Kapitel 5

Der starre Körper

Definition 5.1 *Ein starrer Körper ist ein Sytem von N Massenpunkten m_ν, deren Abstände*

$$|\mathbf{r}_{\mu\nu}| = |\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu| = konst \neq 0 \tag{5.1}$$

sind. Gleichung (5.1) *ist dabei als skleronome Zwangsbedingung zu verstehen.*

Der starre Körper ist ein Modell für ein Stück gewöhnlicher Materie. In diesem Modell werden innere Freiheitsgrade (etwa Vibrationen der Bauelemente um ihre Ruhelage) vernachlässigt. Betrachten wir zunächst $N = 3$ Massenpunkte, dann unterliegen die $3N = 9$ kartesischen Koordinaten aufgrund von Defintion 5.1 $r = 3$ Zwangsbedingungen, nämlich den vorgegebenen und festen Werten von $|\mathbf{r}_{12}|$, $|\mathbf{r}_{23}|$ und $|\mathbf{r}_{31}|$. Das System hat also $f = 3N - r = 6$ Freiheitsgrade. Die Lage jedes weiteren Massenpunktes, welcher dem System hinzugefügt wird, kann durch Vorgabe von drei Abständen zu den bereits vorhandenen Massenpunkten fixiert werden. Damit ergibt jeder zusätzliche Massenpunkt drei zusätzliche Koordintaten *und* drei zusätzliche Zwangsbedingungen. Es bleibt also auch für $N > 3$ bei

$$f = 3N - r = 6 \tag{5.2}$$

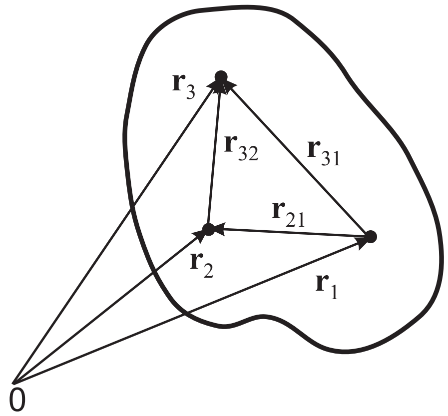
Freiheitsgraden.

5.1 Die Kinematik des starren Körpers

In diesem Abschnitt untersuchen wir nur die Beschreibung der Bewegung des starren Körpers und nicht deren Gesetzmäßigkeiten, was Aufgabe der Dynamik sein wird.

5.1.1 Die Winkelgeschwindigkeit

Satz 5.1 *Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers besteht aus einer Translation und einer Rotation.*

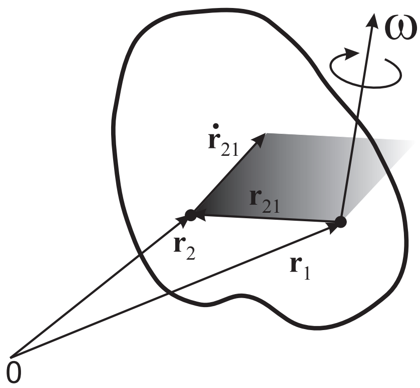


Um dies zu zeigen, wählen wir einen Punkt des Körpers, etwa $\mathbf{r}_1$, als Bezugspunkt. (0 ist dabei der Ursprung eines raumfesten Inertialsystems.) Die Translation entspricht dann dem Verbindungsvektor von der Anfangslage $\mathbf{r}_1(t_a)$ zur Endlage $\mathbf{r}_1(t_e)$. Die Bewegung der übrigen Punkte des Körpers, also insbesonders von $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ wird durch dieselbe Translation plus einer Rotation um eine durch $\mathbf{r}_1(t_e)$ gehende Achse wiedergegeben. Der Translations- und der Drehvektor [siehe Abb. 2.11 und Gleichung (2.108)] enthalten je drei Freiheitsgrade, zusammen also die benötigten sechs Freiheitsgrade.

Wir beweisen Satz 5.1 für eine infinitesimale Bewegung. Wir betrachten die drei Punkte $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ und ihre Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ und $\dot{\mathbf{r}}_3$. $\mathbf{r}_1$ sei der Bezugspunkt und damit ist $\dot{\mathbf{r}}_1$ die Translationsgeschwindigkeit. Für den Punkt $\mathbf{r}_2$ gilt dann

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_{21}^2 = \text{konst}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{21}^2 = 2\mathbf{r}_{21}\dot{\mathbf{r}}_{21} \overset{(5.1)}{=} 0, \tag{5.3}$$

und somit steht $\dot{\mathbf{r}}_{21}$ senkrecht auf $\mathbf{r}_{21}$. Man kann daher einen Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$



$$\dot{\mathbf{r}}_{21} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{21}$$

einführen. Es folgt dann weiter

$$\dot{\mathbf{r}}_{21} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{21}, \tag{5.4}$$

oder

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \tag{5.5}$$

womit Satz 5.1 bewiesen ist.

Satz 5.2 *Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist für alle Punkte des starren Körpers gleich.*

Für den Abstand $\mathbf{r}_{32}$ kann man analoge Brechnungen durchführen und wir werden ein zu Gleichung (5.5) analoges Ergebnis erhalten:

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \,. \tag{5.6}$$

Aus $\mathbf{r}_{32}^2 = \text{konst}$ [wegen Gleichung (5.1)] folgt aber weiter

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}_{32}\dot{\mathbf{r}}_{32} &= (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)(\dot{\mathbf{r}}_3 - \dot{\mathbf{r}}_2) \\
&= (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)\left[-\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\right] \\
&= -\boldsymbol{\omega}\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + \boldsymbol{\omega}'\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\
&= 2\,(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega})\underbrace{(-\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)}_{=\mathbf{A}} \,.
\end{aligned}$$

Da die Vektoren $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ in weitem Maße beliebig sind, kann immer erreicht werden, daß der Vektor $\mathbf{A}$ ungleich dem Nullvektor und nicht orthonormal zu $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}')$ ist. Damit gilt notwendig

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega},$$

womit der Satz 5.2 bewiesen ist.

Satz 5.3 *Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist unabhängig vom Bezugspunkt. Sie ist nur durch die Bewegung charakterisiert.*

Wir wählen nun $\mathbf{r}_3$ als Bezugspunkt. Es muß nun eine zu (5.5) analoge Gleichung gelten.Wir nehmen weiters an, daß die zugehörige Winkelgeschwindigkeit gleich $\boldsymbol{\omega}_3$ sei. Es gilt:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \,.$$

Es folgt dann aus (5.5) und (5.6)

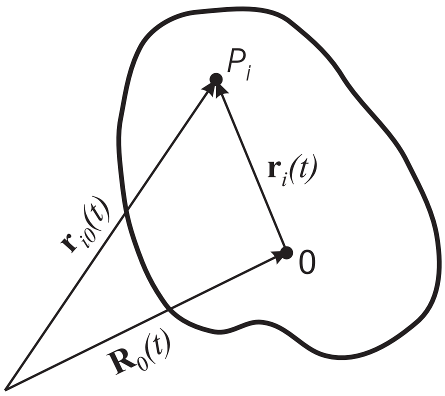
$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= \dot{\mathbf{r}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \\
\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) &= \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \\
(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_3) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Da aber nach Voraussetzung $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{r}_3$ ist, muß

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega} \tag{5.7}$$

sein, womit auch Satz 5.3 bewiesen ist.

Zur weiteren Beschreibung führen wir ein körperfestes Koordinatensystem (KS) ein und betrachten daneben ein raumfestes Inertialsystem (IS), welches dem Standpunkt des Beobachters entspricht. Da das KS mit dem Körper fest



verbunden ist, ist es im allgemeinen kein Inertialsystem. Für die Position P_i jeder Masse m_i gilt

$$\mathbf{r}_{i0}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}_i(t),$$

mit $\mathbf{r}_{i0}(t)$ der Position der Masse m_i aus der Sicht des IS und $\mathbf{R}_0(t)$ bezeichnet den Ursprung von KS aus der Sicht von IS. Die Geschwindigkeit des Ursprungs ist durch

$$\mathbf{v}_0(t) = \frac{d\mathbf{R}_0(t)}{dt}$$

gegeben, wobei sich die Zeitableitung auf IS bezieht.

Wir betrachten nun den beliebigen Punkt P_i des starren Körpers. Seine Geschwindigkeit ist durch

$$\mathbf{v}_{i0} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{i0} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i\right) = \mathbf{v}_0 + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \tag{5.8}$$

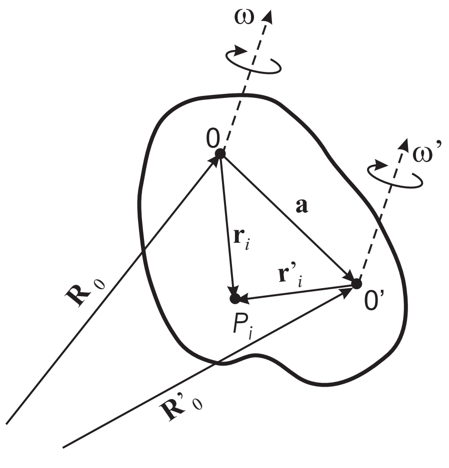
gegeben und sie beschreibt die zeitliche Änderung des Vektors $\mathbf{r}_{i0}$ bezüglich IS. Unter Verwendung von (5.4) kann man dies als

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \tag{5.9}$$

schreiben. Aus (5.8) und (5.9) folgt weiters

$$\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \tag{5.10}$$

eine alternative Formulierung von Satz 5.1.



Wir wählen nun einen anderen Punkt O' als Ursprung des körperfesten Koordinatensystems. Der Vektor zwischen O und O' sei

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}'_0.$$

Dann gilt für den Vektor vom Punkt O' zum Punkt P_i

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}.$$

Die Argumentation, welche zu (5.10) führte ergibt nun

$$\mathbf{v}_{i0'} = \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'_i.$$

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{i0}$ des Punktes P_i muß aber unabhängig von der Wahl des KS sein, also muß $\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_{i0'}$ gelten und damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i &= \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_i' \\ &= \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{a}) \,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Satzes 5.3 folgt schließlich

$$\mathbf{v}_{0'} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \tag{5.11}$$

Als Vektor ist $\boldsymbol{\omega}$ auch unabhängig von der Orientierung der Achsen des KS. Die Translationsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ hängt hingegen von der Wahl des Ursprungs von KS ab, wie Gleichung (5.11) zeigt.

Wir zeigen noch, daß Winkelgeschwindigkeiten wie Vektoren addiert werden. Wir betrachten dazu zwei infinitesimale Drehungen $d\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 dt$ und $d\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 dt$ [siehe Gleichung (2.108)]. Wir wenden diese Drehungen hintereinander auf einen beliebigen Vektor $\mathbf{r}$ an [und beachten Gleichung (3.78) mit $\boldsymbol{\omega}$ als $\mathbf{n}$], so folgt

$$d\mathbf{r}_1 = d\boldsymbol{\varphi}_1 \times \mathbf{r}, \quad d\mathbf{r}_2 = d\boldsymbol{\varphi}_2 \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) = d\boldsymbol{\varphi}_2 \times \mathbf{r}.$$

(Für infinitesimale Größen werden quadratische Terme vernachlässigt.) Damit gilt:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = (d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2) \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}\, dt.$$

Somit kann die Reihenfolge zweier beliebiger infinitesimaler Drehungen vertauscht werden und es gilt für die Winkelgeschwindigkeiten

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Dies kann im allgemeinen nicht auf endliche Drehungen verallgemeinert werden.

5.1.2 Die Eulerschen Winkel

Um die Lage des starren Körpers zu jeder Zeit angeben zu können, benötigt man geeignete verallgemeinerte Koordinaten. Wir verwenden drei kartesische Koordinaten $\{X_i | i = 1, 2, 3\}$, welche den Vektor $\mathbf{R}_0$ festlegen und die drei Euler*schen Winkel* ϕ, ψ und θ, welche die Richtung der Achsen von KS $\{x_i | i = 1, 2, 3\}$ relativ zum IS angeben.

Zur Defintion der Eulerschen Winkel betrachten wir Abb. 5.1. Die (X_1, X_2)-Ebene (grau schraffierte Ellipse) und die (x_1, x_2)-Ebene (strichlierte Ellipse)

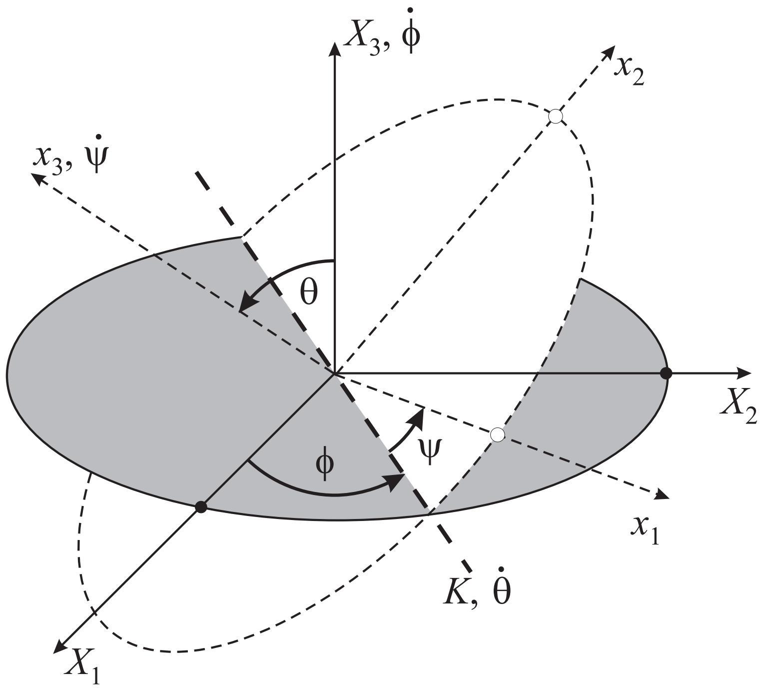


Abbildung 5.1: Durch die drei EULERschen Winkel ϕ, ψ und θ wird die Lage der x_i-Achsen des KS relativ zum IS (mit den Koordinaten X_i) festgelegt.

schneiden sich in der *Knotenlinie* K, welche den Richtungsvektor $\mathbf{e}_K$ zugeordnet erhält. Die EULERschen Winkel sind dann wie folgt definiert:

ϕ :	Winkel zwischen der X_1-Achse und K
ψ :	Winkel zwischen K und der x_1-Achse
θ :	Winkel zwischen der X_3-Achse und der x_3-Achse.

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und den EULERschen Winkeln her. Dazu betrachten wir drei spezielle Drehungen, bei denen jeweils zwei EULERsche Winkel festgehalten werden:

$$\begin{aligned} d\phi = d\psi = 0 : &\qquad \boldsymbol{\omega}_\theta = \dot\theta\,\mathbf{e}_K \\ d\psi = d\theta = 0 : &\qquad \boldsymbol{\omega}_\phi = \dot\phi\,\mathbf{e}_3' \\ d\theta = d\phi = 0 : &\qquad \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot\psi\,\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{\omega}_\theta$ ist die Knotenlinie ($\mathbf{e}_K$) die Drehachse, für $\boldsymbol{\omega}_\phi$ die X_3-Achse des IS ($\mathbf{e}_3'$) und für $\boldsymbol{\omega}_\psi$ die x_3-Achse des KS ($\mathbf{e}_3$). Wir drücken nun die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_K$ und $\mathbf{e}_3'$ durch die des KS aus:

$$\mathbf{e}_K = \cos\psi\,\mathbf{e}_1 - \sin\psi\,\mathbf{e}_2 \tag{5.12}$$

$$\mathbf{e}_3' = \sin\theta\,\sin\psi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\cos\psi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3. \tag{5.13}$$

Beliebige infinitesimale Drehungen entsprechen unabhängigen Änderungen $d\phi$, $d\psi$ und $d\theta$ der EULERwinkel. Die Reihenfolge dieser Drehungen ist beliebig und es gilt

$$d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}\, dt = (\boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\phi + \boldsymbol{\omega}_\psi)\, dt,$$

und damit:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\phi + \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_K + \dot{\phi}\,\mathbf{e}'_3 + \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3. \tag{5.14}$$

Wir stellen nun $\boldsymbol{\omega}$ im KS oder IS dar

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} & \text{KS} \\ \\ \omega'_1\mathbf{e}'_1 + \omega'_2\mathbf{e}'_2 + \omega'_3\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix}\omega'_1\\ \omega'_2\\ \omega'_3\end{pmatrix} & \text{IS.} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{e}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\,\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{e}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\,\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 &= \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{e}_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

wobei wir (5.12), (5.13) und (5.14) verwendet haben. Auf diese Weise konnte die Winkelgeschwindigkeit durch die EULERschen Winkel und ihre Zeitableitungen ausgedrückt werden.

5.2 Der Trägheitstensor

5.2.1 Die kinetische Energie

Der starre Körper bestehe aus N Massenpunkten m_i, $i = 1, \ldots, N$ und seine kinetischen Energie ist die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massenpunkte:

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_{i0}^2 \\ &\overset{(5.10)}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_0^2 + 2\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)\,\mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)^2\,. \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl des Ursprungs des KS kann der in $\boldsymbol{\omega}$ lineare Term zum Verschwinden gebracht werden:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\,\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{r}_i = \begin{cases} 0, & \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{r}_i = 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall ruht der Ursprung des KS, im zweiten Fall wurde der Schwerpunkt des starren Körpers als Ursprung des KS verwendet. In diesem Fall ist entsprechend (2.75) $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = 0$. Wir erhalten also mit

$$T = \frac{M}{2}\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = T_{trans} + T_{rot} \tag{5.16}$$

die kinetische Energie als Summe der kinetischen Energie einer Translation (T_{trans}) und einer Rotation (T_{rot}). Wir werten T_{rot} weiter aus und verwenden die Schreibweise:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

in Bezug auf das KS. Es gilt dann

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r})^2 \\ &= \sum_{i,k=1}^{3} \omega_i^2\,x_k^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \omega_i x_i \omega_k x_k \\ &= \sum_{i,k=1}^{3} \left(r^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)\omega_i\omega_k, \end{aligned}$$

mit $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2$. Damit erhalten wir

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} I_{ik}\omega_i\omega_k, \tag{5.17}$$

mit

$$I_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu^2\delta_{ik} - x_i^{(\nu)} x_k^{(\nu)}\right) = I_{ki} \tag{5.18}$$

dem *Trägheitstensor*. Zusammen mit den $\mathbf{r}_i$ sind die I_{ik} zeitunabhängig. (Am Ende von Abschnitt A.4.2 von Anhang A wird gezeigt, daß I_{ik} ein Tensor zweiter Stufe ist.)

Um vom wenig realistischen Modell diskreter Massenpunkte wegzukommen führen wir die *Massendichte* einer kontinuierlichen Massenverteilung ein:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{5.19}$$

mit ΔV einem kleinen Volumen um $\mathbf{r}$, in welchem sich die Masse Δm befindet. ΔV wird dabei so groß gewählt, daß es viele Atome/Moleküle enthält, aber doch klein genug damit makroskopische Inhomogenitäten nicht unterdrückt werden. Wir ersetzen dann die Masse

$$m_\nu = \rho(\mathbf{r}_\nu)\,\Delta V_\nu$$

jedes Teilvolumens durch die so definierte Punktmasse m_ν im Punkt $\mathbf{r}_\nu$ und damit liegt wieder ein starrer Körper vor. Im Grenzfall $N \to \infty$, $\Delta V_\nu \to 0$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \cdots = \sum_{\nu=1}^{N} \rho(\mathbf{r}_\nu)\Delta V_\nu \cdots \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int d^3r\, \rho(\mathbf{r}) \cdots \tag{5.20}$$

Die Integration kann über den ganzen Raum erstreckt werden, da $\rho(\mathbf{r}) = 0$ außerhalb des Körpers gilt.

Man kann aber (5.19) auch auf eine Ansammlung von Punktmassen anwenden, indem man

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu\right)$$

verwendet [mit $\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu\right)$ der Diracschen Deltadistribution] und dies in (5.20) einsetzt. Auf diese Weise erhält man wieder (5.18).

5.2.2 Der Drehimpuls

Der Drehimpuls eines Systems von Massenpunkten ist die Summe der Einzeldrehimpulse und hängt damit vom Bezugssystem ab:

$$\mathbf{L} = \begin{cases} \sum\limits_\nu m_\nu \left(\mathbf{r}_{\nu,0} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu,0}\right) & \text{IS} \\ \sum\limits_\nu m_\nu \left(\mathbf{r}_\nu \times \dot{\mathbf{r}}_\nu\right) & \text{KS.} \end{cases}$$

Wir bleiben im KS und dort gilt Gleichung (5.9) und wir erhalten:

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}_\nu \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu\right).$$

Wir bestimmen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega}\, r^2 - \mathbf{r}\,(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}) \\ &= \sum_{i,k=1}^{3}\left(r^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)\omega_k \mathbf{e}_i,\end{aligned}$$

und erhalten unter Verwendung von (5.18):

$$\mathbf{L} = \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik}\omega_k \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} L_i \mathbf{e}_i. \tag{5.21}$$

Wir führen nun die Matrix $\boldsymbol{I}$ und die Spaltenvektoren $\mathbf{L}$

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

ein. Somit kann man (5.21) in Matrixform schreiben:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}. \tag{5.22}$$

Damit erhalten wir schließlich für die kinetische Energie der Rotation nach (5.17):

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} I_{ik}\omega_i\omega_k = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}. \tag{5.23}$$

Durch

$$I_{nn} = \mathbf{n}^T\,\boldsymbol{I}\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

definieren wir schließlich das *Trägheitsmoment* bezüglich einer Achse $\mathbf{n}$. Die Diagonalelemente von I_{ik} sind dann die Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen. Die Elemente von I_{ik} außerhalb der Hauptdiagonalen heißen *Deviationsmomente*.

5.2.3 Hauptachsentransformation

Die Einführung des Trägheitstensors I_{ik} erfolgte unter Bezug auf das körperfeste Koordinatensystem. Es ist daher I_{ik} = konst, die konkreten Werte von I_{ik} hängen jedoch von der Wahl des KS ab. Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{I} = (I_{ik})$, die *Hauptträgheitsmomente*, sind jedoch von KS unabhängig und damit eine Eigenschaft des starren Körpers.

T_{rot} ist eine Invariante des Systems und es gilt stets

$$2T_{rot} = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'^T \boldsymbol{I}'\, \boldsymbol{\omega}'.$$

Wir wählen nun eine orthogonale Transformation $\tilde{\alpha}$ (siehe Anhang A, Abschnitt A.4.1) derart, daß $\boldsymbol{I}'$ diagonal wird (A.51)

$$\boldsymbol{I}' = \tilde{\alpha}\, \boldsymbol{I}\, \tilde{\alpha}^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

und jedes KS$'$, in welchem $\boldsymbol{I}'$ diagonal wird, heißt *Hauptachsensystem*. Zunächst kann man feststellen, daß die I_i positiv sind. Wir verwenden dazu (5.18)

$$\begin{aligned} I_1 = I_{11} &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[r_\nu^2 - \left(x_1^{(\nu)} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\left(x_2^{(\nu)} \right)^2 + \left(x_3^{(\nu)} \right)^2 \right] > 0, \end{aligned} \tag{5.26}$$

gleiches gilt für die anderen Diagonalelemente. Weiters ist $\left(x_2^{(\nu)} \right)^2 + \left(x_3^{(\nu)} \right)^2$ das Quadrat des Normalabstands des Punktes $\mathbf{r}_\nu$ von der Drehachse $x_1^{(\nu)}$. Damit ist das Trägheitsmoment eines Körpes gleich der Masse mal dem Quadrat des Normalabstandes von der Drehachse.

Eine symmetrische Matrix kann stets durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden. Wir benützen (5.25)

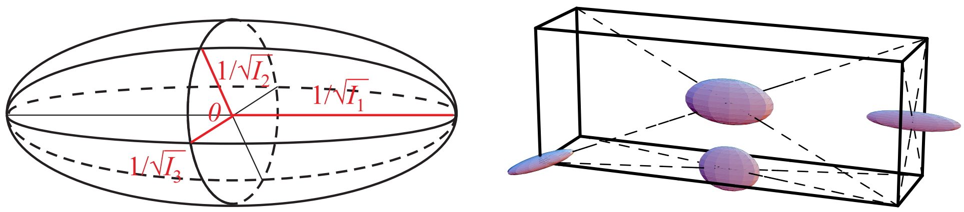
$$I'_{ik} = \sum_{n,l=1}^{3} \alpha_{in} \alpha_{kl} I_{nl} = I_k \delta_{ik}$$

und erhalten weiter

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{im} I_k \delta_{ik} &= \sum_{i,n,l=1}^{3} \alpha_{im} \alpha_{in} \alpha_{kl} I_{nl} \\ I_k \alpha_{km} &\overset{(A.45)}{=} \sum_{n,l=1}^{3} \delta_{mn} \alpha_{kl} I_{nl} \\ &= \sum_{l=1}^{3} I_{ml} \alpha_{kl}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Durch

$$\boldsymbol{\omega}^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \alpha_{k3} \end{pmatrix}$$



(a) (b)

Abbildung 5.2: (a) Das Trägheitsellipsoid. (b) Verschiedenen Stellen des Körpers, welche als Bezugspunkte dienen, entsprechen verschiedene Trägheitsellipsoide.

ordnen wir der Matrix $\tilde{\alpha}$ drei Spaltenvektoren zu und schreiben (5.27) in Matrixform

$$\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}^{(k)} = I_k \boldsymbol{\omega}^{(k)}, \quad \text{oder} \quad (\boldsymbol{I} - I_k \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{\omega}^{(k)} = \mathbf{0}. \tag{5.28}$$

Damit wurde die Eigenwertgleichung der Matrix $\boldsymbol{I}$ mit den Eigenwerten I_k und den Eigenvektoren $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ aufgefunden. Gleichung (5.28) stellt ein lineares homogenes Gleichungssystem für die drei Komponenten von $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ dar, mit der trivialen Lösung $\boldsymbol{\omega}^{(k)} = \mathbf{0}$. Wir suchen aber eine nicht triviale Lösung und damit muß

$$\det\left(\boldsymbol{I} - I_k \boldsymbol{E}\right) = 0 \tag{5.29}$$

gelten. Dies ist ein Polynom dritten Grades in I_k mit den Lösungen I_1, I_2 und I_3, welche alle positiv sind. Die Eigenvektoren $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ und $\boldsymbol{\omega}^{(k')}$ sind für $I_k \neq I_{k'}$ automatisch orthogonal und können für $I_k = I_{k'}$ orthogonal gemacht werden. Es sind dies die Basisvektoren des körperfesten Koordinatensystems KS′, in welchem $\boldsymbol{I}$ diagonal ist. Bei einer Rotation um die Hauptachse, also $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(k)}$ ist wegen (5.22) und (5.28)

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}^{(k)} = I_k \boldsymbol{\omega}^{(k)}, \quad \mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}^{(k)},$$

der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist also parallel zu $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$.

Für den Trägheitstensor, wie für jeden symmetrischen Tensor zweiter Stufe, kann man eine geometrische Deutung geben: Wir verwenden einen dreidimensionalen kartesischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren $\mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ und in diesem Raum stellt der Ausdruck

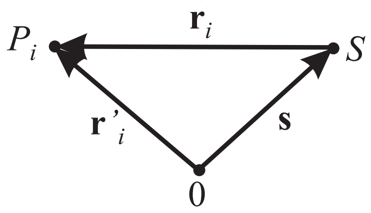
$$\sum_{i,k=1}^{3} I_{ik} x_i x_k = 1$$

einen Kegelschnitt dar, was man leicht zeigen kann, wenn man als Bezugssystem für die Vektoren **r** das Hauptachsensystem des Trägheitstensors verwendet:

$$\sum_{i,k=1}^{3} I_k \delta_{ik}\, \omega_i \omega_k = \sum_{k=1}^{3} I_k \omega_k^2 = 1, \quad I_k > 0.$$

Dies ist ein Kegelschnitt, das *Trägheitsellipsoid*. Die Halbachsen des Ellipsoids haben die Länge $1/\sqrt{I_k}$ (siehe Abb. 5.2a). Die Werte des Trägheitstensors hängen auch von der Lage des Bezugspunkts ab, und so muß man sich vorstellen, daß zu jedem Punkt des Körpers ein anderes Trägheitsellipsoid gehört, wie in Abb. 5.2b angedeutet wurde.

5.2.4 Der Satz von Steiner



Durch diesen Satz wird der Trägheitstensor bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes 0 zum Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes S in Beziehung gebracht. Es gilt:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{s} + \mathbf{r}_i.$$

Bezüglich S gilt Gleichung (2.75):

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = 0.$$

Aus (5.18) folgt für den Trägheitstensor bezüglich 0:

$$\begin{aligned}
I_{ik} &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu'^2 \delta_{ik} - x_i'^{(\nu)} x_k'^{(\nu)} \right) \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[(\mathbf{s} + \mathbf{r}_\nu)^2 \delta_{ik} - \left(s_i + x_i^{(\nu)} \right) \left(s_k + x_k^{(\nu)} \right) \right] \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(s^2 \delta_{ik} - s_i s_k \right) + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu^2 \delta_{ik} - x_i^{(\nu)} x_k^{(\nu)} \right) + \\
&\quad 2\delta_{ik} \sum_{j=1}^{3} s_j \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_j^{(\nu)}}_{=0} - s_i \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_k^{(\nu)} - s_k \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_i^{(\nu)} \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu^2 \delta_{ik} - x_i^{(\nu)} x_k^{(\nu)} \right) + M \left(s^2 \delta_{ik} - s_i s_k \right),
\end{aligned}$$

mit $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$, der Gesamtmasse. Wir erhalten das Ergebnis:

Der Trägheitstensor bezüglich eines beliebigen Punkts O ist gleich dem Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts plus dem Trägheitstensor der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse bezüglich des beliebigen Punkts O.

5.3 Die Dynamik des starren Körpers

5.3.1 Die EULERschen Gleichungen

Die EULERschen Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers. Es sind dies Differentialgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Koordinatensystem; als Koeffizienten treten die Hauptträgheitsmomente auf.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die LAGRANGE-Funktion (3.39)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - U \\ &\overset{(5.16)}{=} T_{trans} + T_{rot} - U,\end{aligned}$$

und wir wollen die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art in der Form (3.37) anwenden. Für die verallgemeinerten Kräfte verwenden wir Gleichung (3.38). Wir haben sechs Freiheitsgrade und wir wählen zunächst die verallgemeinerten Koordinaten $\{X_k | k = 1, 2, 3\}$, welche die Koordinaten des Schwerpunktes des starren Körpers im Inertialsystem sein sollen. Aufgrund dieser Wahl wird mit Hilfe von Gleichung (5.16)

$$T_{trans} = \frac{M}{2} \sum_{k=1}^{3} \dot{X}_k^2 = T_{trans}\left(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3\right).$$

Weiters wählen wir als körperfestes Koordinatensystem das Hauptachsensystem des Trägheitstensors und plazieren den Ursprung in den Schwerpunkt des starren Körpers. Damit erhalten wir für die kinetische Energie der Rotationsbewegung:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} I_k \omega_k^2 = T_{rot}\left(\phi, \psi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right). \tag{5.30}$$

Wir verwenden also für die verbleibenden Freiheitsgrade die EULERwinkel als verallgemeinerte Koordinaten. Schließlich kann man für die potentielle Energie $U = U(X_1, X_2, X_3, \phi, \psi, \theta)$ ansetzen.

Wir lösen zunächst die LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial X_k} = -\frac{\partial U}{\partial X_k}, \quad \forall\, k$$

für die Schwerpunktskoordinaten; dies entspricht

$$M\ddot{X}_k = -\frac{\partial U}{\partial X_k}, \quad \forall\, k, \tag{5.31}$$

wobei $\partial U/\partial X_k$ jene Kraftkomponenten beschreibt, welche die Schwerpunktsbewegung bestimmen. Wir haben mit (5.31) die Differentialgleichung zur Bestimmung der translatorischen Bewegung des Schwerpunktes des starren Körpers aufgefunden.

Es verbleibt die LAGRANGE-Gleichung zweiter Art für die Rotationsbewegung auszuwerten. Wir zeigen dies für die verallgemeinerte Koordinate ψ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = -\frac{\partial U}{\partial \psi},$$

was

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi} = -\frac{\partial U}{\partial \psi}$$

entspricht. Wir bestimmen weiters:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}}\right) &= \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\psi}}, \\
\frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi} &= \sum_k \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial \psi}, \\
\frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_k} &\overset{(5.30)}{=} I_k \omega_k, \\
\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} \overset{(5.15)}{=} 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} \overset{(5.15)}{=} 1, \\
\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} &\overset{(5.15)}{=} \dot{\phi}\,\sin\theta\,\cos\psi - \dot{\theta}\,\sin\psi = \omega_2, \\
\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} &\overset{(5.15)}{=} -\dot{\phi}\,\sin\theta\,\sin\psi - \dot{\theta}\,\cos\psi = -\omega_1, \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} &= 0.
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi} &= \frac{d}{dt}(I_3\omega_3) - (I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_2\omega_1) \\
&= I_3\,\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 = -\frac{\partial U}{\partial \psi}.
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht wieder die verallgemeinerte Kraft. Die verallgemeinerte Koordinate, nach welcher die potentielle Energie abgeleitet wird, ist ein Winkel und so entspricht die Komponente $\partial U/\partial\psi$ einer Komponente des Drehmoments

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu(t) \times \mathbf{F}_\nu, \tag{5.32}$$

mit $\mathbf{F}_\nu$ der externen Kraft, welche im Punkte $\mathbf{r}_\nu$ auf den starren Körper einwirkt. Wir wählen $\partial U/\partial\psi = M_3$.

Auf analoge Weise gewinnen wir die restlichen zwei Gleichungen und wir erhalten schließlich mit

$$\begin{aligned}
I_1\,\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 &= M_1(t) \\
I_2\,\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 &= M_2(t) \\
I_3\,\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 &= M_3(t)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

die EULERschen Gleichungen. Zusammen mit den Gleichungen (5.15) sind dies die Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die EULERwinkel $\phi(t)$, $\psi(t)$ und $\theta(t)$ und sie beschreiben die Rotation des starren Körpers in ihrem zeitlichen Ablauf. Der Nachteil dieser Gleichungen besteht allerdings darin, daß die Komponenten M_i des Drehmoments auf das körperfeste Koordinatensystem bezogen sind. Ihre Zeitabhängigkeit hängt daher von der Bewegung des Körpers ab.

5.3.2 Rotation um eine freie Achse

Wir betrachten einen starren Körper, auf welchen keine Drehmomente wirken, also $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ist. Dies gilt etwa für einen frei fallenden Körper, dessen Schwerpunkt als Ursprung des KS gewählt wird.

Die kräftefreie Translationsbewegung ist gleichförmig, sie erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit. Wir wollen nun untersuchen ob die EULERschen Gleichungen im kräftefreien Fall auch zu einer gleichförmigen Bewegung führen. Dazu schreiben wir die EULERschen Gleichungen für konstantes ω_i, $i = 1, 2, 3$ und $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ an:

$$(I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 = 0, \quad (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 = 0, \quad (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 = 0. \tag{5.34}$$

Wir setzen $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ voraus und dann hat (5.34) die folgende nicht triviale Lösung:

$$\omega_1 = \omega_{10} = \text{konst}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0. \tag{5.35}$$

Durch Vertauschen der Komponenten ergeben sich zwei weitere, analoge Lösungen, dabei müssen stets zwei Komponenten gleich Null sein.

Nun gilt mit den Gleichungen (2.76), (5.32) und (5.22):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

und damit wird

$$\mathbf{L} = \text{konst} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega} = I_1\omega_{10}\mathbf{e}_1 \tag{5.36}$$

für die Lösung (5.35). **L** ist somit ein konstanter Vektor im IS. Damit ist die Lage der körperfesten Achse $\mathbf{e}_1$ im Raum konstant und der Körper rotiert gleichförmig um eine Hauptachse, welche eine zeitlich konstante Richtung hat. Es sind drei solcher Richtungen möglich.

Wir wollen nun die Stabilität der Lösung untersuchen. Dazu betrachten wir eine Bewegung, welche nur geringfügig von (5.35) abweicht:

$$\omega_1 \approx \omega_{10}, \quad \omega_2 \ll \omega_{10}, \quad \omega_3 \ll \omega_{10}. \tag{5.37}$$

In den kräftefreien EULERschen Gleichungen (5.33), $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, vernachlässigen wir Terme, welche in ω_2 und ω_3 quadratisch sind. Für die erste Gleichung gilt dann:

$$I_1\dot{\omega}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \omega_{10} = \text{konst}.$$

Wir verwenden dies in den zwei verbleibenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_3\omega_{10} &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_2\omega_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Wir differentieren die erste Gleichung nach t und erhalten

$$I_2\ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\dot{\omega}_3\omega_{10} = 0,$$

und weiters

$$\begin{aligned} -\dot{\omega}_3\,(I_1 - I_3)\,\omega_{10} &= I_2\ddot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 &= -\frac{I_2}{(I_1 - I_3)\,\omega_{10}}\ddot{\omega}_2. \end{aligned}$$

Dies wird in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} -\frac{I_2 I_3}{(I_1 - I_3)\,\omega_{10}}\ddot{\omega}_2 + (I_2 - I_1)\,\omega_2\omega_{10} &= 0 \\ \ddot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_2)\,(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}\omega_{10}^2\omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

oder mit

$$\Omega = \frac{(I_1 - I_2)\,(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}\omega_{10}^2$$

folgt:

$$\ddot{\omega}_2 + \Omega\omega_2 = 0, \quad \text{und analog} \quad \ddot{\omega}_3 + \Omega\omega_3 = 0. \tag{5.38}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. I_1 ist das größte oder das kleinste der drei Hauptträgheitsmomente. Dann ist $\Omega > 0$ und die Lösungen von (5.38) lauten:

$$\omega_2(t) = a\cos\left(\sqrt{\Omega}t + b\right), \quad \omega_3(t) = c\cos\left(\sqrt{\Omega}t + d\right).$$

Damit führen kleine Abweichungen ($a \ll \omega_{10},\ b \ll \omega_{10}$) zu kleinen Oszillationen um die Lösung $\boldsymbol{\omega}^T = \begin{pmatrix}\omega_{10} & 0 & 0\end{pmatrix}$ und die Lösung ist stabil.

2. Das Trägheitsmoment I_1 ist das mittlere der drei Hauptträgheitsmomente. Dann ist $\Omega < 0$ und die Lösungen von (5.38) lauten

$$\begin{aligned}\omega_2(t) &= a\exp\left(-\sqrt{-\Omega}t\right) + b\exp\left(\sqrt{-\Omega}t\right)\\ \omega_3(t) &= c\exp\left(-\sqrt{-\Omega}t\right) + d\exp\left(\sqrt{-\Omega}t\right),\end{aligned}$$

und damit wachsen kleine Auslenkungen ($b \ll \omega_{10},\ d \ll \omega_{10}$) von der Lösung $\boldsymbol{\omega}^T = \begin{pmatrix}\omega_{10} & 0 & 0\end{pmatrix}$ exponentiell an. Dies gilt natürlich nur solange die Voraussetzung (5.37) erfüllt ist. Die Lösung ist instabil.

Aus dieser Untersuchung folgt, daß die Rotation um die Achse des größten oder des kleinsten Hauptträgheitsmoments stabil in dem Sinne ist, daß kleine Abweichungen klein bleiben. Hingegen ist die Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments nicht stabil, da es kein System gibt, in welchem es nicht zu kleinen Störungen kommt und diese exponentiell anwachsen würden.

5.3.3 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Wir untersuchen jetzt die kräftefreie Rotation für den *symmetrischen* starren Körper, oder Kreisel. Für die Hauptträgheitsmomente gilt:

$$I_1 = I_2 = I, \quad I_3 \neq I. \tag{5.39}$$

Symmetrische Kreisel sind insbesonders Körper, welche rotationssymmetrisch bezüglich ihrer x_3-Achse sind; diese wird *Figurenachse* genannt. Für $I_3 > I$ spricht man von einem *abgeplatteten* (oblaten) Kreisel; die Erde ist ein gutes Beispiel hiefür. Für $I_3 < I$ ist die Masseverteilung um die Figurenachse konzentriert und man spricht von einem *verlängerten* (prolaten) Kreisel.

Der Kreisel soll kräftefrei sein, es soll also auf ihn kein Drehmoment wirken. Für einen Kreisel im Schwerefeld kann dies dadurch verwirklicht werden,

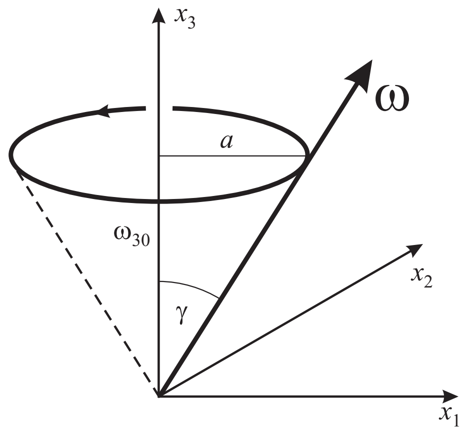


Abbildung 5.3: Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ eines kräftefreien symmetrische Kreisel bewegt sich im körperfesten Koordinatensystem auf dem Polkegel.

daß man den Schwerpunkt als Unterstützungspunkt wählt. Es gelten die folgenden Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\,\omega_3\omega_1 &= 0 \\ I\dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\omega_3 = \omega_{30} = \text{konst}$$

und wir setzen dies zusammen mit der Definition

$$\Omega = \frac{I - I_3}{I}\omega_{30} = \text{konst} \tag{5.41}$$

in die ersten zwei Gleichungen ein und erhalten

$$\dot{\omega}_1 - \Omega\,\omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 + \Omega\,\omega_1 = 0,$$

oder

$$\ddot{\omega}_1 - \Omega\,\dot{\omega}_2 = \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\,\omega_1 = 0. \tag{5.42}$$

Die Lösung

$$\omega_1(t) = a\sin\left(\Omega t + \psi_0\right) \tag{5.43a}$$

legt auch $\omega_2 = \dot{\omega}_1/\Omega$ fest:

$$\omega_2(t) = a\cos\left(\Omega t + \psi_0\right). \tag{5.43b}$$

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist konstant:

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) = a^2 + \omega_{30}^2 = \text{konst.}$$

Nach Gleichungen (5.43) hat die Projektion von $\boldsymbol{\omega}$ auf die (x_1, x_2)-Ebene die konstante Länge a und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Damit bewegt sich der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ im KS auf einem Kreiskegel, dem *Polkegel* (siehe Abb. 5.3) mit dem halben Öffnungswinkel

$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_{30}}.$$

Um die EULERwinkel zu bestimmen, setzen wir (5.43) in (5.33) ein. Die Integration der Gleichungen vereinfacht sich, wenn wir das IS so legen, daß der Drehimpulsvektor in die x_3-Achse zeigt:

$$\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3' = \text{konst.}$$

Die Komponenten L_i im KS sind durch (5.22) bestimmt

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\omega_1(t) \\ I\omega_2(t) \\ I_3\omega_3(t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_1(t) \\ \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_2(t) \\ \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3(t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \sin\theta \, \sin\psi \\ \sin\theta \, \cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

wobei die Skalarprodukte aus (5.13) folgen. Der Vergleich ergibt

$$\begin{aligned} L \, \sin\theta(t) \, \sin\psi(t) &= aI \sin(\Omega t + \psi_0) \\ L \, \sin\theta(t) \, \cos\psi(t) &= aI \cos(\Omega t + \psi_0) \\ L \, \cos\theta(t) &= \omega_{30} I_3. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\theta(t) = \theta_0 = \text{konst}$ und es muß dann aus den ersten zwei Gleichungen

$$\psi(t) = \Omega \, t + \psi_0 \tag{5.44}$$

folgen. Wir finden weiters:

$$\begin{aligned} L \, \sin\theta_0 \, \sin(\Omega t + \psi_0) &= aI \, \sin(\Omega t + \psi_0) \\ L \, \sin\theta_0 &= aI \\ \tan\theta_0 &= \frac{a}{\omega_{30}} \frac{I}{I_3}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Aus (5.43a) und (5.44) folgt $\omega_1 = \sin\psi(t)$ und daraus ergibt sich mit (5.14) $a = \dot{\phi} \, \sin\theta_0$ mit der Lösung:

$$\phi(t) = \frac{a}{\sin\theta_0} t + \phi_0. \tag{5.46}$$

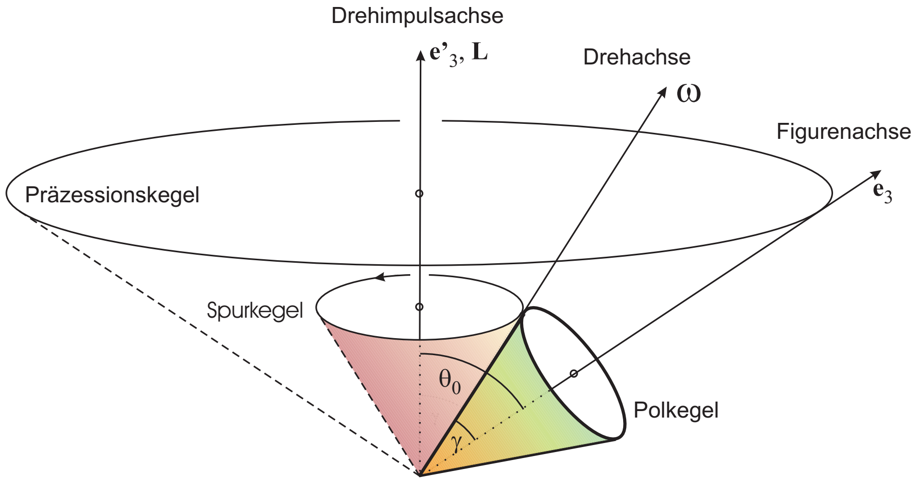
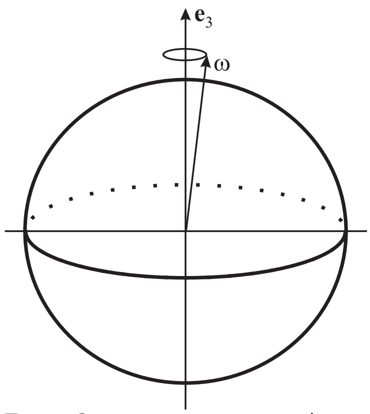


Abbildung 5.4: POINSOTsche Darstellung: Reguläre Präzession des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Die raumfeste Drehimpulsachse, die Drehachse und die Figurenachse liegen in einer Ebene. Die Bewegung läuft so ab als ob der Polkegel auf dem Spurkegel abrollte; dadurch läuft die Figurenachse auf dem Präzessionskegel um. Der Kreisel selbst könnte aus dem Polkegel bestehen.

Damit wurde die allgemeine Lösung (5.44), (5.45) und (5.46) für die EULERwinkel aufgefunden. Wegen $\theta = \theta_0$ bewegt sich die Figurenachse auf einem Kegel, dem *Präzessionskegel* um die $\mathbf{e}_3'$-Achse. (θ ist ja der Winkel zwischen $\mathbf{e}_3'$ und $\mathbf{e}_3$-Achse.) Damit liegt $\boldsymbol{\omega}$ in der $(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_3)$-Ebene, welche in Abb. 5.4 die Bildebene ist. Wegen $\theta_0 =$ konst ist $\gamma =$ konst und damit muß auch der Winkel zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_3'$ konstant sein. Also bewegt sich auch $\boldsymbol{\omega}$ auf einem Kegel, dem *Spurkegel*. Diese Bewegung wird *reguläre* Präzession genannt.

Die Theorie des kräftefreien, symmetrischen Kreisels findet bei der Diskussion der Erdrotation Anwendung. Die Erde ist in guter Näherung ein abgeplatteter Kreisel mit den Achsen $a = b = 6377\,\mathrm{km}$ (Äquator) und $c = 6356\,\mathrm{km}$ (Pol). Wie dargestellt, ist der Durchstoßpunkt der Figurenachse (geometrischer Nordpol) vom Durchstoßpunkt der Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ verschieden. Der kinematische Nordpol beschreibt einen Kreis um den geometrischen Nordpol. Die Präzessionsfrequenz is



$$|\Omega| = \left| \frac{I_3 - I}{I} \omega_{30} \right| .$$

Berechnet man, unter Annahme einer homogenen Massenverteilung die Trägheitsmomente der Erde und setzt $\omega_{30} = 2\pi/\text{Tag}$, so erhält man für die Periode der Präzessionsbewegung

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 305\,\text{Tage} \approx 10\,\text{Monate.}$$

Dies ist mit folgenden 'experimentellen' Ergebnissen zu vergleichen:

1. Die Präzession ist etwas unregelmäßig. Die Schwankung wird mit metereologischen und geologischen Ereignissen korreliert. (Wir haben ja auch den Einfluß des Mondes und der Sonne auf die Erde vernachlässigt.)

2. Die gemittelte Periode ist nicht 10 Monate sondern ungefähr 14 Monate (Chandlerperiode). Für die Diskrepanz gibt es eine detailierte Theorie, welche berücksichtigt, daß die Erde nicht vollkommen starr ist, sondern quasiflüssig.[1]

3. Der Radius des Durchstoßkreises des $\boldsymbol{\omega}$-Kegels ist im Mittel etwa 4 m.

[1]D.J. Inglis, *Shifting of the Earth's Axis of Rotation*, Rev. Mod. Phys. **29**, 9 (1957).