Kapitel 7

Das ideale Fluid

7.1 Definition

Definition 7.1 *Das* ideale Fluid *ist durch folgende Eigenschaften definiert:*

(i) Es ist inkompressibel. *Ein Tropfen verändert in der Bewegung seine Form nicht.*

(ii) Die Massedichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ *[siehe Definition* (6.1)*] ist konstant und dieselbe für alle Fluid-Elemente und alle Zeiten* t.

(iii) Die Kraft, welche auf ein geometrisches Oberflächenelement $\mathbf{n}\,\delta\mathcal{S}$ *(mit* $\mathbf{n}$ *dem Flächennormalvektor auf die Fläche* $\mathcal{S}$*) innerhalb des Fluids ausgeübt wird, ist durch*

$$\mathbf{F} = p(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{n}\,\delta\mathcal{S}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S} \tag{7.1}$$

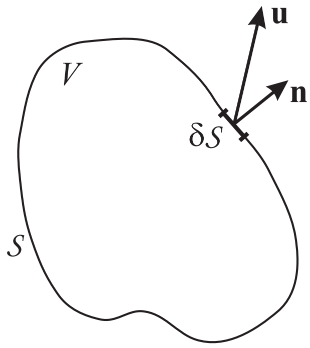
gegeben. Hier ist $p(\mathbf{r}, t)$ *eine skalare Funktion, welche von* $\mathbf{n}$ *unabhängig ist, und welche* Druck *genannt wird. (Genauer:* $\mathbf{F}$ *ist die Kraft, welche* auf *das Fluid, in welches* $\mathbf{n}$ *zeigt, durch das Fluid auf der anderen Seite von* $\delta\mathcal{S}$ *ausgeübt wird.)*

Eine andere, oft verwendete Definition ist:

> *Ideale Fluids sind solche, in denen Reibungs- und Wärmeleitungseffekte vernachlässigt werden.*

Es gibt natürlich kein ideales Fluid. Jedes Fluid ist etwas kompressibel und besitzt eine gewisse Zähigkeit, sodaß benachbarte Fluid-Elemente sowohl Normal- als auch Tangentialkräfte aufeinander ausüben.

Wir untersuchen nun die Folgerungen aus Definition 7.1:



Um Konsequenzen aus aus (i) abzuleiten, betrachten wir eine räumlich fixierte geschlossene Fläche $\mathcal{S}$ innerhalb des Fluids. $\mathbf{n}$ ist der zugehörige Flächennormalvektor, welcher nach außen zeigt. Das Fluid wird nun an einigen Stellen von $\mathcal{S}$ in den Bereich V eintreten und an anderen Stellen von V durch $\mathcal{S}$ wieder austreten, wie etwa an der Stelle $\delta\mathcal{S}$. Die Geschwindigkeitskomponente entlang $\mathbf{n}$ ist durch das Skalarprodukt $(\mathbf{un})$ gegeben und somit ist das durch das Flächenelement $\delta\mathcal{S}$ austretende Fluidvolumen durch $(\mathbf{un})\,\delta\mathcal{S}$ bestimmt. Damit ergibt sich die Nettoaustrittsrate

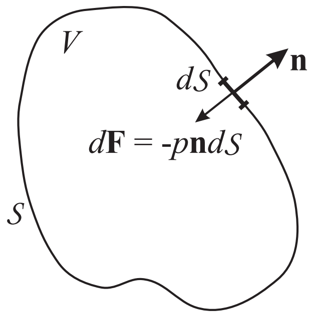
$$\oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}\,(\mathbf{un}) \overset{(A.16)}{=} \int_V dV\,\nabla\mathbf{u} = 0, \tag{7.2}$$

die wegen der Inkompressibilität des Fluids gleich Null sein muß. (Es kann nicht mehr in V eintreten als aus V ausfließt.) (7.2) muß für alle Regionen V innerhalb des Fluids gelten. Nimmt man nun die Stetigkeit des Integranden an, so folgt, daß überall innerhalb des Fluids

$$\nabla\mathbf{u} = 0 \tag{7.3}$$

gelten muß. Es ist die *Inkompressibilitätsbedingung.* Dies ist eine Zwangsbedingung für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. (Luft zum Beispiel ist hochkompressibel, kann sich aber wie ein inkompressibles Fluid verhalten, wenn die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist.)

Um die Auswirkungen von Punkt (iii) der Defintion 7.1 zu untersuchen



betrachten wir die Oberfläche $\mathcal{S}$, welche einen Fluid-Tropfen des Volumens V umschließt. Die Kraft $d\mathbf{F}$, welche durch das angrenzende Fluid auf ein Oberflächenelement $d\mathcal{S}$ ausgeübt wird, ist nach (7.1) durch

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}d\mathcal{S}$$

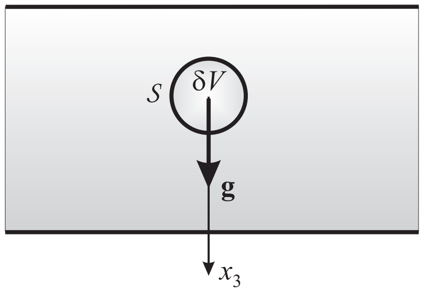
gegeben. Daraus ergibt sich die Gesamtkraft:

$$-\oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}\,p\mathbf{n} \overset{(A.16)}{=} -\int_V dV\,\nabla p.$$

Vorausgesetzt, daß p stetig ist, wird es fast konstant über einen kleinen Tropfen vom Volumen δV sein, und damit ergibt sich die Kraft des umgebenden Fluids auf einen kleinen Tropfen mit $-\nabla p\delta V$.

7.2 Die EULERschen Bewegungsgleichungen

Wir sind nun in der Lage den Impulssatz auf einen Tropfen vom Volumen δV anzuwenden. Wir erlauben zusätzlich eine Gravitationskraft $\mathbf{g}$ pro Einheitsmasse und damit wird der Druck in Richtung von x_3 zunehmen. Es gilt also $\nabla p > 0$. Es ergibt sich folgende Nettokraft auf den Tropfen:



$$\mathbf{F} = (-\nabla p + \rho \mathbf{g})\, \delta V.$$

Die *Auftriebskraft* auf die Blase wird hier mit $-\nabla p\, \delta V$ beschrieben. Die Kraft $\mathbf{F}$ muß nun aber nach Axiom 2.2 gleich der Trägheitskraft sein. Gleichung (6.10) führt also zu

$$\rho \delta V \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (-\nabla p + \rho \mathbf{g})\, \delta V$$

oder

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0. \tag{7.4}$$

Damit konnten die Grundgleichungen zur Beschreibung der Bewegung des idealen Fluids, die EULER*schen Bewegungsgleichungen*, aufgefunden werden. Mit $\mathbf{g}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ folgt in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} + u\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\frac{\partial u}{\partial x_2} + w\frac{\partial u}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} \\
\frac{dv}{dt} + u\frac{\partial v}{\partial x_1} + v\frac{\partial v}{\partial x_2} + w\frac{\partial v}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} \\
\frac{dw}{dt} + u\frac{\partial w}{\partial x_1} + v\frac{\partial w}{\partial x_2} + w\frac{\partial w}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + g \\
\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} &= 0.
\end{aligned}$$

Dies sind vier Gleichungen für die vier Unbekannten u, v, w und p.

Die konservative Gravitationskraft kann als Gradient eines Potentials χ angeschrieben werden:

$$\mathbf{g} = -\nabla \chi, \tag{7.5}$$

und damit wird aus (7.4)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\, \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \chi \right), \tag{7.6}$$

wobei angenommen wurde, daß ρ konstant ist, was mit Punkt (ii) der Definition 7.1 konsistent ist. Wir benützen nun die Vektoridentität

$$(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^2\right)$$

und finden so die Impulserhaltungsgleichung in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} &= -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \chi\right) \\ &= -\nabla H. \end{aligned} \tag{7.7}$$

7.3 Die Bernouilli-Gleichung

Für eine stationäre Strömung reduziert sich (7.7) auf:

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla H. \tag{7.8}$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit $\mathbf{u}$ und erhalten mit

$$(\mathbf{u}\nabla)\,H = 0. \tag{7.9}$$

Die Bernoulli-*Gleichung*. Somit gilt:

> *Ist die Strömung eines idealen Fluids stationär, so ist H entlang einer Stromlinie konstant.*

Dies ist eine Konsequenz von Gleichung (6.11). (7.9) sagt aber nicht aus, daß H für alle Stromlinien denselben Wert haben muß. (Die Gravitation, und damit χ, kann oft vernachlässigt werden - keinesfalls jedoch bei freien Oberflächen, wie etwa bei der Beschreibung von Wasserwellen, oder in Fällen mit nicht konstantem ρ. Es folgt dann, daß $p(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2(\mathbf{r})$ entlang einer Strömungslinie konstant ist.)

Es gibt einen wichtigen Fall, in welchem H im gesamten Strömungsfeld konstant ist:

Definition 7.2 *Eine Strömung, in welcher*

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7.10}$$

gilt, heißt wirbelfreie Strömung *oder* Potentialströmung.

In einer solchen Strömung existiert ein Geschwindigkeitspotential $\Phi(\mathbf{r})$ derart, daß

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$$

gilt. Für ein inkompressibles Fluid $[\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0]$ folgt dann aus der Kontinuitätsgleichung (6.16) mit

$$\rho_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \rho_0 \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \tag{7.11}$$

die LAPLACE-Gleichung zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes, welches bei der wirbelfreien Umströmung eines Körpers entsteht. Man fordert das Verschwinden der Normalkomponente von $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ an der Oberfläche $\mathcal{S}$ des Körpers, also:

$$[\mathbf{n}\, \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})]_{\mathcal{S}} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n}\right)_{\mathcal{S}} = 0.$$

Ferner soll in großer Entfernung vom Körper die Strömung homogen sein, also soll

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = u_0 \mathbf{e}_3, \quad r \to \infty, \quad \Rightarrow \quad \Phi(\infty) = u_0 x_3$$

gelten. Damit ist nun das Problem mathematisch eindeutig definiert und das Geschwindigkeitspotential kann bestimmt werden. Aus dem Geschwindigkeitspotential kann dann das Geschwindigkeitsfeld unschwer berechnet werden.

In der stationären, wirbelfreien Strömung reduziert sich (7.8) auf

$$\nabla H = 0 \tag{7.12}$$

und damit ist H über das gesamte Strömungsfeld hinweg konstant, also von $\mathbf{r}$ und t unabhängig.

7.4 Die Wirbelstärke

Wir definieren die *Wirbelstärke* als

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{7.13}$$

und sie ist ein Konzept von zentraler Bedeutung in der Fluid-Mechanik. Definitionsgemäß verschwindet die Wirbelstärke in einer wirbelfreien Strömung.

Konzentrieren wir uns zunächst auf die zweidimensionale Strömung nach (6.5), so gilt

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

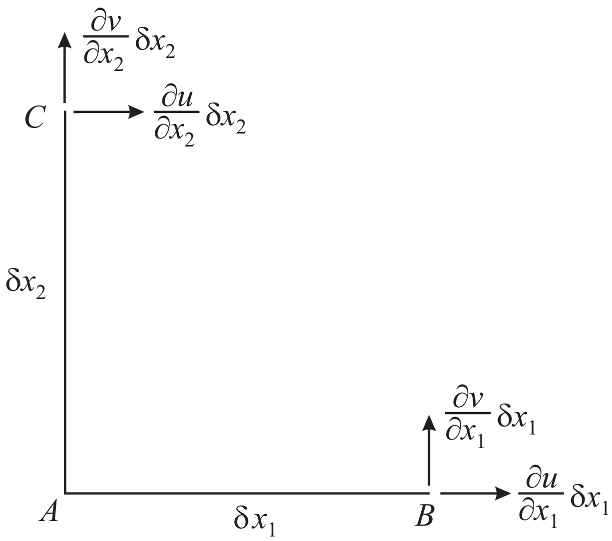


Abbildung 7.1: Skizze zur Interpretation der Wirbelstärke in einer zweidimensionalen Strömung. Die Geschwindigkeitskomponenten sind relativ zum Fluid-Teilchen in A gezeigt.

oder

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}. \tag{7.15}$$

Anhand dieses Ergebnisses wollen wir die Wirbelstärke in der zweidimensionalen Strömung interpretieren. Wir benützen dazu Abb. 7.1, in welcher zwei Stromlinienelemente $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ dargestellt sind. Sie stehen zu einem bestimmten Zeitpunkt aufeinander senkrecht. Vom Punkt A aus gesehen ändert sich die v-Komponente von $\mathbf{u}$ entlang des Linienelements δx_1 und unterscheidet sich im Punkt B vom Wert in Punkt A durch

$$v(x_1 + \delta x_1, x_2, t) - v(x_1, x_2, t) = \frac{\partial v}{\partial x_1}\delta x_1.$$

Man kann nun $(\partial v/\partial x_1)$ als die momentane Winkelgeschwindigkeit des Stromlinienelements $\overline{AB}$ auffassen und gleicherweise $(\partial u/\partial x_2)$ als die momentane Winkelgeschwindigkeit (im Gegensinn) von $\overline{AC}$. (Eine positive Winkelgeschwindigkeit zeigt in Gegenuhrzeigesinn.) Somit gibt an jedem Punkt des Strömungsfeldes der Mittelwert

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_1} + \left(-\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\omega$$

die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit zweier kurzer aufeinander senkrecht stehender Fluid-Linienelemente an, was mit Gleichung (7.15) überein-

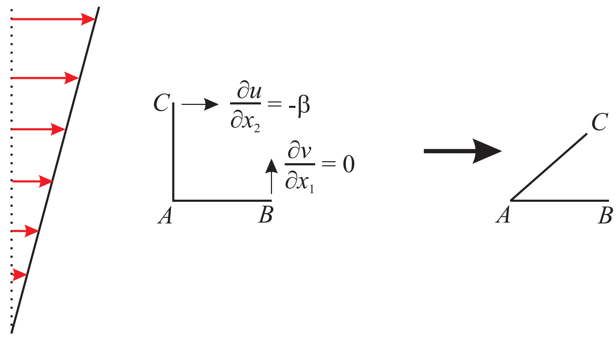


Abbildung 7.2: Verformung zweier kurzer, momentan aufeinader senkrecht stehender Fluid-Linienelemente in der Scherströmung.

stimmt. Die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ kann als Maß für die *lokale Rotation* von Fluid-Elementen aufgefaßt werden. Man muß aber betonen, daß die Wirbelstärke nichts mit einer globalen Rotation zu tun hat!

Zur weiteren Illustration betrachten wir eine *Scherströmung*, welche durch

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \beta x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

beschrieben wird. Es ist dies eine Strömung in x_1-Richtung, wobei der Betrag der Geschwindigkeit in x_2-Richtung linear zunimmt, wie in Abb. 7.2 dargestellt wurde. β ist dabei eine Konstante. In dieser Strömung ist das Fluid sicherlich nicht in irgendeiner Weise global rotierend, aber es hat die Wirbelstärke

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\beta.$$

Zwei momentan senkrecht aufeinander stehende Fluid-Linienelemente $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ (Abb. 7.2) haben eine durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit von $-\beta/2$, $\overline{AB}$ rotiert nicht, $\overline{AC}$ hingegen schon.

Ein weiteres eindrucksvolles Beispiel zur Unterscheidung von Wirbelstärke und globaler Rotation liefert eine Analyse der *Linienwirbelströmung*, deren Geschwindigkeitsfeld in Zylinderkoordinaten (Anhang A, Abschnitt A.1.2) durch

$$\mathbf{u} = \frac{k}{r}\mathbf{e}_\varphi \tag{7.17}$$

gegeben ist, mit k einer Konstanten. Wir erhalten die Wirbelstärke

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & u_\varphi & u_z \end{vmatrix} = 0, \quad r \neq 0.$$

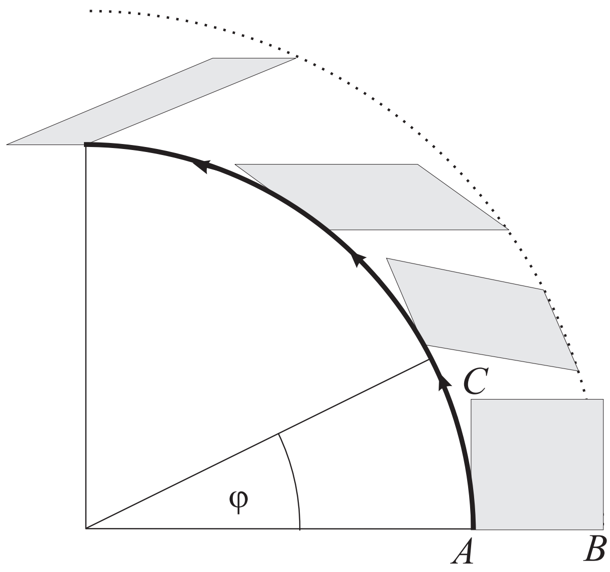


Abbildung 7.3: Die Geschichte eines quadratischen Fluid-Elements in der Linienwirbelströmung. Die Größe des Elements ist stark übertrieben.

(An der Stelle $r = 0$ ist weder $\mathbf{u}$ noch $\nabla \times \mathbf{u}$ definiert.) Obwohl das Fluid eine globale Rotation ausführt, ist die Strömung wirbelfrei, die Achse $r = 0$ ausgenommen. $\overline{AC}$ rotiert gegen den Uhrzeigersinn und wird stets auf der kreisförmigen Stromlinie liegen. $\overline{AB}$ hingegen rotiert im Uhrzeigersinn, da u_φ mit r abnimmt [vgl. Gleichung (7.17)]. Dieser Abfall von u_φ mit r stellt sicher, daß $\overline{AB}$ die gleiche, aber zu $\overline{AC}$ entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeit hat um die mittlere Winkelgeschwindigkeit verschwinden zu lassen.

Man muß aber die "augenblickliche" Natur dieses Arguments betonen, da die zwei Fluid-Elemente $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ nicht senkrecht aufeinander bleiben, wenn sie von der Strömung bewegt werden. Sobald dies aber geschieht, haben wir keine Ursache mehr aus der Wirbelfreiheit der Strömung zu schließen, daß die mittlere Winkelgeschwindigkeit Null ist. (Wir müssen stets von zwei zueinander senkrechten Linienelementen ausgehen um beurteilen zu können ob Wirbelfreiheit vorliegt.)

Was schließlich in Abb. 7.4 dargestellt ist, ist nicht das, was mit zwei momentanen Fluid-Linienelementen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ geschieht, wenn sie sich in der Strömung bewegen. Es ist dargestellt, was geschehen würde, wenn man in das Fluid ein einfaches Wirbelmeter, welches aus zwei kurzen festen Flügeln besteht, die senkrecht zueinander angeordnet sind, in das Fluid einbringt. Eine Flügelspitze ist durch einen Punkt markiert (Abb. 7.4a).

Im Fall der Linienströmung (Abb. 7.4b) würde dieses Wirbelmeter selbst nicht rotieren, obwohl es von der Strömung entlang einer kreisförmigen Stromlinie bewegt wird. (Dies ist beim Auslassen einer Badewanne beobachtbar.)

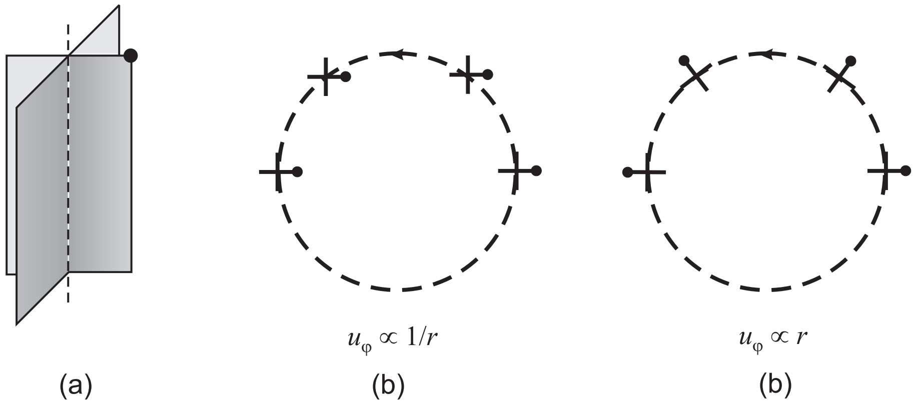


Abbildung 7.4: (a) Ein einfaches Wirbelmeter und sein Verhalten, wenn es sich in einer (b) Linienströmung und (c) in einer uniform rotierenden Strömung bewegt.

Bringt man das Wirbelmeter hingegen in eine Strömung mit gleichförmiger Rotation (Abb. 7.4c)

$$\mathbf{u} = \Omega r \mathbf{e}_\varphi,$$

mit Ω einer Konstanten, dann wird das Wirbelmeter so mit der Stromlinie herumgeführt als würde es in einem festen Körper stecken. Wir bestimmen die Wirbelstärke

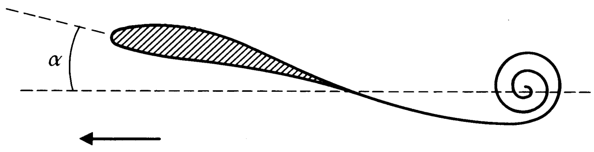
$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \Omega r^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix}$$

und die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist offensichtlich gleich Ω.

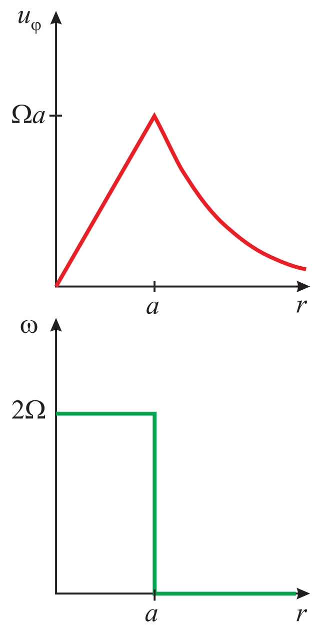
Wir vereinigen nun die zwei Strömungen von Abb. 7.4 zu

$$u_\varphi = \begin{cases} \Omega r, & r < a \\ \dfrac{\Omega a^2}{r}, & r > a \end{cases}, \quad u_r = u_z = 0, \tag{7.18}$$

und erhalten so den sogenannten Rankin-*Wirbel*, welcher ein einfaches Modell für den Wirbel darstellt, welcher sich an der Hinterkante einer Tragfläche ausbildet, soferne der Anstellwinkel α nicht zu groß ist (siehe Abb. 7.5). Rankine-Wirbel sind typischer Weise dadurch charakterisiert, daß sie einen recht kleinen Wirbelkern aufweisen, auf welchen die Wirbelstärke konzentriert ist, während außerhalb des Kerns die Strömung im wesentlichen wirbelfrei ist. Der Kern ist zumeist nicht exakt kreisförmig und die Wirbelstärke ist auch nicht isotrop.



(a)



(b)

Abbildung 7.5: (a)'Startwirbel' einer Tragfläche. (b) Verteilung der azimuthalen Geschwindigkeit u_φ und der Wirbelstärke ω in einem Rankine-Wirbel.

7.5 Die Wirbelgleichung

Mit Hilfe der Definition (7.13) erhalten wir aus der Euler-Gleichung (7.7):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla H.$$

Wir bilden den Rotor dieser Gleichung und erhalten wegen $\operatorname{rot}\operatorname{grad} H = 0$ [Gleichung (A.15)]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0.$$

Wir verwenden die Vektoridentität

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,(\nabla\mathbf{b}) - \mathbf{b}\,(\nabla\mathbf{a})$$

und erhalten

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}\underbrace{(\nabla\mathbf{u})}_{\overset{(7.3)}{=}\,0} - \mathbf{u}\,(\nabla\boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \nabla\boldsymbol{\omega} &= \nabla\,(\nabla \times \mathbf{u}) \\ &= \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u} \overset{(A.16)}{=} 0, \end{aligned}$$

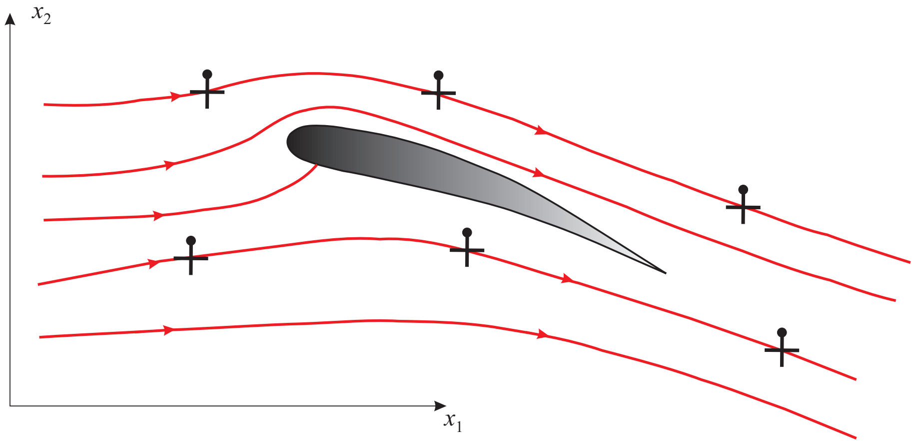


Abbildung 7.6: Das Verhalten eines Wirbelmeters, welches in die stationäre Strömung um eine feste Tragfläche bei kleinem Anstellwinkel eingebracht wurde. Die Strömung ist offensichtlich wirbelfrei.

und wir erhalten weiter

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} = 0,$$

was schließlich unter Verwendung von (6.10) als

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} \tag{7.19}$$

geschrieben werden kann. Dies ist die *Wirbelgleichung*. Diese Gleichung enthält den Druck nicht mehr!

Für eine zweidimensionale Strömung gilt (6.5) und damit (7.14) und es folgt

$$(\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} = \omega\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = 0,$$

was schließlich

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 0 \tag{7.20}$$

zur Folge hat. Daraus folgt:

Satz 7.1 *In einer zweidimensionalen Strömung eines idealen Fluids, welches einer konservativen Kraft (etwa* **g***) ausgesetzt ist, ist die Wirbelstärke für ein bestimmtes Fluid-Element jeweils konstant.*

Die auf das Fluid-Element wirkende Kraft muß deshalb konservativ sein, da nur dann (7.5) verwendet werden kann, was dann zu Gleichung (7.7) für die Impulserhaltung führt, andernfalls hätten wir die rechte Seite von (7.3) nicht als ∇H schreiben können, was schließlich nicht zu Gleichung (7.19) geführt hätte.

Im Sonderfall einer zusätzlich stationären Strömung reduziert sich (7.19) auf

$$(\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} = 0, \tag{7.21}$$

und es folgt:

Satz 7.2 *In einer stationären zweidimensionalen Strömung eines idealen Fluids, welches einer konservativen Kraft ausgesetzt ist, ist die Wirbelstärke* $\boldsymbol{\omega}$ *entlang einer Stromlinie konstant [siehe Gleichung* (6.11)*].*

Dies ist der Grund, warum die in Abb. 7.6 dargestellte Strömung wirbelfrei ist. Festzustellen ist zunächst, daß es keine Bereiche geschlossener Stromlinien gibt; alle können zum Punkt $x_1 = -\infty$ zurückverfolgt werden. Die Wirbelstärke ist nun entlang jeder Stromlinie konstant und besitzt somit jenen Wert, den sie im Punkt $x_1 = -\infty$ hatte. Da, nach Voraussetzung, die Strömung bei $x_1 = -\infty$ gleichförmig ist, ist die Wirbelstärke auf *allen* Stromlinien gleich Null, und damit im gesamten Strömungsfeld.

7.6 Die stationäre Strömung um eine Tragfläche

Abb. 7.7 zeigt den typischen Druckverlauf auf den oberen und unteren Flächen einer festen Tragfläche in stationärer Strömung. Die Drücke auf der oberen Fläche sind substantiell niedriger als der Druck p_∞ in der freien Strömung, während der an der unteren Fläche größer als p_∞ ist. Wie kann dies erklärt werden?

- Da die Strömung stationär und wirbelfrei ist, sagt uns die Bernoulli-Gleichung (7.9), daß
  $$H = \frac{p(\mathbf{r})}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2(\mathbf{r})$$
  im gesamten Strömungsfeld konstant ist.
- Die Erklärung der Druckdifferenz und damit des Auftriebs reduziert sich somit auf die Begründung weshalb die Strömungsgeschwindigkeit oberhalb der Tragfläche größer ist, als jene unterhalb. Diese Erklärung kann mit Hilfe des Konzepts der *Zirkulation* gegeben werden.

Es ist an dieser Stelle notwendig auf eine falsche Erklärung hinzuweisen, welche häufig verwendet wird: Es ist dies die Behauptung, daß die Luft

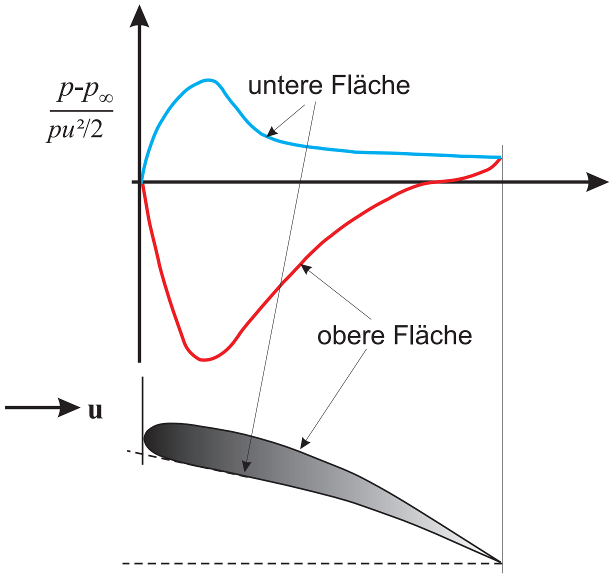


Abbildung 7.7: Typische Druckverteilung auf einer festen Tragfläche in der stationären Strömung.

oberhalb der Tragfläche schneller strömt, da sie den längeren Weg zurücklegen muß. Für dieses Argument existiert eine Anzahl wirrer Erklärungen. Meist wird so argumentiert: Zwei benachbarte Fluid-Elemente, die sich an der Vorderseite des Tragflügels trennen und getrennt die Tragfläche umfließen, vereinen sich an der Hinterkante wieder, weshalb ein Element eine höhere Geschwindigkeit als das anderer haben muß. *Dies ist nachweislich falsch!*

7.6.1 Die Zirkulation

Es sei $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve im Fluid, dann ist das Linienintegral

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{u} \tag{7.22}$$

als die *Zirkulation* Γ entlang $\mathcal{C}$ definiert.

Zunächst könnte man meinen, daß es auf Grund des Integralsatzes von Stokes (A.17) in einer wirbelfreien Strömung keine Zirkulation gäbe:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{u} = \int_{\mathcal{S}} dA\,(\nabla \times \mathbf{u})\,\mathbf{n} = 0. \tag{7.23}$$

Dies gilt allerdings nur dann, wenn die von der Kurve $\mathcal{C}$ aufgespannte Fläche zur Gänze in einem Gebiet wirbelfreier Strömung liegt. Im Fall von Abb. 7.6,

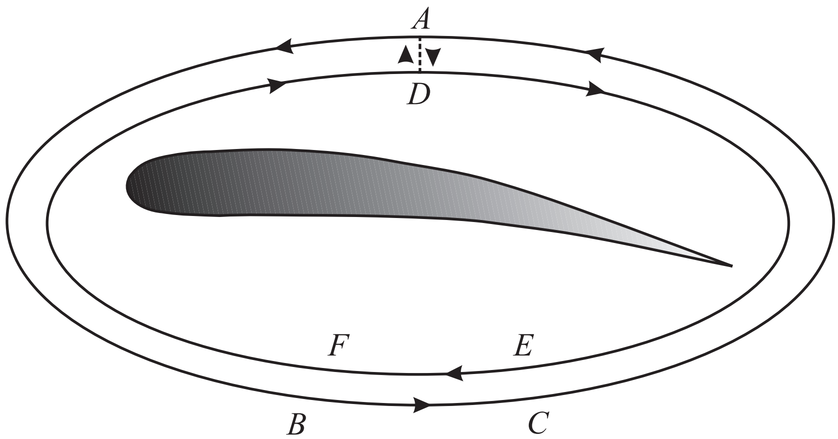


Abbildung 7.8: Integrationspfad um die Tragfläche

einer zweidimensionalen Strömung, in welcher sich (7.23) auf

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} dx_1\, u + \int_{\mathcal{C}} dx_2\, v = \int_{\mathcal{S}} dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$$

reduziert, ist (7.23) für alle $\mathcal{C}$ zutreffend, welche die Tragfläche *nicht* umfassen. Umfaßt hingegen $\mathcal{C}$ die Tragfläche, wie in Abb. 7.8 dargestellt, so gilt das Argument nicht mehr. Das Einzige, was über derartige Kurvezüge gesagt werden kann, ist, daß sie alle denselben Wert Γ haben, wie wir nun zeigen wollen. Es folgt für den geschlossenen Weg $\overline{ABCADEFDA}$ in Abb. 7.8:

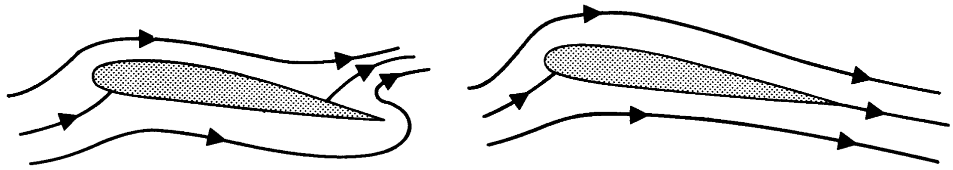
$$\begin{aligned} \oint_{\overline{ABCADEFDA}} \cdots &= \int_{\overline{ABCA}} \cdots + \int_A^D \cdots + \int_{\overline{DEFD}} \cdots + \int_D^A \cdots \\ &= \int_{\overline{ABCA}} d\mathbf{r}\, \mathbf{u} + \int_{\overline{DEFD}} d\mathbf{r}\, \mathbf{u} = 0, \end{aligned}$$

da der Pfad den Tragflügel nicht umschließt. (Es wurde ja im Bereich $\overline{AD}$ ein schmaler Spalt offen gelassen, was in Abb. 7.8 strichliert angedeutet wurde.) Also gilt

$$\int_{\overline{ABCA}} d\mathbf{r}\, \mathbf{u} = \int_{\overline{DFED}} d\mathbf{r}\, \mathbf{u}$$

und beide Kurvenzüge weisen denselben Wert Γ auf, das ist aber auch die einzige Aussage, welche gemacht werden kann.

Wir sehen also, daß eine von Null verschiedene Zirkulation um eine Tragfläche herum in einer wirbelfreien Strömung möglich ist. Es ist aber noch ungeklärt, weshalb es tatsächlich eine solche geben sollte, insbesonders eine negative, sodaß die Strömungsgeschwindigkeit oben größer ist als unten.



(a) (b)

Abbildung 7.9: Wirbelfreie Strömung entlang einer Tragfläche : (a) $\Gamma = 0$ und (b) $\Gamma = \Gamma_k < 0$.

7.6.2 Die Kutta-Joukowski Hypothese

Ein gutes Argument für die Existenz einer nicht verschwindenden Zirkulation im Fall einer Tragfläche mit scharfer Hinterkante ist sicherlich, daß es sonst zu einer Singularität des Geschwindigkeitsfeldes kommen würde. Abb. 7.9a zeigt die wirbelfreie Strömung um eine Tragfläche mit verschwindender Zirkulation, $\Gamma = 0$. An der Hinterkante wird die Geschwindigkeit unendlich, da es das Fluid 'schwer hat' um die scharfe Kante herumzukommen. Die Kante der Tragfläche stellt ja auch eine Strömungslinie dar und damit ist an der Hinterkante die Tangente - also der Geschwindigkeitsvektor - nicht definiert. Es ist aber grundsätzlich möglich zu zeigen, daß für einen bestimmten Wert der Zirkulation, nämlich Γ_k, die Strömungsgeschwindigkeit an der Hinterkante der Tragfläche einen endlichen Wert annimmt (Abb. 7.9b).

Es ist naheliegend anzunehmen, daß gerade diese wirbelfreie Strömung jener entspricht, die man tatsächlich beobachtet - und dies ist die Kutta-Joukowski *Hypothese*.

Dies ist ganz offensichtlich eine *ad hoc* Hypothese, da sie darauf beruht, daß ohne sie an der Hinterkante der Tragfläche ein unbefriedigender (unphysikalischer) Zustand entstehen würde. Auf der anderen Seite war diese Hypothese ein wesentlicher Schritt in der Entwicklung der *Aerodynamik* und die Ergebnisse sind in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Experiment.

Der kritische Wert Γ_k hängt von der Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, u_∞, und von der Größe und Orientierung der Tragfläche ab. Verwenden wir einen symmetrischen, dünnen Tragflügelquerschnitt der Länge L und den Anstellwinkel α, so gilt:

$$\Gamma_k = -\pi u_\infty L \sin\alpha. \tag{7.24}$$

Aus der Theorie des idealen Fluids kann weiters gefolgert werden, daß die *Widerstandskraft* in Strömungsrichtung verschwindet und die *Auftriebskraft* durch

$$F_A = -\rho u_\infty \Gamma \tag{7.25}$$

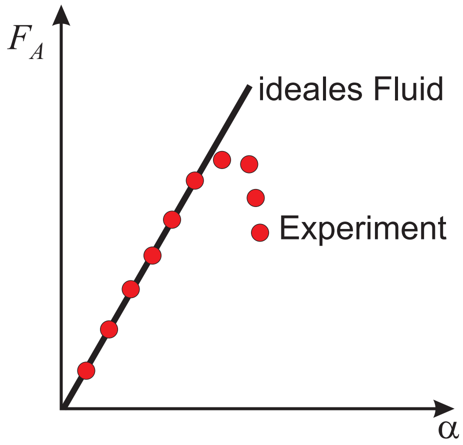


Abbildung 7.10: Auftriebskraft am dünnen, symmetrischen Tragflächenprofil.

gegeben ist. Dies ist die KUTTA-JOUKOWSKI *Auftriebsformel.* Diese Formel ist für die theoretische Behandlung des Fluids und auch für die modernere Theorie hydraulischer Maschinen von großer Bedeutung und spricht für die Qualität und den Erfolg der Theorie des idealen Fluids. [Der Beweis von (7.25) würde allerdings den Rahmen dieser Einführung sprengen.] Setzen wir nun (7.24) in (7.25) ein, so erhalten wir für das dünne, symmetrische Tragflächenprofil die Auftriebskraft

$$F_A = \pi \rho u_\infty^2 L \sin\alpha. \tag{7.26}$$

Abb. 7.10 zeigt, daß für kleine Anstellwinkel α sehr große Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment besteht.

Aufgrund dieser Überlegungen sollte dann auch die Strömung eines Flusses um einen Brückenpfeiler keine Kraft in Strömungsrichtung auf den Brückenpfeiler ausüben. Wenn eine Zirkulation um den Pfeiler überhaupt von Null verschieden sein sollte, dann sollte allenfalls eine Kraft quer zur Strömung auftreten. Dies trifft aber nicht zu. Diese Diskrepanz ist eine Folge der vorgenommenen Idealisierungen: Nahe der Oberfläche des Hindernisses ist die Reibung (Viskosität) von Bedeutung und es kommt hinter dem Hinderniss zur Wirbelbildung, was hier ja nicht berücksichtigt wurde.

Viele grundlegende Fragen können aber mit Hilfe der Theorie des idealen Fluids nicht beantwortet werden. Viele dieser Fragen sind darin begründet, daß es kein ideales Fluid gibt, und daß die Viskosität oft eine ganz wesentliche Rolle zu spielen beginnt, auch wenn sie, wie bei der Luft, vernachlässigbar erscheint.