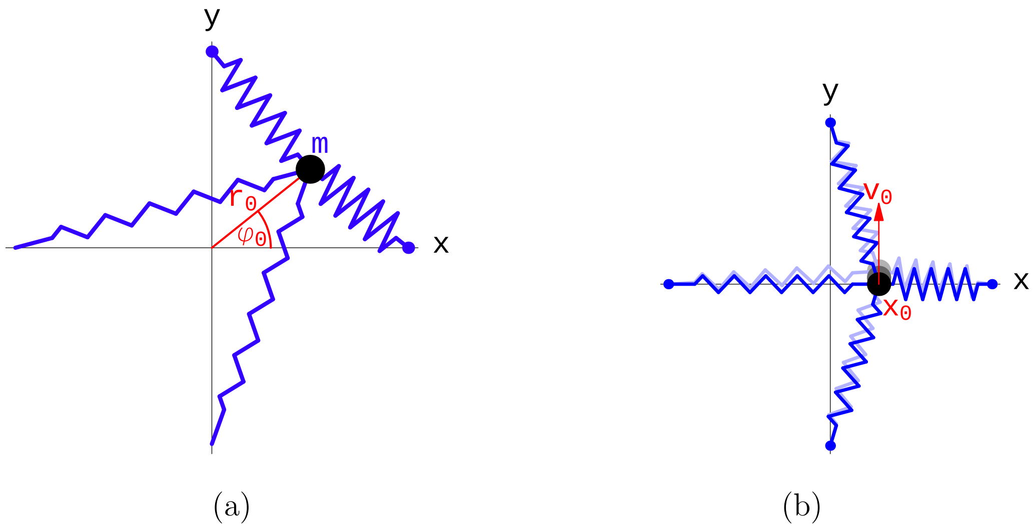


Abbildung 4.9: Zwei Beispiele von Anfangsbedingungen für einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator und zugehörige Bahnen: (a) Radiale Auslenkung, (b) Auslenkung und Stoß senkrecht dazu.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -D\,\mathbf{r}: \qquad m\ddot{x} = -D\,x, \quad m\ddot{y} = -D\,y, \tag{4.41}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0: & x(t) &= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0: & y(t) &= C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t), \\ && \omega &= \sqrt{D/m}. \end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhalten wir:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \cos(\omega t) + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen der allgemeinen Lösung ist bereits bei Gln. (4.6) und (4.7) diskutiert worden. Eine spezielle Anfangsbedingung ist: m wurde um die Strecke r_0 aus der Ruhelage gezogen (Abb. 4.9a):

$$t = 0: \quad \mathbf{r}(t=0) = \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 \\ r_0 \sin\varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{r}(t=0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 \\ r_0 \sin\varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \omega \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten für die Integrationskonstanten:

$$C_1 = r_0 \cos\varphi_0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = r_0 \sin\varphi_0, \quad C_4 = 0.$$

Die zugehörige spezielle Lösung ist:

$$x(t) = r_0 \,\cos\varphi_0 \,\cos(\omega t), \quad y(t) = r_0 \,\sin\varphi_0 \,\cos(\omega t).$$

Dividiert man eine Lösung durch die andere, so findet man:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \tan\varphi_0.$$

Der Massenpunkt oszilliert also auf der Geraden $y = x\tan\varphi_0$.

Eine andere Anfangsbedingung ist: m ist um die Länge x_0 längs der x-Richtung aus der Ruhelage gezogen worden und erhält beim Auslassen einen Stoß in der dazu senkrechten Richtung (Abb. 4.9b):

$$t = 0: \quad \mathbf{r}(t=0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Die Konstanten bestimmt man wie zuvor und erhält die spezielle Lösung:

$$x(t) = x_0 \,\cos(\omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega}\,\sin(\omega t),$$

und daraus folgt:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0/\omega}\right)^2 \;=\; 1.$$

Die Bahnkurve ist also eine Ellipse. Auch das vorherige Resultat stellt eine Ellipse dar, wenn diese auch zu einer Strecke degeneriert ist. Unten wird gezeigt werden, daß jede Bahnkurve eine Ellipse ist, deren Zentrum mit dem Kraftzentrum zusammenfällt.

Integrale der Bewegung

Mit der allgemeinen Lösung, Gl. (4.42), erhält man:

$$E_1 \;=\; \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2\,x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_1^2}{2} = \text{konst}, \tag{4.43}$$

$$E_2 \;=\; \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\omega^2\,y^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_2^2}{2} = \text{konst}, \tag{4.44}$$

$$E \;=\; E_1 + E_2 = \text{konst}.$$

Die Gesamtenergie E_i für die Bewegung in der i-ten Koordinatenrichtung ist erhalten, damit auch die Gesamtenergie E des Oszillators.

Der Drehimpuls ist durch

$$\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \ell\mathbf{e}_3, \quad \ell = m(x\dot{y}-\dot{x}y) = m\omega A_1A_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) = \text{konst} \tag{4.45}$$

bestimmt. Es stellt sich nun die Frage: Unter welchen Bedingungen ist $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}$? ($\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \ell = 0$).

1. Wenn $A_1 = 0$ oder $A_2 = 0$, d.h. wenn sich der Massenpunkt auf der y-Achse oder x-Achse bewegt.

2. Wenn $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, d.h. $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ oder π.

$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}$ beschreibt also eine Bewegung auf einer Geraden durch das Kraftzentrum.

Ein weiteres Integral der Bewegung ist durch

$$\begin{aligned} I_4 &= \dot{x}\dot{y} + \omega^2\, xy, \\ \frac{dI_4}{dt} &= \ddot{x}\dot{y} + \omega^2\,\dot{x}y + \dot{x}\ddot{y} + \omega^2\, x\dot{y} \\ &= (\ddot{x} \;+\; \omega^2\; x)\,\dot{y} + \dot{x}\,(\ddot{y} \;+\; \omega^2\; y) = 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$

gegeben.

Wir haben also 4 Integrale der Bewegung, E_1, E_2, L und I_4 gefunden. Die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ wird nicht mehr extra gezählt. Da das System nur 2 Freiheitsgrade hat, kann es nur 3 unabhängige zeitfreie Integrale der Bewegung haben (siehe Abschnitt 2.5.3). Es muss also eine Beziehung zwischen den gerade angeführten Größen bestehen. Diese ist unten angegeben. Man bestätigt sie durch Ausrechnen, nachdem man die Definitionen aller vier Größen eingesetzt hat.

$$m^2 I_4^2 = 4E_1E_2 - \omega^2\,\ell^2.$$

$$\begin{aligned} m^2 I_4^2 &= m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + m^2\omega^4x^2y^2 + 2m^2\omega^2xy\dot{x}\dot{y}, \\ \omega^2\ell^2 &= m^2\omega^2\dot{x}^2y^2 + m^2\omega^2x^2\dot{y}^2 - 2m^2\omega^2xy\dot{x}\dot{y}; \\ m^2I_4^2 + \omega^2\ell^2 &= \left(m\dot{x}^2 + m\omega^2x^2\right)\left(m\dot{y}^2 + m\omega^2y^2\right) = 4E_1E_2. \end{aligned}$$

Im vierdimensionalen Phasenraum x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ stellt jedes Integral der Bewegung eine Hyperfläche, also einen dreidimensionalen Unterraum dar. Die Phasenkurve muß auf jeder dieser Hyperflächen liegen. Der Durchschnitt zweier derartiger dreidimensionaler Teilräume, z.B. der Hyperflächen, die E_1 und E_2 zugeordnet sind, ist ein zweidimensionaler Unterraum. Das dritte Integral der Bewegung nimmt noch einen Freiheitsgrad weg. Es bleibt ein eindimensionaler Unterraum übrig, das ist die Phasenkurve. Dies kann man hier auch ausrechnen. Dazu werden im Quadrat des Drehimpulses die Quadrate der

Geschwindigkeiten mittels der Energiesätze E_1 und E_2 eliminiert. Die resultierende Gleichung wird umgestellt und dann das Integral I_4, Gl. (4.46), eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ell}{m}\right)^2 = \dot{x}^2y^2 + x^2\dot{y}^2 - 2xy\dot{x}\dot{y} &= y^2\left(\frac{2E_1}{m} - \omega^2x^2\right) + x^2\left(\frac{2E_2}{m} - \omega^2y^2\right) \\
&\quad -2xy\dot{x}\dot{y} \\
&= \frac{2E_1}{m}y^2 + \frac{2E_2}{m}x^2 - 2\omega x^2y^2 - 2xy\dot{x}\dot{y}. \\
\frac{2E_1}{m}y^2 + \frac{2E_2}{m}x^2 - \left(\frac{\ell}{m}\right)^2 &= 2xy\left(\dot{x}\dot{y} + \omega^2xy\right) = 2xy\, I_4(E_1, E_2, \ell).
\end{aligned}$$

Der erste und der letzte Teil der letzten Zeile geben die Bahnkurve, einen Kegelschnitt. Durch Hauptachsentransformation wird gezeigt, dass dieser eine Ellipse darstellt. Hiezu wird diese Gleichung umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
\frac{2E_2}{m}x^2 + \frac{2E_1}{m}y^2 - 2I_4xy &= \frac{\ell^2}{m^2}, \\
\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 - 2\gamma xy &= \text{konst}; \quad \alpha, \beta > 0; \\
(x\ \ y)\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\gamma & \beta \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{M}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \text{konst.}
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte $\bar{m}$ der Matrix $\boldsymbol{M}$ geben die Halbachsen des Kegelschnittes. Diese sind beide positiv:

$$\det(\boldsymbol{M} - \bar{m}\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} \alpha - \bar{m} & -\gamma \\ -\gamma & \beta - \bar{m} \end{vmatrix} = \bar{m}^2 - (\alpha + \beta)\bar{m} - \gamma^2 + \alpha\beta = 0,$$

mit $\boldsymbol{E}$ der Einheitsmatrix. Daraus finden wir:

$$\bar{m}_{1,2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \gamma^2},$$

und schließlich:

$$\begin{aligned}
m\,\bar{m}_{1,2} &= E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + m^2\ I_4^2} \\
&= E_1 + E_2 \pm \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 + 4E_1E_2 - \omega^2\ell^2} \\
&= E_1 + E_2\ \pm \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - \omega^2\ \ell^2}.
\end{aligned}$$

Die erste Zeile zeigt, dass der Radikand positiv ist. Die letzte Zeile zeigt, dass die Wurzel kleiner ist als die vorhergehende Summe zweier positiver

Grössen. Daher sind beide Eigenwerte positiv und somit ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Eine zweite Methode zum Nachweis des gleichen Sachverhalts wird im nächsten Kapitel entwickelt werden.

Der gerade rechnerisch gezeigte Zusammenhang läßt sich auch geometrisch veranschaulichen. Da man den vollen vierdimensionalen Phasenraum nicht anschaulich darstellen kann, muss man in einem dreidimensionalen Unterraum arbeiten. Dieser wird geschaffen, indem die Geschwindigkeit $\dot{x}$ mittels des Energiesatzes E_1 eliminiert wird. Im verbleibenden Unterraum $x, y, z = \dot{y}$ liefern das Quadrat des Drehimpulses und der Energiesatz E_2 je eine (zweidimensionale) Fläche; deren Durchschnitt gibt die Bahnkurve (s. Abb. 4.10).

Der eben beschriebene Sachverhalt wird durch eine weitere Rechung erläutert. Im Quadrat des Drehimpules, Gl. (4.45) werden $\dot{x}^2$ und $\dot{y}^2$ mittels der Energien E_1 und E_2, Gln. (4.43) und (4.44) eliminiert; ebenso eliminiert man $\dot{x}$ mittels des Drehimpulses, Gl. (4.45):

$$\begin{aligned} \frac{2E_2}{m}\,x^2 - \frac{2E_1}{m}\,y^2 - \frac{2\ell}{m}\,x\dot{y} &= \frac{\ell^2}{m^2}, \quad z = \dot{y}, \qquad (4.47) \\ \alpha\,x^2 - \beta\,y^2 - 2\gamma xz &= \frac{\ell^2}{m^2}; \quad \alpha, \beta, \gamma > 0. \\ (x \;\; y \;\; z) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \text{konst.} \end{aligned}$$

Im dreidimensionalen Unterraum x, y, $z = \dot{y}$ stellt dieses Polynom ein einschaliges Hyperboloid dar. Auch dies wird wieder durch Hauptachsentransformation der Matrix $\boldsymbol{M}$ gezeigt.

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{M} - \bar{m}\boldsymbol{E}) &= \begin{vmatrix} \alpha - \bar{m} & 0 & \gamma \\ 0 & \beta - \bar{m} & 0 \\ \gamma & 0 & -\bar{m} \end{vmatrix} = (\beta - \bar{m}) \begin{vmatrix} \alpha - \bar{m} & \gamma \\ \gamma & -\bar{m} \end{vmatrix} \\ &= (\beta - \bar{m})[\bar{m}^2 - \alpha\,\bar{m} - \gamma^2] = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\bar{m}_1 = \beta > 0; \quad \bar{m}_{2,3} = \frac{\alpha}{2} \pm W, \quad W = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \gamma^2}; \quad \bar{m}_2 > 0, \bar{m}_3 < 0,$$

und Eigenvektoren:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2\gamma}(\alpha - W) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2\gamma}(\alpha + W) \end{pmatrix}.$$

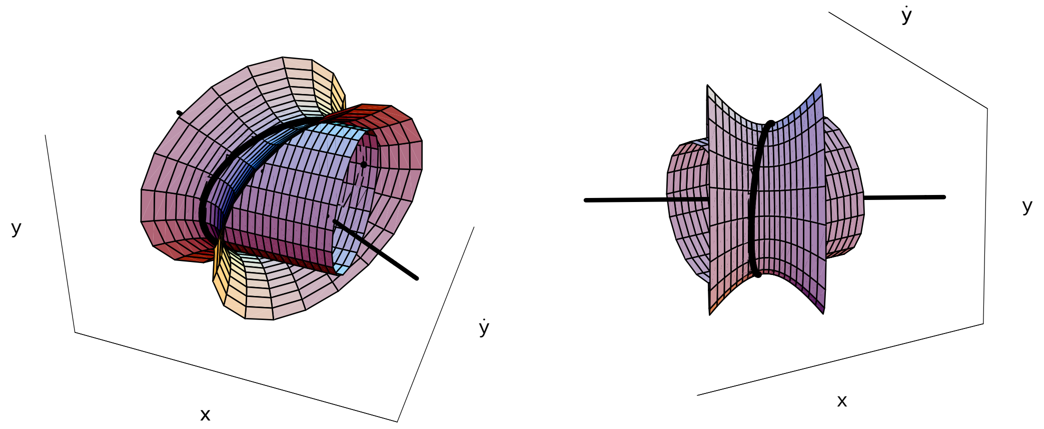


Abbildung 4.10: Die Zylinderfläche entspricht E_2, Gl. (4.44); das Hyperboloid, dessen Achse ebenfalls eingezeichnet ist, entspricht Gl. (4.47). Die beiden Flächen berühren sich in der Bahnkurve.

Da zwei Eigenwerte positiv und einer negativ ist, ist die durch Gl. (4.47) definierte Fläche ein einschaliges Hyperboloid; seine Achse ist durch den Vektor $\mathbf{e}_3$ gegeben und liegt in der $(x, \dot{y} = z)$-Ebene.

Zu Gl. (4.47) wird noch der Energiesatz E_2, Gl. (4.44), hinzugenommen. Dieser stellt einen elliptischen Zylinder parallel zur x-Achse dar. Das Hyperboloid umschließt den Zylinder wie eine schief sitzende Halskrause und berührt ihn längs einer Kurve, der Bahnkurve (siehe Abb. 4.10).

Anisotroper harmonischer Oszillator

Wir nehmen nun an, daß die Federn in x-Richtung eine andere Direktionskraft aufweisen als die in y-Richtung (siehe Abb. 4.9b). Bei einer Auslenkung der Masse aus der Ruhlage ist die rücktreibende Kraft meist nicht mehr auf das Kraftzentrum (0, 0) gerichtet. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -D_1 x, \quad \ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \\ m\ddot{y} &= -D_2 y, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0, \end{aligned} \tag{4.48}$$

mit

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{D_1}{m}}, \quad \omega_2 := \sqrt{\frac{D_2}{m}}. \tag{4.49}$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y &= C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Die *Gesamtenergie* ist:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega_1^2 x^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + \omega_2^2 y^2\right) = \frac{m}{2}\omega_1^2 A_1^2 + \frac{m}{2}\omega_2^2 A_2^2 = \text{konst.} \tag{4.51}$$

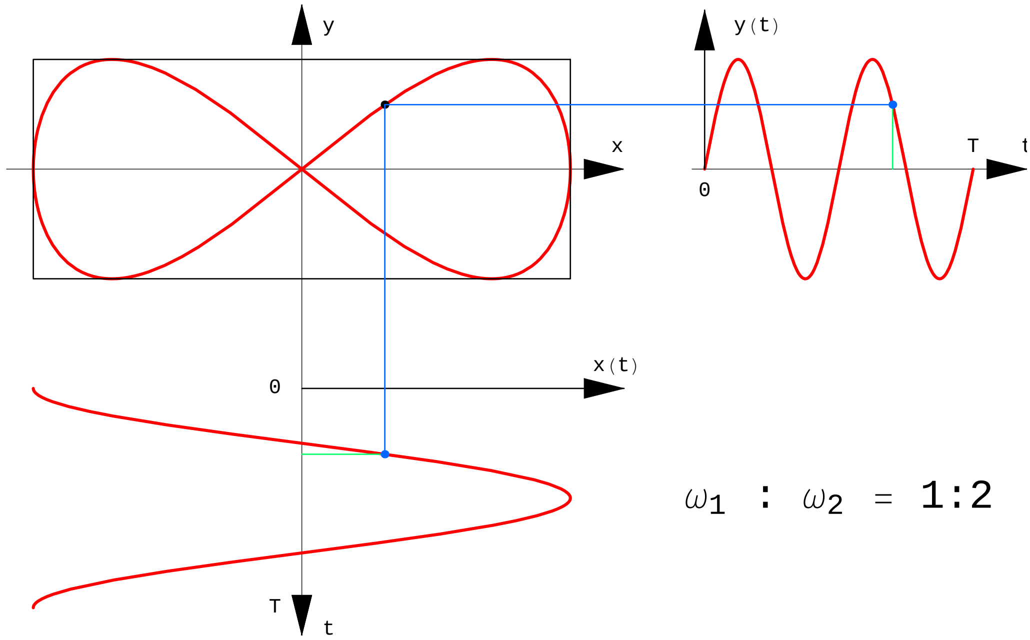


Abbildung 4.11: Entstehung einer Lissajous-Kurve mit Frequenzverhältnis 1:2.

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses berechnet man direkt aus den Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rcl|c} m\ddot{x} & = & -D_1 x & \cdot y \\ m\ddot{y} & = & -D_2 y & \cdot x \end{array}\right\} \; -$$

$$m(x\ddot{y} - \ddot{x}y) = \frac{d}{dt} m(x\dot{y} - y\dot{x}) = xy(D_1 - D_2)$$

$$\frac{d}{dt}(L_z) = xy(D_1 - D_2) \overset{\text{i. a.}}{\neq} 0. \tag{4.52}$$

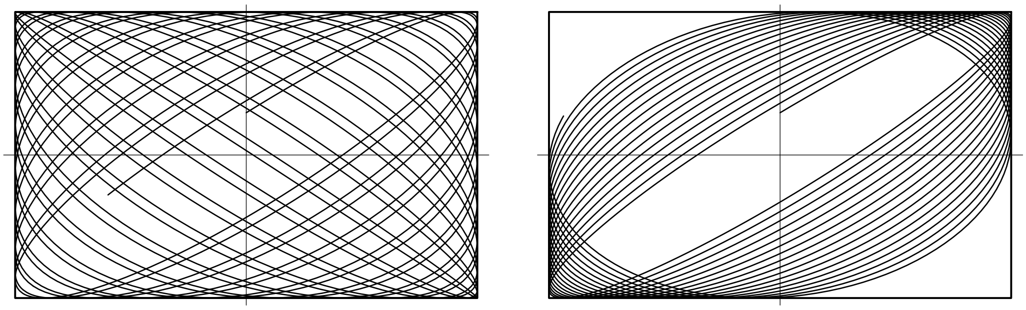
Im allgemeinen ist der Drehimpuls nicht erhalten. Das hängt mit dem Fehlen der radialen Symmetrie zusammen.

Es sind nun zwei Fälle möglich, je nachdem ob die Frequenzen kommensurabel oder nicht kommensurabel sind.

Das Verhältnis der Frequenzen ist rational.

$$\omega_1 : \omega_2 = n : m \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Die Elimination der Zeit führt hier auf eine Kurvengleichung, die ein Polynom in x und y ist; die Bahn ist eine algebraische Kurve: *Lissajous-Kurven*. Physikalisch: Es existiert ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von n und m, d.h. nach einer gewissen Zeit befindet sich der Massenpunkt wieder am Ausgangspunkt $\Longrightarrow$ geschlossene Kurven, z.B. Abb. 4.11.



(a) (b)

Abbildung 4.12: (a) Periodische Bewegung mit dem Freqenzverhältnis $\omega_1 : \omega_2 = 1.6 : 1.677$. (b) Beispiel einer mehrfach periodischen Bewegung, $\omega_1 : \omega_2 = 1.6 : (1+\sqrt{5})/2 = 1.6 : 1.6180...$ Das harmonische Verhältnis $(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180339887498\ldots$ gilt als "besonders irrational".

Das Verhältnis der Frequenzen ist nicht rational.

$$\omega_1 : \omega_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Die Frequenzen haben kein kleinstes gemeinsames Vielfaches, daher kehrt die Kurve nicht an den Ausgangspunkt zurück. Sie erfüllt allmählich das ganze umschriebene Rechteck mit den Seitenkanten $2(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}} = 2A_1$ bzw. $2(C_3^2 + C_4^2)^{\frac{1}{2}} = 2A_2$, (siehe Abb. 4.12(b)). Man nennt diese Bewegung *fastperiodisch* oder *mehrfach periodisch*. Doch wird auch für ein Frequenzverhälnis, das zwar rational, aber das Verhältnis zweier großer ganzer Zahlen ist, das Periodenrechteck stark ausgefüllt (siehe Abb. 4.12(a)). Nun soll die Darstellung der Dynamik im Phasenraum behandelt werden. Die Lagekoordinaten, Gl. (4.50), und die zugehörigen Impulse können mit Relationen analog zu Gl. (4.14) folgendermaßen geschrieben werden.

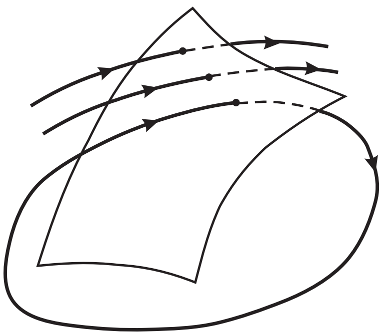
$$x = \sqrt{\frac{2E_1}{m\omega_1^2}}\cos w_1, \quad p_x = -\sqrt{2mE_1}\sin w_1, \quad w_1 = \omega_1 t + \varphi_1; \tag{4.53}$$

$$y = \sqrt{\frac{2E_2}{m\omega_2^2}}\cos w_2, \quad p_y = -\sqrt{2mE_2}\sin w_2, \quad w_2 = \omega_2 t + \varphi_2. \tag{4.54}$$

x und p_x, y und p_y stellen in ihren jeweiligen zweidimensionalen Phasenräumen Ellipsen dar, deren Halbachsen durch die Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen gegeben sind. Betrachtet man alle vier Variablen x, p_x, y, p_y als Funktionen zweier unabhängiger Parameter w_1 und w_2, dann stellen diese einen elliptischen Torus dar. Da aber w_1 und w_2 gemäß den obigen Gleichungen Funktionen der Zeit t sind, liefern die obigen Funktionen eine Raumkurve im vierdimensionalen Phasenraum, die Phasenkurve. Diese muß auf dem Torus liegen. Ist das Frequenzverhältnis rational, $\omega_1 : \omega_2 \in \mathbb{Q}$, dann bildet die Phasenkurve ein diskretes Netz auf dem Torus. Ist es irrational, $\omega_1 : \omega_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dann überdeckt die Phasenkurve den Torus im Laufe der Zeit vollständig.

4.2.2 Die Poincaré-Abbildung

Die Poincaré-Abbildung ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Existenz lokaler Integrale der Bewegung. Diese soll nun am Beispielen des zweidimensionalen anisotropen harmonischen Oszillators erläutert werden. Der Bewegung des Massenpunktes im zweidimensionalen Ortsraum entspricht im vierdimensionale Phasenraum der Ablauf des Phasenpunkts auf der Phasenkurve. Da man den vierdimensionalen Raum nicht darstellen kann, muß man sich mit Projektionen begnügen.



Bei der Poincaré-Abbildung betrachtet man eine Ebene, einen zweidimensionalen Unterraum des Phasenraumes, z.B. die (x, p_x)- oder die (y, p_y)-Ebene. In dieser Ebene werden alle Punkte, an denen die Phasenbahn die Ebene durchstößt, eingetragen; oder die Teilmenge der Durchstoßpunkte, die zu einer bestimmten Geschwindigkeitsrichtung gehören; also die zu $p_y > 0$ oder < 0 im ersten Fall, die zu $p_x > 0$ oder < 0 im zweiten Fall. Diese Konstruktion ist in Abb. 4.13 für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator dargestellt. Bei kleinen Frequenzverhältnissen ist die Bewegung mit einem entsprechend kleinen kleinsten gemeinsamen Vielfachen periodisch. Diese Zahl und damit die Zahl der Durchstoßpunkte nehmen mit dem Frequenzverhältnis zu, sodaß eine quasikontinuierliche Kurve entsteht. Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, daß dies nur der Fall ist, wenn entsprechend viele Integrale der Bewegung, zumindest lokal, existieren; andernfalls füllen die Durchstoßpunkte die Ebene in einem weiten Bereich in unregelmäßiger und chaotischer Weise.

4.2.3 Das Hénon-Heiles-System. Geordnete und chaotische Bewegung

Ein System, das mathematisch einem nichtlinearen, gekoppelten Oszillator gleicht, ist von Hénon und Heiles untersucht worden:

$$\ddot{x} = -x - 2xy, \quad \ddot{y} = -y + y^2 - x^2. \tag{4.55}$$

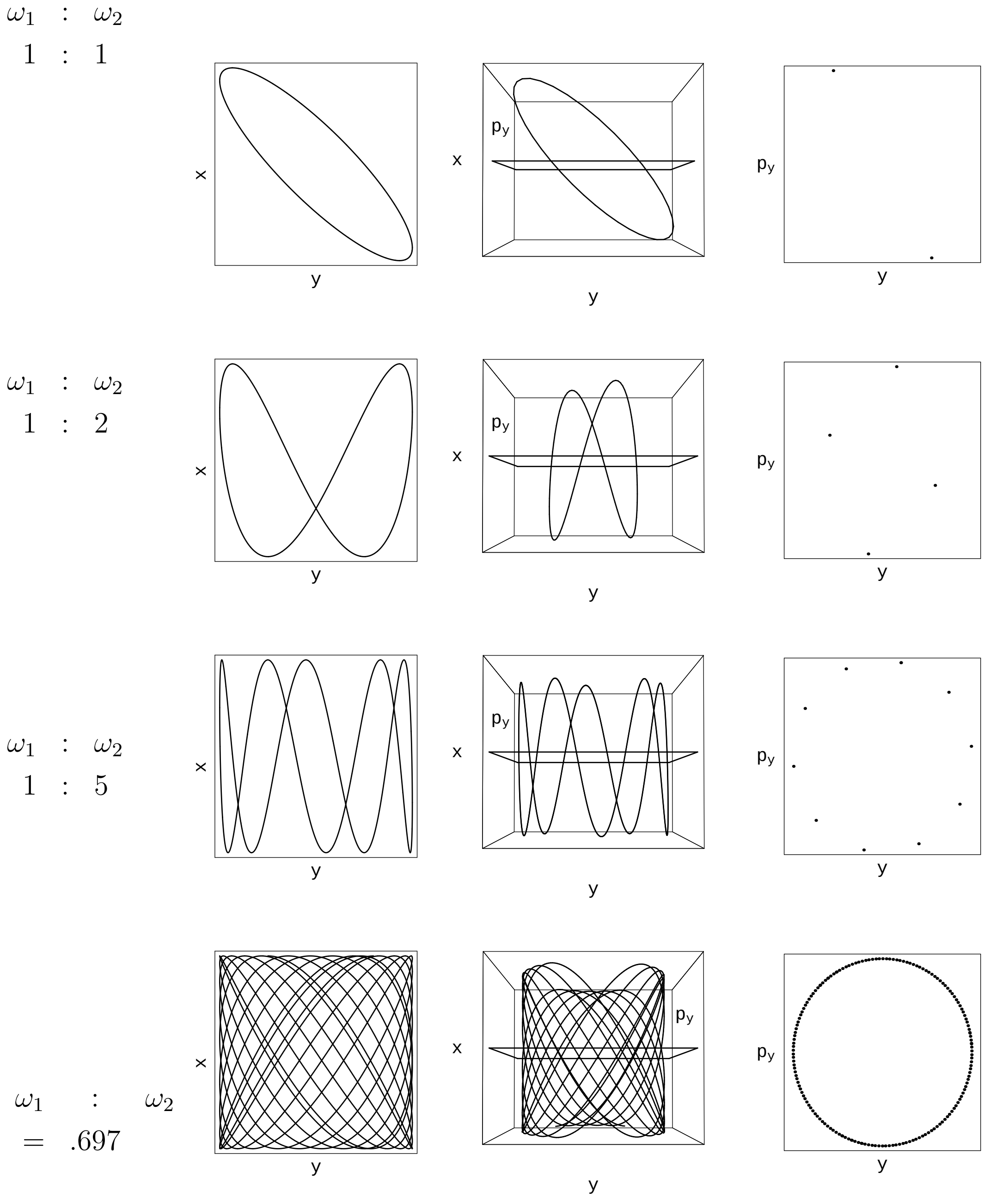
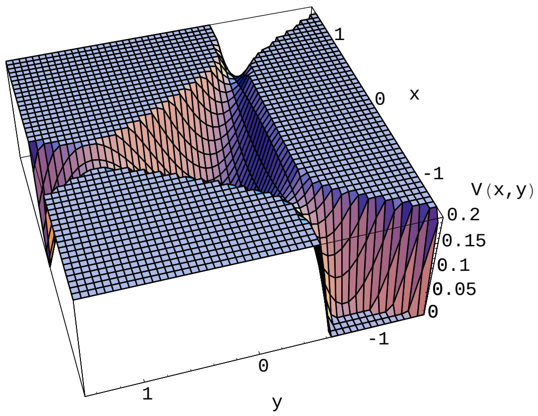
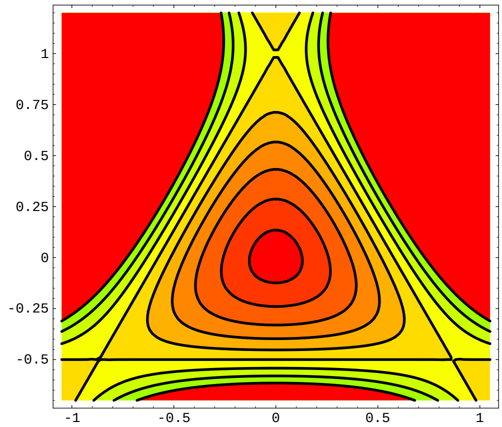


Abbildung 4.13: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator für verschiedene Frequenzverhältnisse $\omega_1 : \omega_2$. Links die Bahnkurve im Orts (x, y)-Raum. In der Mitte ist der dreidimensionale Unterraum (x, y, p_y) des vierdimensionalen Phasenraumes dargestellt. Der Beobachtungspunkt ist so gewählt, daß die POINCARÉ-Ebene projizierend ist. Ganz rechts alle (außer in der letzten Zeile) Punkte, in denen die Phasekurve die (y, p_y)-Ebene durchsetzt.



(a)



(b)

Abbildung 4.14: Das Potential $V(x, y)$ des HÉNON-HEILES-Systems. (a) Das Relief in Perspektive. (b) Diagramm mit Höhenlinien. Die Sattelpunkte sind an den Scheiteln des gleichseitigen Dreiecks, das der Höhenlinie $V(x, y) = 1/6$ entspricht.

Der erste Term jeder der rechten Seiten gibt eine lineare rücktreibende Kraft, entspricht also einem linearen Oszillator mit der Masse $m = 1$ und der Kreisfrequenz $\omega = 1$. Die weiteren Terme geben nichtlineare Koppelglieder.

Das Modell zu den obigen Gleichungen stammt aus der Astronomie. Die beiden Autoren untersuchten die Bewegung eines Sterns in dem sehr vereinfachten Modell einer scheibenförmigen Galaxis. Die Kräfte entsprechen dem mittleren Kraftfeld, das die übrigen Massen dieser Galaxis erzeugen.

Man kann sofort das Potential und die Gesamtenergie angeben. (Dazu wird die erste der obigen Gleichungen mit $\dot{x}$, die zweite mit $\dot{y}$ multipliziert; die resultierenden Ausdrücke werden addiert.)

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3, \tag{4.56}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + V(x, y). \tag{4.57}$$

Das Potential $V(x, y)$ ist in Abb. 4.14a und 4.14b gezeigt. Es entspricht einer ungefähr dreieckigen Potentialgrube, die an gewissen Teilen des Randes von unendlich hohen Bergen begrenzt wird. Zwischen diesen Bergen gibt es aber drei Pässe der Höhe $V(x, y) = 1/6$. Deren Sattelpunkte sind an den Stellen:

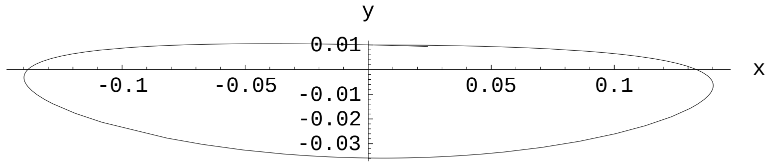
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Der Wert $E = 1/6$ begrenzt den Bereich der stabilen Bewegung; für höhere Werte der Gesamtenergie kann der Massenpunkt über einen der Pässe entkommen. Die Untersuchung durch numerische Lösung der Bewegungsgleichungen zeigt, daß die Bewegung für kleine Werte der Energie $E \ll 1/6$ geordnet und voraussehbar ist. Aber selbst für gebundene Zustände verläuft die Bewegung für eine Energie in der Nähe von, jedoch unter $1/6$ meist chaotisch und nicht voraussagbar.

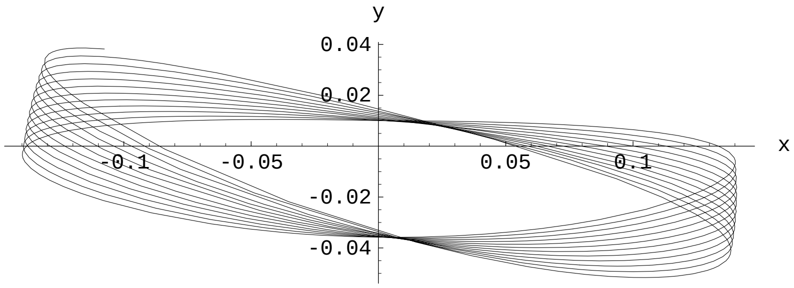
Zuerst ein Beispiel für niedrige Energie und hohe Ordnung: Bei Fehlen der nichtlinearen Terme ist die Bahn eine Ellipse. Die nichtlinearen Terme bewirken, daß diese Ellipse etwas verschoben und verdrückt wird; auch schließt sie sich nicht mehr (Abb. 4.15a). Bei den in diesem Beispiel benützten Anfangsbedingungen dreht sie sich ständig weiter, (Abb. 4.15b), und füllt allmählich einen Teilbereich der (x, y)-Ebene aus, (Abb. 4.15c). Die dreizählige Symmetrie des Potentials tritt dabei klar zu Tage. Diese Drehung führt zu einer periodischen Amplitudenmodulation der x- und y-Koordinate des Massenpunkts, die eine regelmäßige Schwingung mit einer Periode geringfügig größer als 2π aufweisen, Abb. 4.16. Dies ist nur ein Beispiel, das zu ganz speziellen Anfangsbedingungen gehört. Andere Anfangsbedingungen können zu einer verdrückten Bahnellipse führen, deren Achsen in einem begrenten Winkelbereich hin- und herschwanken. Abb. 4.17 zeigt eine chaotische Bahnkurve für einen Energiewert $E = .1617...$, der schon recht nahe am Grenzwert $E = 1/6 = .16666...$ liegt. Die Bahnkurve ist vollständig unregelmäßig; es ist unmöglich, aus dem bisherigen Verlauf derselben irgendeine Voraussage über den zukünftigen zu machen, außer dieser, daß er weiterhin chaotisch sein wird. Abbn. 4.18 geben die Koordinaten als Funktionen der Zeit. Man sieht unregelmäßige Schwankungen der Periode und der Amplitude. Der Vergleich zwischen den ausgezogenen und den strichlierten Kurven beweist, daß mit hoher Genauigkeit gerechnet werden muß, wenn man für längere Zeiten verläßliche Resultate benötigt. Ein einfacher Test ist, von der Endzeit zur Anfangszeit zurückzurechnen und nachzusehen, ob man dabei wieder bei den Anfangsdaten ankommt; dabei muß man die Geschwindigkeiten der Anfangsdaten für den Rücklauf umkehren. Doch auch für solche hohe Energiewerte kann es spezielle Anfangswerte geben, für die man eine relativ regelmäßige und übersichtliche Bahn erhält.

Die wohlgeordnete Bewegung bei niedriger Energie gibt Anzeichen für das Wirken von weiteren Integralen der Bewegung. Hiezu wird wieder die Poincaré-Abbildung herangezogen. $\dot{x}$ wird aus der Gleichung für die Gesamtenergie, Gl. (4.57), berechnet. Es wird die Ebene $x = 0$ als die Ebene des Poincaré-Schnitts gewählt. Es werden die Punkte in der $(y, \dot{y})$-Ebene gesucht, in denen die Phasenkurve diese Ebene durchstößt. Diese werden in einem Bereich liegen, der durch die folgende Bedingung festgelegt ist:

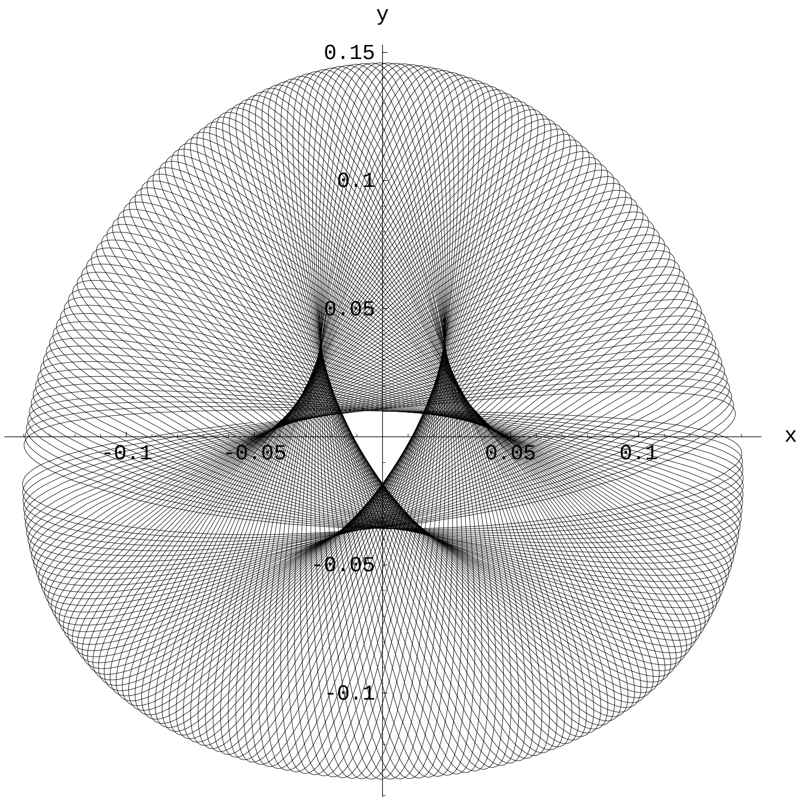
$$E \geq \frac{1}{2}\dot{y}^2 + V(0, y). \tag{4.58}$$



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.15: Eine Bahn des Hénon-Heiles-Systems. $E \approx 0.01; x_0 = 0$, $y_0 = .01$, $v_{x0} = .141$, $v_{y0} = 0$. (a) Eine Periode. (b) Ungefähr 4 Perioden. (c) Ungefähr 125 Perioden.

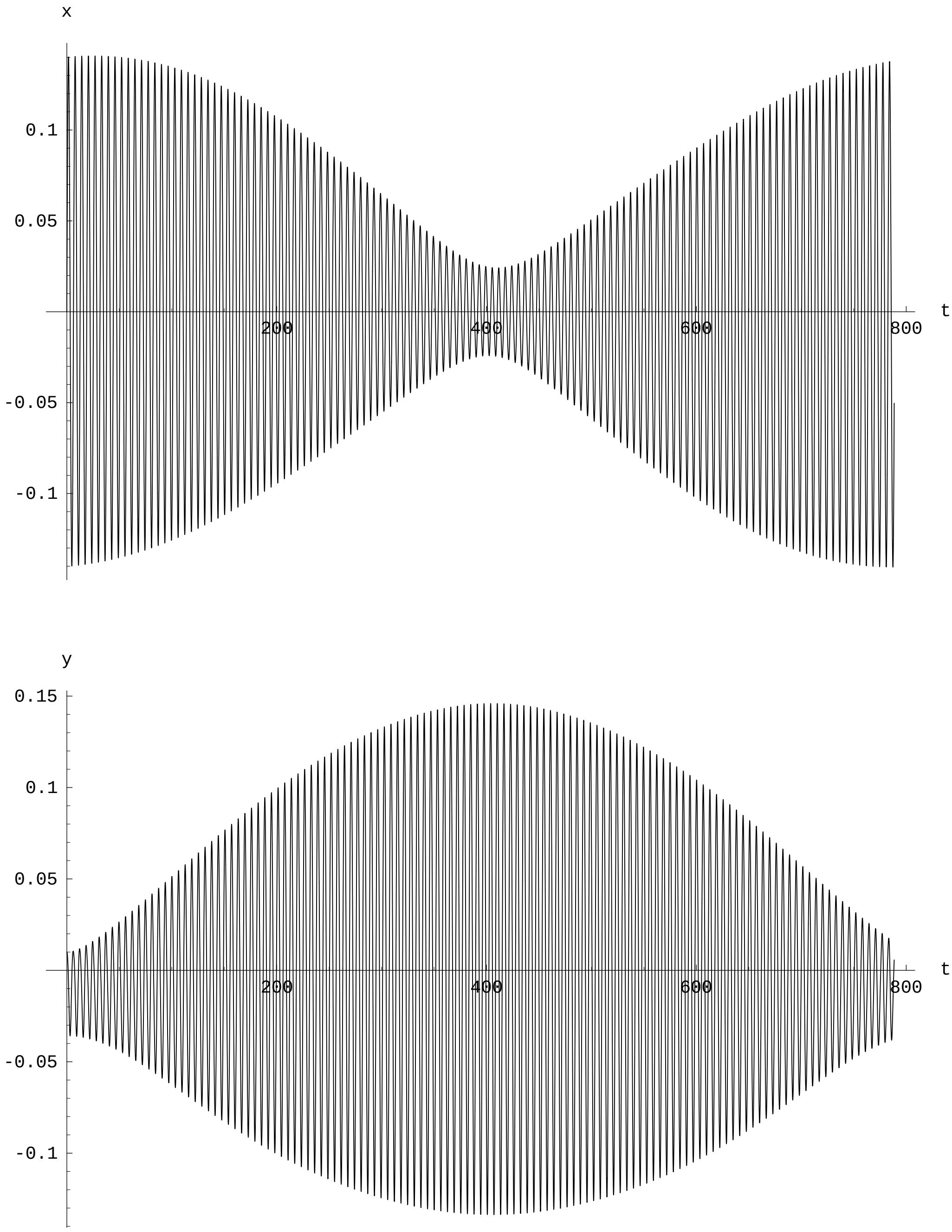


Abbildung 4.16: Die x- und y-Koordinaten der gleichen Bahn wie in Abb. 4.15.

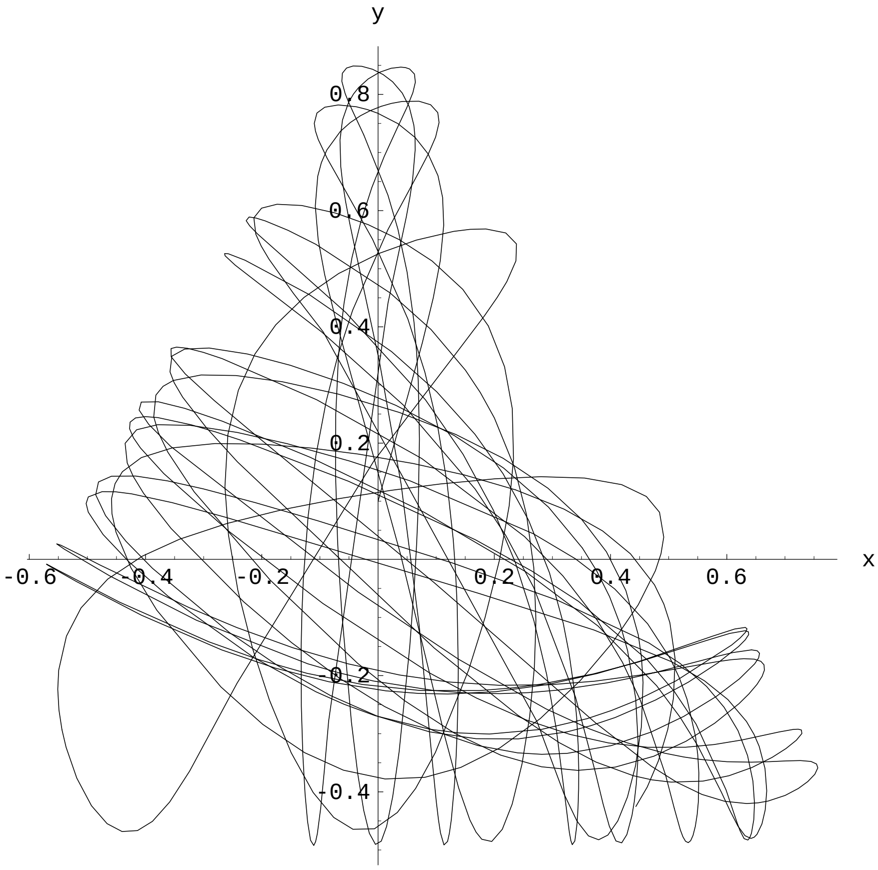


Abbildung 4.17: Eine chaotische Bahn des HÉNON-HEILES-Systems. $E \approx 0.1617$; $x_0 = 0$, $y_0 = .1$, $v_{x0} = .15$, $v_{y0} = 0.54$.

Abb. 4.19 zeigt die POINCARÉ-Schnitte für die beiden vorher behandelten Beispiele. Der Schnitt zu niedriger Gesamtenergie führt zu geordneter Bewegung und zu einer geschlossenen Kurve im POINCARÉ-Schnitt. Bei dem Energiewert, der knapp unter der Bindungsenergie liegt, sind die Bewegung und damit auch die Verteilung der Punkte im POINCARÉ-Schnitt chaotisch. Variiert man bei geringer Energie, z.B. für $E = 0.05$, die Anfangsbedingungen, erhält man für jedes System von Anfangswerten eine geschlossene Kurve. Diese Schar von Kurven scheint den ganzen Energiebereich, Gl. (4.58), auszufüllen. Bei höheren Werten, z.B. $E = 0.11$, ist ein neues Verhalten zu beobachten. Für gewissen Anfangswerte gibt es eine ungeordnete, chaotische Menge von Schnittpunkten, die alle zu einer Phasenkurve gehören. Phasenpunkte, die zu anfänglich benachbarten Phasenkurven gehören, driften im Laufe der Zeit weit auseinander. Für $E > 0.11$ sind nur mehr ganz wenige Kurven vorhanden; bei $E > 0.1666$ sind diese fast vollständig verschwunden. Solange geschlossene Kurven im POINCARÉ-Schnitt vorhanden sind, ist dies als ein Hinweis auf die Wirksamkeit von zumindest lokal gültigen Integralen der Bewegung aufzufassen.

4.3 Die Saitenschwingung

In Abb. 4.21 ist eine eingespannte Saite gezeigt; ihre Ruhelage sei die x-Achse. Die Saite werde senkrecht zur x-Achse um die Länge u ausgelenkt und diese Länge hängt vom Ort und der Zeit ab, also:

$$u = u(x, t).$$

Die Funktion $u(x, t)$ beschreibt also die Bewegung der Saite und es ist unsere Aufgabe die Bewegungsgleichung für $u(x, t)$ aufzustellen.

Die Auslenkung einer Saite ist ein einfaches Beispiel für ein *Feld*. Man versteht darunter eine physikalische Größe, welche vom Ort und im allgemeinen auch von der Zeit abhängt. Später, in der Fluidmechanik, wird das Feld die zentrale Größe sein, so wie es die Teilchenbahnen in der Punktmechanik waren. Anstelle der Bewegungsgleichungen für die Bahnen untersuchen wir nun partielle Differentialgleichungen für die Felder, die *Feldgleichungen*.

Wir denken uns nun die Saite in N Massenelemente aufgeteilt, welche durch Punktmassen ersetzt werden. Die elastischen Eigenschaften der Saite simulieren wir durch Federkräfte zwischen den Massenpunkten. Damit können wir vom bereits bekannten Problem der Bewegung von N Massenpunkten ausgehen. Wir stellen hiefür die LAGRANGE-Funktion auf, nehmen den Limes $N \to \infty$ und werten das HAMILTON-Prinzip aus. Dies führt zur gesuchten Bewegungsgleichung für $u(x, t)$. Dieser Vorgang ist typisch für die *Modellbildung* in der theoretischen Physik.

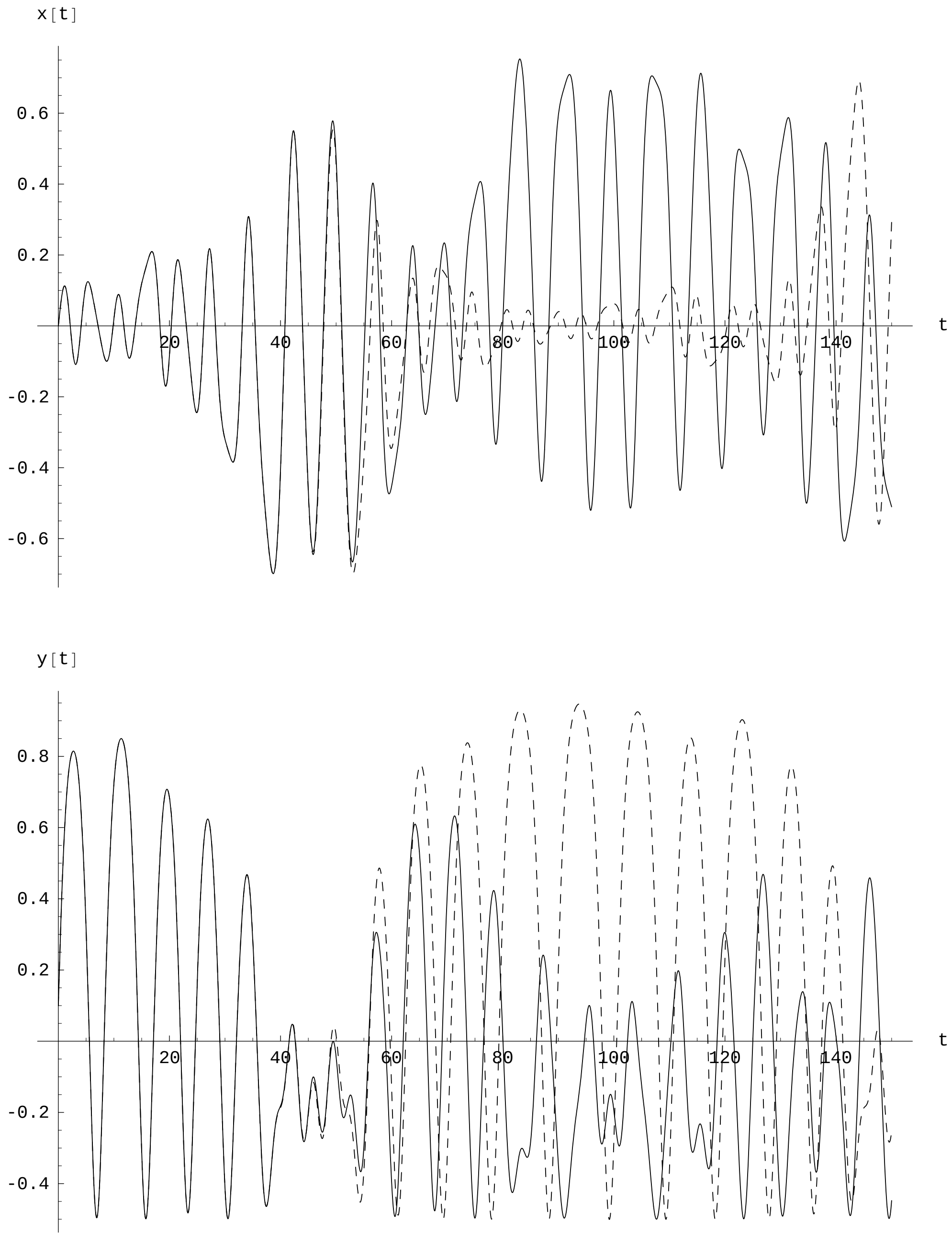


Abbildung 4.18: Die x- und y-Koordinaten der gleichen Bahn wie in Abb. 4.17.

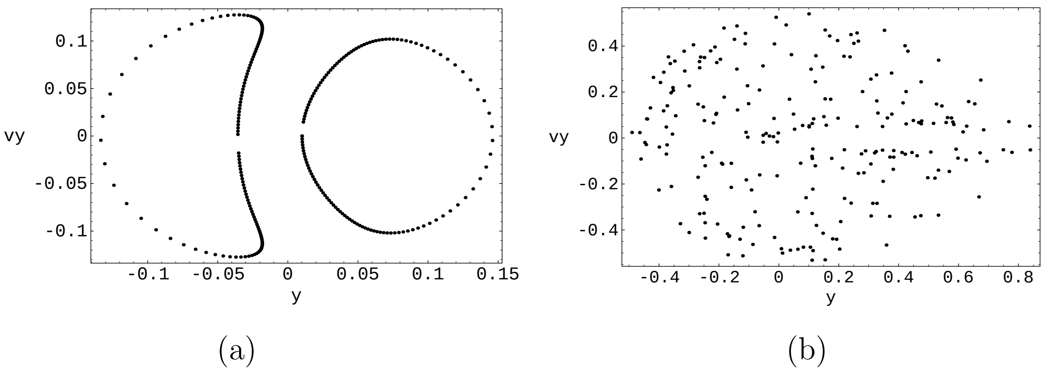


Abbildung 4.19: POINCARÉ-Schnitte: für (a) geordnete Bewegung, $E \approx 0.01$, Abbn. 4.15 - 4.16; für (b) ungeordnete Bewegung, $E \approx 0.1617$, Abbn. 4.17 - 4.18.

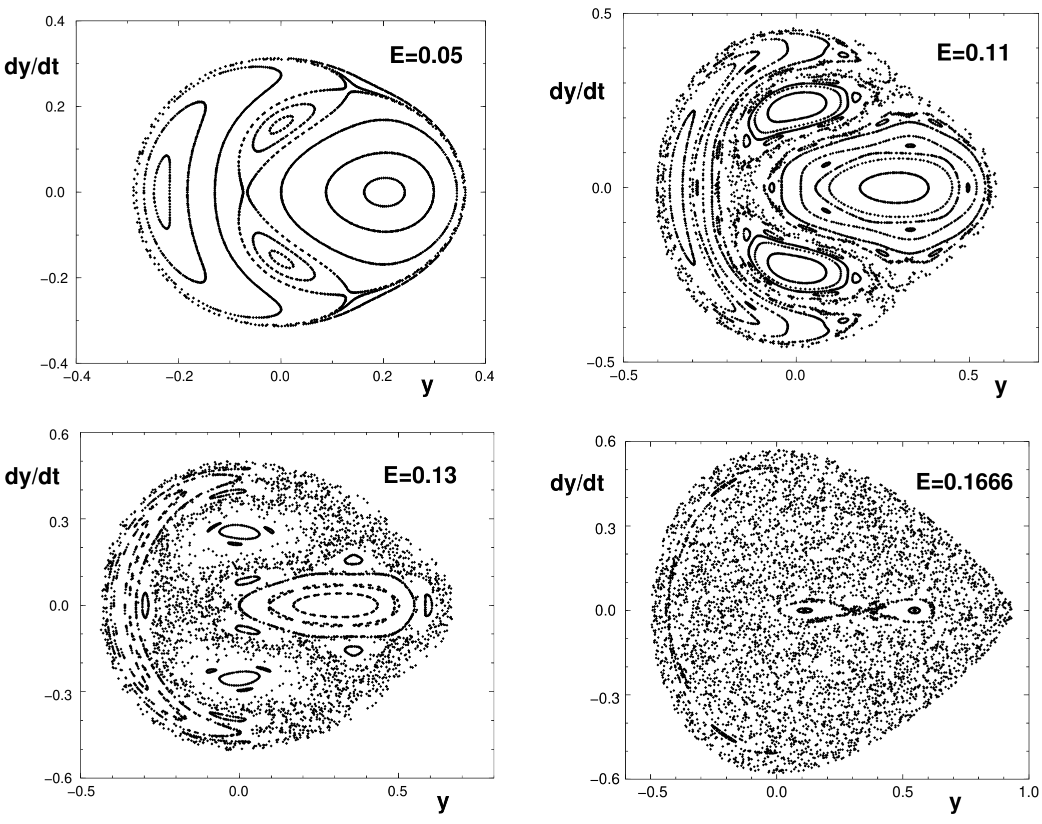


Abbildung 4.20: POINCARÉ-Schnitte für verschiedene Energien.

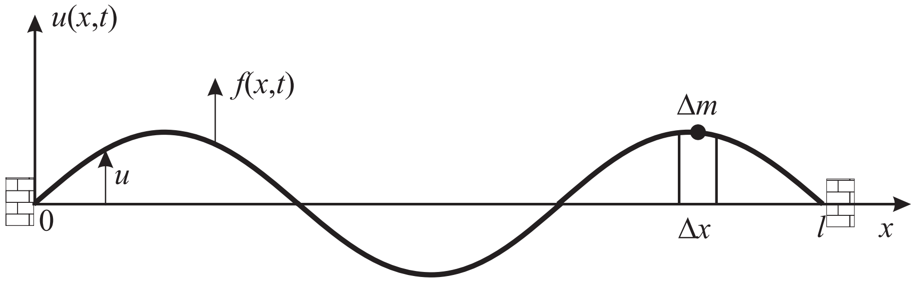


Abbildung 4.21: Zwischen $x = 0$ und $x = l$ ist eine Saite eingespannt. Wenn keine äußeren Kräfte $f(x,t)$ wirken, ist die Ruhelage gleich der x-Achse. Die Länge, um die die Saite senkrecht zur x-Achse ausgelenkt ist, wird mit $u(x,t)$ bezeichnet. Die Abbildung skizziert eine mögliche Auslenkung zu einer bestimmten Zeit.

Die Ruhelage der Saite ist der Abschnitt $[0, l]$ der x-Achse. Dieses Intervall wird in N gleich große Abschnitte Δx aufgeteilt, also gilt $l = N\Delta x$. Für $N \gg 1$ können wir die Massen der einzelnen Abschnitte als Massenpunkte

$$\Delta m_i \quad \text{bei} \quad x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

behandeln. Die Auslenkung des i-ten Massenpunktes hängt mit dem Feld $u(x,t)$ über

$$u_i(t) = u(x_i, t) \tag{4.59}$$

zusammen. Durch die Diskretisierung wird das Feld $u(x,t)$ durch N Funktionen $u_i(t)$ ersetzt. Für $N \to \infty$ liegt dann die Bewegung der Massenpunkte das Feld $u(x,t)$ fest.

Die kinetische Energie des Systems aus N Massenpunkten ist durch

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{2}\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho\Delta x}{2}\dot{u}_i^2$$

gegeben. Hier ist ρ eine homogene Massendichte der Dimension Masse/Länge.

Die Saite sei mit der Kraft P zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = l$ eingespannt. Der Abstand zwischen den benachbarten Massenpunkten ist durch

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2} \approx \Delta x \left[1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\,(\Delta x)^2}\right] \tag{4.60}$$

gegeben, wobei kleine Auslenkungen $u_i(t)$ angenommen wurden. Die Vorspannung der Saite mit der Kraft P bedeutet, daß die Feder, welche die elastischen Eigenschaften der Saite simuliert, bereits in der Ruhelage $\Delta s = \Delta x$

mit der Kraft P vorgespannt ist. Eine Vergrößerung des Abstandes von Δx auf Δs aus Gleichung (4.60) ergibt einen Beitrag zur potentiellen Energie der Form $P(\Delta s - \Delta x)$ und die Summe all dieser Beiträge ergibt die gesamte potentielle Energie

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} P \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\,(\Delta x)^2}. \tag{4.61}$$

Zusätzliche Beiträge kommen noch von den Federn zwischen dem ersten und dem N-ten Massenpunkt und den jeweiligen Einspannpunkten bei $x = 0$ und $x = l$. Da wir aber am Limes $N \to \infty$ interessiert sind, kann dieser Beitrag vernachlässigt werden.

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} T &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho \Delta x}{2} \dot{u}_i^2 \\ &\overset{(4.59)}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta x \left[\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}\right]^2 \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]^2. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun weiter

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x_i},$$

so folgt für die potentielle Energie (4.61):

$$\begin{aligned} U &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N-1} P \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\,(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{P}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x \left[\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x_i}\right]^2 \\ &= \frac{P}{2} \int_0^l dx \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion des Systems

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u', \dot{u}) &= T - U \\ &= \int_0^l dx \underbrace{\left\{ \frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]^2 - \frac{P}{2} \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2 \right\}}_{L(u', \dot{u})}, \end{aligned}$$

wobei mit $L(u', \dot{u})$ die LAGRANGE-*Dichte* eingeführt wurde. Weiters gilt:

$$u' = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Die Saite ist als Grenzfall eines Systems aus vielen Massenpunkten anzusehen und es gilt das Hamiltonprinzip (3.59)

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(u', \dot{u}) \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx\, L(u', \dot{u}) = 0. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Es folgt dann analog zu (A.34) die EULERsche Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \tag{4.63}$$

mit

$$L = \frac{1}{2}\left(\rho \dot{u}^2 - P u'^2\right).$$

Daraus folgt unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \tag{4.64}$$

eine *Wellengleichung* mit der *Wellengeschwindigkeit* c. Dies ist eine *lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.*

Bei der Ableitung der EULER-Gleichung aus der Forderung $\delta S = 0$ war vorauszusetzen, dass die zu variierende Funktion am Rand des Integrationsbereichs fest gehalten wird. Dieser Integrationsbereich ist entsprechend (4.62) in der (x,t)-Ebene durch das Rechteck $x = 0$, $x = l$, $t = t_1$ und $t = t_2$ festgelegt. An zwei Seiten dieses Rechtecks ist diese Vorgabe durch die Einspannung der Saite in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ festgelegt, also durch

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Dies ist eine notwendige *Randbedingung* für die Differentialgleichung (4.64). Eine weitere Vorgabe erfolgt entlang der anderen beiden Seiten des Integrationsbereichs und ist durch

$$u(x,t_1) = F(x), \quad u(x,t_2) = H(x), \quad x \in [0,l]$$

gegeben, oder, besser noch durch die *Anfangsbedingungen*

$$u(x,t_1) = F(x), \quad \dot{u}(x,t_1) = G(x), \quad x \in [0,l].$$

Gleichung (4.64) kann trivial auf zwei Dimensionen (elastische Membran) oder drei Dimensionen erweitert werden. Gleichung (4.64) hat dann die Form

$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\ddot{u}(\mathbf{r},t) = 0.$$

Solche partiellen Differentialgleichungen treten häufig bei Problemen der Elektrodynamik oder auch in der Fluiddynamik auf.

Auf die Saite könnte ferner, wie in Abb. 4.21 angedeutet, eine Kraftdichte $f(x,t)$ der Dimension Kraft/Länge wirken. Wirkt nun $f(x,t)$ in Richtung von $u(x,t)$, so führt die Auslenkung eines Massenpunktes Δm zum Energiebeitrag $\Delta U = -u(x,t)f(x,t)\Delta x$ und die Lagrangedichte lautet dann

$$L(u,u',\dot{u},x,t) = \frac{\rho}{2}\dot{u}^2 - \frac{P}{2}u'^2 + uf(x,t),$$

womit L nunmehr explizit von der Auslenkung abhängt und zusätzlich über die äußere Kraft auch von x und t. (4.63) resultiert dann in der *inhomogenen Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{f(x,t)}{P}.$$

Ein Beispiel für eine solche äußere Kraft ist die Schwerkraft. Weist die Erdbeschleunigung $\mathbf{g}$ in Abb. 4.21 nach unten, so ist $f = -\rho g$.

Schwingungen der kräftefreien Saite

Setzen wir $t_1 = 0$, so ist folgendes Gleichungssystem aufzulösen:

$$u''(x,t) - \frac{1}{c^2}\ddot{u}(x,t) = 0, \tag{4.65a}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{4.65b}$$

$$u(x,0) = F(x), \qquad \dot{u}(x,0) = G(x). \tag{4.65c}$$

Nun gilt für alle *linearen* Differentialgleichungen das *Superpositionsgesetz*. Es sagt aus, dass mit den linear unabhängigen Lösungen u_1 und u_2 der Differentialgleichung auch eine beliebige Linearkombination von u_1 und u_2 eine Lösung ist. Also gilt für eine beliebige lineare Differentialgleichung $\mathcal{D}(u) = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathcal{D}(u_1) & = & 0 \\ \mathcal{D}(u_2) & = & 0\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad a_1\mathcal{D}(u_1) + a_2\mathcal{D}(u_2) = \mathcal{D}(a_1u_1 + a_2u_2) = 0,$$

mit a_1 und a_2 beliebigen Konstanten.

Wir bestimmen nun einen Satz von Lösungen $\{u_n(x,t)\,|\,n=1,2,\ldots\}$, welche die Wellengleichung (4.65a) und die Randbedingungen (4.65b) erfüllen. Dieser Satz wird in dem Sinn vollständig sein, dass wir mit der Linearkombination $\sum_n a_n u_n(x,t)$ die Anfangsbedingungen (4.65c) erfüllen können.

Der Separationsansatz

$$u(x,t) = v(x)\,g(t)$$

wandelt (4.65a) in

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} \tag{4.66}$$

um und die partiellen Ableitungen werden durch gewöhnliche Ableitungen ersetzt. Die linke Seite von (4.66) hängt nicht von t und die rechte Seite nicht von x ab, und damit sind beide Seiten unabhängig von x und t. Sie müssen also gleich einer Konstanten sein, welche wir mit $-k^2$ bezeichnen. Damit wird (4.66) zu

$$\begin{aligned} v''(x) + k^2 v(x) &= 0 \\ \ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) &= 0, \quad \omega = ck. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für $v(x)$ lautet

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

und die Randbedingung (4.65b) ergibt $v(0) = v(l) = 0$ und damit gilt $C_2 = 0$ und

$$k = \frac{n\pi}{l} = k_n, \quad n = 1,2,\ldots$$

Für n sind grundsätzlich alle positiven und negativen ganzen Zahlen möglich. Auch $n=0$ ist eine mögliche Lösung, sie führt aber zu $u(x,t)=0$, also zur uninteressanten Ruhelage. Ein eventuelles Minuszeichen kann schließlich in C_1 adsorbiert werden und wir können uns auf die positiven Werte von n beschränken.

Wir erhalten dann für $g(t)$ die Differentialgleichung

$$\ddot{g}(t) + \omega_n^2 g(t) = 0, \quad \omega_n = ck_n, \quad n = 1,2,\ldots$$

mit der allgemeinen Lösung

$$g(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t).$$

Daraus folgt schließlich vollständig:

$$u_n(x,t) = C_1 \sin(k_n x)\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right]. \tag{4.67}$$

Man kann C_1 weglassen und jede Linearkombination von $u_n(x,t)$ wird die *allgemeine* Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right] \tag{4.68}$$

bilden. Diese Lösung erfüllt natürlich die Randbedingung (4.65b). Sie erfüllt aber auch die Anfangsbedingungen (4.65c), da

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) = F(x) \\ \dot{u}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin(k_n x) = G(x) \end{aligned}$$

zur Bestimmung der noch offenen Konstanten a_n und b_n herangezogen werden kann. Es sind natürlich nur Anfangsbedingungen mit $F(0) = F(l) = 0$ und $G(0) = G(l) = 0$ möglich, da ja die Saite in diesen Punkten eingespannt ist. Aus der Theorie der FOURIER-Reihen ist bekannt, daß jede solche Funktion im Intervall $[0,l]$ nach Funktionen $\sin(k_n x)$ entwickelt werden kann. Dies erlaubt dann die Bestimmung von a_n und b_n über Koeffizientenvergleich. Allgemein ergeben sich die Koeffizienten aus der Lösung von

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l dx\, F(x) \sin(k_n x), \\ b_n &= \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l dx\, G(x) \sin(k_n x), \end{aligned}$$

wie die Theorie der FOURIER-Transformation lehrt.

Üblicher Weise schreibt man für (4.68)

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n), \tag{4.69}$$

mit den *Eigenschwingungen (Eigenmoden)*

$$u_n(x,t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \tag{4.70}$$

der *Amplitude* A_n, der *Phase* φ_n, der *Eigenfrequenz* ω_n und der *Wellenzahl* $k_n = \omega_n / c$. Man führt schließlich noch die *Wellenlänge* $\lambda_n = 2\pi/k_n$ ein.

In Abb. 4.21 ist die Momentaufnahme der Eigenschwingung $u_3(x,t)$ dargestellt. Sie stellt die Lage der Saite zu einem Zeitpunkt dar, zu dem $\sin(\omega_3 t+$

$\varphi_3) = 1$ gilt. An einer bestimmten Stelle schwingt dann die Saite zwischen der skizzierten Position und der dazu negativen.

Die Punkte $u(x,t) = 0$ nennt man *Knoten* und bei Eigenschwingungen liegen sie immer an derselben Stelle. Man spricht von einer *stehenden Welle*. Die Wellenlänge λ_n ist gleich dem doppelten Knotenabstand. Die erste Schwingung ($n = 1$, Grundschwingung) mit $\lambda_1 = 2l$ hat keinen Knoten, da die Einspannpunkte nicht mitzählen. Die n-te Eigenschwingung hat somit $n - 1$ Knoten.