Kapitel 6

Begriffe der Fluid-Mechanik

6.1 Einleitung

Die folgenden Kapitel befassen sich mit den wichtigsten statischen und dynamischen Problemen, welche bei der Untersuchung von Flüssigkeiten auftreten können. Die gewonnenen Ergebnisse sind auch auf nicht allzu verdünnte Gase anwendbar. Daher sprechen wir ganz allgemein von *Fluids*.

Wir fassen Fluids als ein *Kontinuum* auf, das heißt, als einen *von Masse stetig erfüllten Raum.* Eine solche Behandlung ist so lange zulässig als wir das Konzept *kleiner Fluid-Elemente* anwenden können. Darunter versteht man ein kleines Volumen innerhalb des Fluids, in dem die physikalischen Eigenschaften als konstant angesehen werden können. Die Volumsabmessungen des untersuchten Systems müssen jedoch groß gegenüber der durchschnittlichen freien Weglänge der Fluid-Moleküle sein. Zur quantitativen Formulierung führt man die Kennzahl

$$K_n = \frac{\lambda}{L}$$

ein, mit λ der mittleren freien Weglänge und L der charakteristischen linearen Größe des Systems (etwa seine Länge). Damit eröffnet sich die Möglichkeit zur Charakterisierung der Anwendbarkeit verschiedener Theorien zur Beschreibung von Fluids:

(1) $K_n < 0.01$: Ideales Fluid.

(2) $0.01 \leq K_n \leq 0.1$: Navier-Stokes Gleichungen. Viskoses Fluid.

(3) $0.005 \leq K_n < \sim 1000$: Boltzmann-Theorie oder kinetische Theorie.

(4) $K_n > 1000$: Stoßfreie Boltzmann-Theorie.

Die Behandlung auf kinetischer Ebene mit Hilfe der Boltzmann-Theorie ist dabei die elementare Methode, da hier auf die mikroskopische Struktur der Materie eingegangen werden kann. Weiters berücksichtigt sie die

Stöße von Molkülen untereinander (allerdings nur binäre Stöße). Unter bestimmten Voraussetzungen sind auch hydrodynamische Gleichungen aus der BOLTZMANN-Theorie ableitbar. Aufgrund der Natur der BOLTZMANN-Theorie ist der *Wirkungsquerschnitt* (eine Wahrscheinlichkeitsgröße zur Beschreibung binärer Stöße) die bestimmende physikalische Größe.

In der Fluid-Dynamik hingegen sind Größen wie *Zähigkeit* oder *Viskosität*, *Wärmeleitfähigkeit*, *Diffusionskoeffizient*, etc. zur Beschreibung erforderlich. Sie sind grundsätzlich aus Wirkungsquerschnitten ableitbar. Es ist nun eine Erfahrungstatsache, daß bestimmte Fluids eine verschwindende Zähigkeit besitzen. Für diese *idealen* (inviscid) Fluids kann man eine besonders einfache Theorie entwickeln. Man muß jedoch beachten, daß sich unter Annahme der exakt verschwindenden Zähigkeit manche Eigenschaften eines Fluids gravierend ändern.

Das wesentlich Neue besteht darin, daß es sich hier, mathematisch gesehen, um eine *Feldtheorie* handeln wird. An Stelle der Bahnen für die Massenpunkte treten Felder für kontinuierliche Massenverteilungen. Wir sprechen daher auch von *Kontinuumsmechanik*.

6.2 Grundbegriffe

6.2.1 Massendichte, Druck

An die Stelle von Massenpunkten tritt bei Fluids die *Massendichte*

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{\sum_\nu m_\nu}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \left[\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}\right]. \tag{6.1}$$

Die Summe läuft über alle Atome/Moleküle ($\nu = 1,\ldots,\Delta N$), die sich im Volumselement ΔV bei $\mathbf{r}$ zum Zeitpunkt t befinden. Das Volumselement ΔV wählt man einerseits so groß, daß $\Delta N \gg 1$ und andererseits so klein, daß sich die makroskopischen Eigenschaften des Fluids innerhalb von ΔV nicht wesentlich ändern. Damit hängt dann $\rho(\mathbf{r},t)$ nicht von ΔV ab. Das Volumen ΔV könnte zum Beispiel $\Delta N = 10^7$ Atome/Moleküle enthalten; dies entspricht einer Größe $L = (\Delta V)^{1/3} \sim 10^{-7}\,\text{m}$ für eine Flüssigkeit und $\sim 10^{-6}\,\text{m}$ für ein Gas.

In einem Medium herrscht im allgemeinen ein endlicher *Druck*

$$p(\mathbf{r},t) = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\right]. \tag{6.2}$$

Die Einheit ist $1\,\text{N}\,\text{m}^{-2} = 1\,\text{Pa}$ (PASCAL). Man verwendet aber in der Praxis eine größere Einheit, nämlich: $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$.

Schließt man etwa ein Gas in einen Zylinder mit beweglichem Kolben ein, so kann man die Kraft ΔF auf den Kolben messen. Umgekehrt kann man einen kleinen, leeren Zylinder in das Innere des Fluids bringen und die Kraft am Kolben messen und so den Druck bestimmen. In einem mit Luft gefüllten Volumen beträgt der Druck auf Meereshöhe $p \approx 1\,\mathrm{bar}$ und dieser Materiedruck hält dem Gravitationsdruck der Atmosphäre die Waage.

Mikroskopisch kann der Druck eines Fluids durch die Kraftstöße der einzelnen Atome/Moleküle erklärt werden. So werden am Kolben ständig Atome/Moleküle reflektiert. Jedes Atom/Molekül übt dabei einen Kraftstoß aus; die zeitliche Mittelung über dieser Kraftstöße gibt dann die Kraft ΔF.

6.2.2 Strömung, Stromlinie

Definition 6.1 *Der Bereich $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ ist mit einem Fluid gefüllt. Die vektorwertige Funktion*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) \\ w(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{B} \tag{6.3}$$

beschreibt dann die Fluid-Strömung. *Im speziellen gibt $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ die Flußgeschwindigkeit im Punkte $\mathbf{r}$ im Zeitpunkt t an. $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ sagt uns also was alle Elemente des Fluids zu jedem Zeitpunkt 'tun'.*

Damit spielt $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in der Fluid-Mechanik die Rolle von $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ in der Punktmechanik mit dem Unterschied, daß hier der Vektor $\mathbf{r}$ entsprechend (2.4) auf die Teilchenbahn beschränkt blieb. Das Aufinden von $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ist üblicher Weise die Hauptaufgabe der Fluid-Mechanik.

An Stelle der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_\nu$ der einzelnen Massenpunkte tritt somit das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\nu=1}^{\Delta N} \mathbf{v}_\nu,$$

also die mittlere Geschwindigkeit der ΔN Atome/Moleküle, welche sich im betrachteten Volumen ΔV um $\mathbf{r}$ zum Zeitpunkt t befinden. Die tatsächlichen Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_\nu$ etwa von Luftmolekülen liegen im Bereich von 100 bis $1000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|$ ist dagegen meist um Größenordnungen kleiner.

Es ist zwechmäßig spezielle Klassen von Strömungen zu untersuchen:

- Die *stationäre Strömung*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}. \tag{6.4}$$

u hängt somit nur von **r** ab. Damit sind in jedem Punkt des Bereichs $\mathcal{B}$ Geschwindigkeit und Richtung der Strömung zeitlich konstant.

- Die *zweidimensionale Strömung*:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} u(x_1,x_2,t) \\ v(x_1,x_2,t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

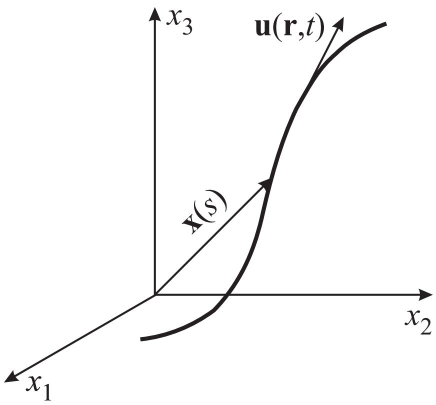
  $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ ist somit *unabhängig* von einer räumlichen Koordinate und besitzt auch keine Komponente in diese Richtung.

- Die *stationäre zweidimensionale Strömung*:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u(x_1,x_2) \\ v(x_1,x_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

All dies sind natürlich Idealisierungen, trotzdem sind sie von großer technischer Bedeutung, so kann man für die Strömung um eine feste Tragfläche großer Spannweite und gleichförmigem Querschnitt aus gutem Grund annehmen, daß eine zweidimensionale Strömung eine gute Näherung sein wird, wenn man von den Tragflächenspitzen absieht.

Definition 6.2



Eine Stromlinie *ist eine Kurve*

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix},$$

die zu jedem Zeitpunkt t dieselbe Richtung wie $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ besitzt. Sie ist mit der Bogenlänge s parametrisiert.

Mathematisch betrachtet erhalten wir die Stromlinie - zu einem bestimmten Zeitpunkt - als eine Integralkurve des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Ist nun $\mathbf{x}(s)$ eine Stromlinie zur Zeit t, so befriedigt $\mathbf{x}(s)$ die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s),t) \tag{6.7}$$

oder in Komponenten

$$\frac{dx(s)}{ds} = u(\mathbf{x}(s), t), \quad \frac{dy(s)}{ds} = v(\mathbf{x}(s), t), \quad \frac{dz(s)}{ds} = w(\mathbf{x}(s), t).$$

Dies kann in

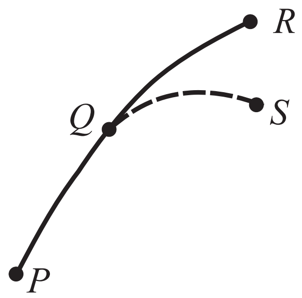
$$\frac{dx/ds}{u} = \frac{dy/ds}{v} = \frac{dz/ds}{w} \tag{6.8}$$

umgeformt werden und die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt die Stromlinie.

Stromlinien sind im allgemeinen nicht mit den Bahnkurven

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)$$

der Fluid-Elemente identisch. Nehmen wir nun an, zur Zeit t führe eine Stromlinie von P über den Nachbarpunkt Q nach R (voll ausgezogene Linie). Ein Fluid-Element, welches sich zu diesem Zeitpunkt im Punkt P befindet, bewegt sich daher gemäß der Geschwindigkeit längs der Stromlinie zum Nachbarpunkt Q. Wenn es dort eintrifft, also zu einer Zeit $t + \Delta t$ hat sich die Stromlinie im allgemeinen verändert und das Fluid-Element bewegt sich nicht nach R sondern nach S weiter. (Die strichlierte Linie $\overline{QS}$ ist die Stromline zum Zeitpunkt $t + \Delta t$.)



Nur falls $\mathbf{u}$ *von* t *unabhängig ist, also eine stationäre Strömung vorliegt, stimmen Stromlinie und Bahnkurve des Fluid-Elements überein.*

Zur Sichtbarmachung von Stromlinien werden kleine, schwebende Polystyren Perlen in das Fluid eingebracht. Eine bestimmte Ebene des Fluids wird dann durch einen kollimierten Lichtstrahl beleuchtet und die Perlen reflektieren dieses Licht in eine Kamera und erscheinen als kleine Lichpunkte, wenn sie in Ruhe sind. Bewegt sich hingegen das Fluid, so werden die Perlen transportiert und eine Aufnahme kurzer Belichtungszeit zeigt kurze Striche, deren Länge und Richtung ein Maß für die Geschwindigkeit des Fluids in einem bestimmten Raumpunkt ist.

Dies ist etwa in Abb. 6.1 anhand der stationären Strömung um eine Tragfläche dargestellt. Kurze (blaue) Streifen entsprechen geringer, lange Streifen höheren Geschwindigkeiten. Da es sich hier um eine stationäre Strömung handelt, so wird ein Fluid-Element, welches auf irgeneiner Stromlinie startete dieser Stromlinie mit forschreitender Zeit folgen. Es ist aus Abb. 6.1 ebenfalls zu ersehen, daß sich trotz stationärer Strömung, und somit konstantem $\mathbf{u}$ in

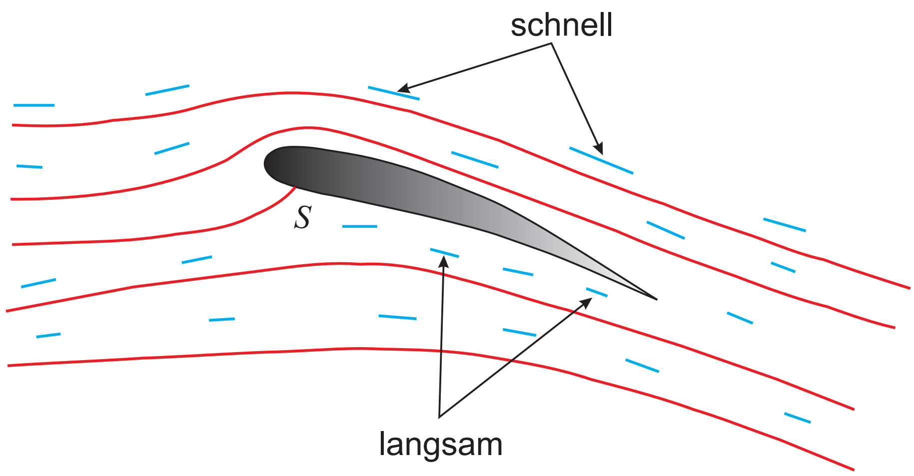


Abbildung 6.1: Stromlinie der stationären Strömung um einen festen Tragflügel, wie man sie von einer Streifenaufnahme ableitet. Es wurde gleichförmige Strömung im Unendlichen angenommen.

jedem Punkt $\mathbf{r} \in \mathcal{B}$, $\mathbf{u}$ verändert, wenn wir einem bestimmten Fluid-Element folgen. Insbesonders ist zu beobachten, daß das Element, welches sich oberhalb des Tragflügels bewegt, zunächst schneller und dann wieder langsamer wird.

Wir wollen nun die Stromlinie für ein Fluid in gleichförmiger Rotation (Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$), also einer stationären zweidimensionalen Strömung bestimmen. Wir verwenden Gleichung (2.112) und (6.6):

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_3$. Wir bestimmen nun die Stromlinien mit Hilfe der Gleichungen (6.7) unter der Berücksichtigung der Stationarität der Strömung:

$$\begin{aligned} \frac{dx(s)}{ds} &= -\omega y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} &= \omega x(s). \end{aligned}$$

Sie ergeben die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\omega}\frac{d^2x(s)}{ds^2} + \omega\,x(s) = 0, \quad y(s) = -\frac{1}{\omega}\frac{dx(s)}{ds}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} x(s) &= a\sin(\omega s) + b\cos(\omega s) \\ &= r\cos(\varphi_0 + \omega s). \end{aligned}$$

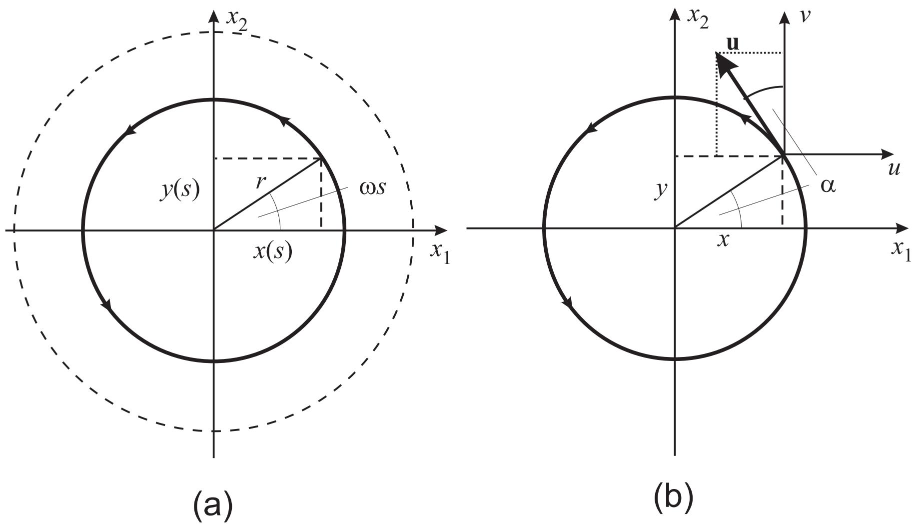


Abbildung 6.2: Stromlinien für ein Fluid in gleichförmiger Rotation. (a) Stromlinien. (b) Bestimmung von **u**. (u, v) ist das Koordinatensystem des Geschwindgkeitsraums.

Wir wählen $\varphi_0 = 0$ und erhalten die Gleichungen der Stromlinien in Polarkoordinaten (siehe Anhang A, Abschnitt A.1.1):

$$x(s) = r\cos(\omega s), \quad y(s) = r\sin(\omega s).$$

Sie sind in Abb. 6.2a dargestellt. Weiters sieht man, daß mit der Annahme

$$|\mathbf{u}| = 2\pi\nu r = \omega r$$

nach Abb. 6.2b für **u** das Ergebnis

$$\begin{aligned} -u &= |\mathbf{u}|\sin\alpha = \omega\, r\sin\alpha = \omega\, y \\ v &= |\mathbf{u}|\cos\alpha = \omega\, r\cos\alpha = \omega\, x \end{aligned}$$

folgt, wenn wir berücksichtigen, daß [Gleichung (A.1)]

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

gilt.

6.2.3 Die Änderungsrate

Das Verstehen dieses Begriffes ist in der Fluid-Mechanik von fundamentaler Bedeutung.

Definition 6.3 *Es sei $f(\mathbf{r},t)$ eine physikalische Größe des Fluids (etwa eine Komponente von $\mathbf{u}$, oder die Massendichte ρ), so ist*

- $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *die Rate der Änderung von $f(\mathbf{r},t)$ in einem bestimmten Punkt $\mathbf{r}$. Dabei versteht man unter Rate der Änderung die Änderung pro Zeiteinheit.*
- $\dfrac{Df}{Dt}$ *die Rate der Änderung von $f(\mathbf{r},t)$ dem Fluid-Element folgend, also entlang der Bahnkurve des Fluid-Elements, also nicht notwendiger Weise entlang der Stromlinie.* (EULERsche Ableitung.)

Aus dieser Definition folgt

$$\frac{Df(\mathbf{r},t)}{Dt} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t),t),$$

wobei sich $\mathbf{r}(t)$, als Ortskoordinate des Fluid-Elements, nach Maßgabe der lokalen Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ verändert:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}.$$

Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{Df(\mathbf{r},t)}{Dt} &= \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \\
&= \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} + u\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial x_1} + v\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial x_2} + w\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{u}\,\nabla)\, f(\mathbf{r},t). \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit an, so erhält man die *Beschleunigung* des Fluids im Punkte $\mathbf{r}$:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\,\nabla)\,\mathbf{u}. \qquad (6.10)$$

Dieses Ergebnis wird nun wieder auf das Fluid in gleichförmiger Rotation ($\partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{0}$) angewandt

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= (\mathbf{u}\,\nabla)\,\mathbf{u} = \left(-\omega x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\begin{pmatrix}-\omega x_2\\ \omega x_1\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-\omega^2 x_1\\ -\omega^2 x_2\\ 0\end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 0\end{pmatrix} = -\omega^2 r\,\mathbf{e}_r,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder auf Polarkoordinaten übergegangen sind. Dies ist das erwartete Ergebnis der Zentrifugalbeschleunigung nach Gleichung (2.116).

Generell gilt, daß gemäß (6.10) in jeder *stationären* Strömung die Änderungsrate von $f(\mathbf{r},t)$ folgend dem Fluid-Element durch $(\mathbf{u}\,\nabla)\,f(\mathbf{r},t)$ gegeben ist. Es ist dies auch leicht einzusehen: In einer solchen Strömung bewegen sich die Fluid-Elemente entlang einer Stromlinie. Es sei nun $\mathbf{e}_s$ der Einheitsvektor in Richtung der Stromlinie, dann gilt

$$(\mathbf{u}\,\nabla)\,f(\mathbf{r},t) = |\mathbf{u}|\,(\mathbf{e}_s\nabla)\,f(\mathbf{r},t) = |\mathbf{u}|\,\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Es ist nun $\partial f/\partial s$ die Änderung von f pro Einheitslänge entlang der Stromlinie. Dann ist $|\mathbf{u}|\,\partial f/\partial s$ die Änderung von f pro Zeiteinheit entlang der Stromlinie, also die Änderungsrate. Somit drückt die wichtige Beziehung

$$(\mathbf{u}\,\nabla)\,f(\mathbf{r},t) = 0 \tag{6.11}$$

aus, daß die physikalische Größe $f(\mathbf{r},t)$ *entlang einer Stromlinie* konstant ist. (6.11) sagt aber nichts darüber aus ob $f(\mathbf{r},t)$ auf unterschiedlichen Stromlinien verschieden ist oder nicht.

Dann drückt aber

$$\frac{Df(\mathbf{r},t)}{Dt} = 0 \tag{6.12}$$

aus, daß die physikalische Größe $f(\mathbf{r},t)$ für *ein bestimmtes Fluid-Element* konstant ist. Dies folgt unmittelbar aus der Defintion (6.9). Gleichung (6.12) schließt aber nicht aus, daß verschiedene Fluid-Elemente unterschiedliche Werte von f haben, sie sagt lediglich aus, daß jedes Fluid-Element 'seinen' Wert von f unverändert beibehält.

Manchmal will man nicht nur einem infinitesimalen Fluid-Element folgen; man möchte einen endlichen Tropfen betrachten, welcher stets aus denselben Fluid-Elementen zusammengesetzt ist. Ein solcher Tropfen kann sich natürlich bei der Bewegung deformieren. Er stellt also keinen festen Raumbereich dar.

6.2.4 Die Kontinuitätsgleichung

Bei der Strömung eines Fluids geht keine Materie verloren und aus dieser Tatsache folgt die *Kontinuitätsgleichung*. Es bleibt also die Anzahl der Teilchen erhalten und es muß daher für jedes beliebige Volumen V, welches von einer Oberfläche $\mathcal{S}$ eingeschlossen ist

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{S}} d\mathbf{A}\ [\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t)] &= -\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho(\mathbf{r},t) \\ &= -\int_V d^3r\,\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} \qquad (6.13)\end{aligned}$$

gelten. Wir führen zunächst noch mit

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \qquad \left[\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}\,\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\right] \qquad (6.14)$$

die *Massenstromdichte* ein. Damit beschreibt die linke Seite von Gleichung (6.13) den Nettostrom (Masse pro Zeit), welcher durch die Oberfläche $\mathcal{S}$ aus dem Volumen V ausfließt. ($d\mathbf{A}$ ist parallel zum Flächennormalvektor im Flächenelement dA und zeigt daher stets nach außen!) Dieser Nettostrom muß gleich der zeitlichen Massenänderung im Volumen V sein. Das Volumen V selbst sei zeitlich konstant und ruhe im Inertialsystem. Damit findet man dann die endgültige Form (6.13). Mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes (A.16) verwandeln wir das Oberflächenintegral auf der linken Seite von (6.13) in ein Volumsintegral und finden:

$$\int_V d^3r\,\left[\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \text{div}\,\left(\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\right] = 0. \qquad (6.15)$$

Dies gilt für beliebige Volumine $V > \Delta V$ und damit muß der Integrand von (6.15) verschwinden. Dies führt schließlich zur *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \text{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0. \qquad (6.16)$$

Dies ist der differentielle Erhaltungssatz für die Masse ausgedrückt durch die Massendichte und die Massenstromdichte.

6.2.5 Die Zustandsgleichung

Die *Zustandsgleichung* gibt den Zusammenhang zwischen Druck und Massendichte in einem Fluid an:

$$p(\mathbf{r},t) = p(\rho(\mathbf{r},t),t). \qquad (6.17)$$

Diese Gleichung hängt von der Art der Materie ab. Sehr häufig sind die sogenannten polytropen Zustandsgleichungen der Form:

$$p(\mathbf{r},t) = \text{konst}\,\rho^\gamma(\mathbf{r},t).$$

Diese Gleichung erlaubt die einfache Definition der *Kompressibilität* eines Fluids

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\gamma p}. \tag{6.18}$$

Das Problem der Aufstellung der Zustandsgleichung ist ein eigenes Kapitel der Material-Physik und hat inzwischen auch besondere Bedeutung in der Entwicklung von Modellen zur Beschreibung von Sternmaterie erlangt.