Kapitel 8

Elementare Theorie der viskosen Strömung

8.1 Einführung

Es hatte bisher den Anschein, als könnte die Theorie des idealen Fluids etwa die Strömung entlang einer Tragfläche vollständig beschreiben. Das Stromlinienbild erscheint richtig und so auch das Geschwindigkeitsfeld. Insbesonders erscheint das Fluid, welches mit der Tragfläche in Kontakt steht, die Grenze entlangzugleiten, wie es von der Theorie idealer Fluids vorhergesagt wird. Eine genaue Überprüfung zeigt aber, daß es dieses Gleiten nicht gibt. Es gibt eine sehr dünne *Grenzschichte*, über welche sich die Strömungsgeschwindigkeit sehr schnell, aber kontinuierlich auf den Wert Null unmittelbar an der Oberfläche einstellt (siehe Abb. 8.1). *Es gibt also kein Gleiten!* In diesem Grenzbereich versagt die Theorie des idealen Fluids. Hier sind Zähigkeitseffekte wichtig, während sie sonst vernachlässigbar sind.

Wir müssen zunächst verstehen, was man unter 'viskos' versteht. Wir betrachten dazu eine Scherströmung der Form $\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u(x_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wie sie bereits in Gleichung (7.16) diskutiert wurde. Das Fluid in der Schicht oberhalb einer Ebene $x_2 =$ konst übt eine Spannung, also eine Kraft pro Flächeneinheit, auf das Fluid in der Schicht unmittelbar unter dieser Ebene aus, und, natürlich, umgekehrt (siehe Abb. 8.2). In einem idealen Fluid hat diese Spannung keine Tangentialkomponente, wie in Defintion 7.1, Punkt (iii) festgelegt wurde. In einem zähen Fluid hingegen ist diese Tangentialkomponente, die Spannung σ, in typischer Weise von Null verschieden.

Wir beschränken uns nun auf NEWTON*sche, zähe Fluids* und in diesem Fall ist die *Scherspannung* σ proportional zum Geschwindigkeitsgradienten

$$\sigma = \mu \frac{du}{dx_2}, \tag{8.1}$$

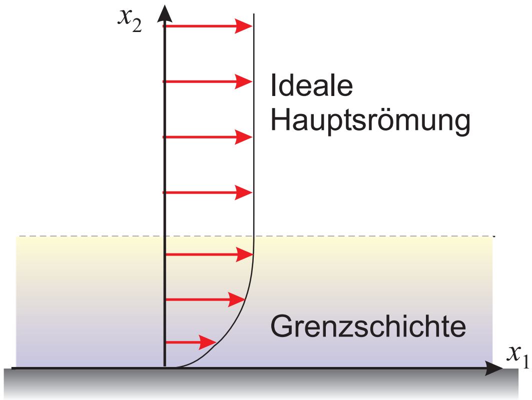


Abbildung 8.1: Die Grenzschichte.

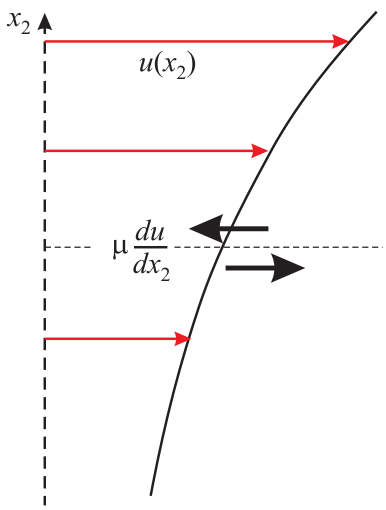


Abbildung 8.2: Viskose Spannungen in der einfachen Scherströmung.

Stoff	ν
Wasser	0.01
Luft	0.15
Olivenöl	1.0
Glyzerin	18
Sirup	~ 1200

Tabelle 8.1: Kinematische Zähigkeit in $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{s}^{-1}$ bei 15° C.

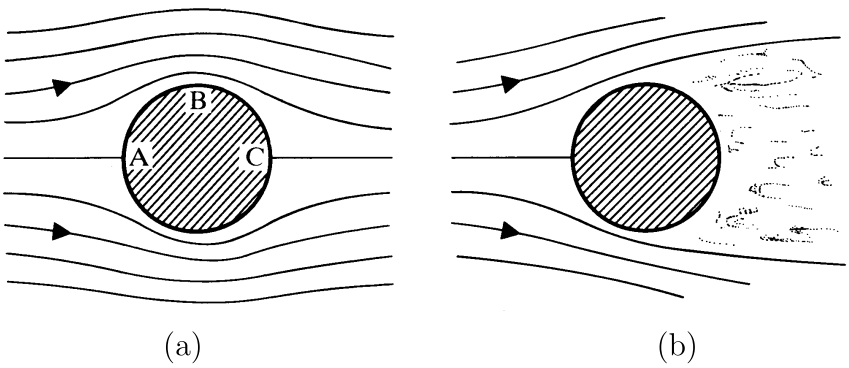


Abbildung 8.3: Strömung um einen Zylinder (a) ideales Fluid und (b) ein niedrig viskoses Fluid.

was natürlich wieder eine Modellannahme ist. μ ist der *Viskosekoeffizient* und ist eine Eigenschaft des Fluids. Eine große Zahl reeller Fluids, wie etwa Wasser oder Luft, verhalten sich unter vielen Bedingungen so; es gibt aber auch andere Fluids, etwa Farben oder Polymere, welche nicht-Newtonsche Fluids sind.

Aus dem Blickwinkel der Fluid-Dynamik ist die *kinematische Zähigkeit*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{8.2}$$

von größerer Bedeutung als μ selbst. Typische Werte sind in Tabelle 8.1 angegeben. Diese Werte können mit der Temperatur stark variieren, wir wollen aber ν und μ im weiteren als konstant voraussetzen.

Warum sind diese Grenzschichten von so großer Bedeutung? Die Grenzschicht kann sich unter bestimmten Bedingungen von der Berandung ablösen und damit verhält sich dann die gesamte Strömung eines niedrig viskosen Fluids ganz anders als es von der Theorie idealer Fluids vorhergesagt wird. Betrachten wir etwa die Strömung eines niedrig viskosen Fluids um einen Kreiszylinder, Abb. 8.3, so bildet sich bei vernachlässigbarer Viskosität nach der Theorie idealer Fluids eine wirbelfreie Strömung aus (Abb. 8.3a). Diese Lösung sagt ein Gleiten des Fluids an der Zylinderoberfläche voraus. Wir

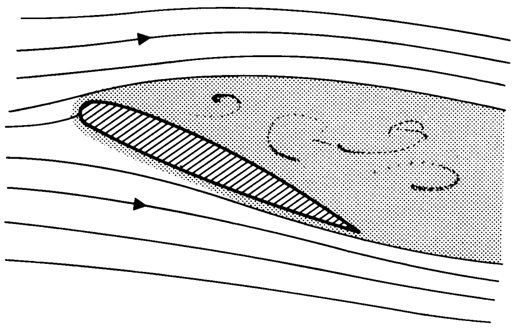


Abbildung 8.4: Abriss der Grenzschichte beim Tragflügel.

könnten nun, in Verfolgung unserer bisherigen Überlegungen annehmen, daß es tatsächlich eine Grenzschicht gibt, innerhalb der die Strömungsgeschwindigkeit auf Null abnimmt. Es würde dann zwar kein Gleiten auftreten, ansonsten wäre die Situation aber unverändert. Die Realität ist in Abb. 8.3b dargestellt. Es kommt zu einer Ablösung der Grenzschicht unmittelbar nach Punkt B, welche zu einer starken Wirbelbildung im sogeannten *Kiel-* oder *Totwasser* Anlaß gibt.

Zur Ablösung der Grenzschicht kommt es aufgrund der Veränderung des Druckes entlang der Berandung, wie sie von der Theorie des idealen Fluids vorhergesagt wird: p hat im vorderen *Staupunkt* A ein Maximum, dann in B ein Minimum und in C wieder ein Maximum mit $p_A = p_C$. Dies führt zu einer starken Zunahme des Druckes auf der Strecke $\overline{BC}$ entlang der Berandung und dieser starke Druckgradient führt zum Abriss der Grenzschichte. [Dazu gibt es eine umfangreiche Theorie, welche auf eine Arbeit von Prantl (1904) zurückgeht.]

Betrachtet man jedoch einen Tragflügel, so ist dieser bewußt so geformt, daß es zu keiner so ausgeprägten Grenzschichtablösung kommen kann. Der Grund hiefür liegt im nach hinten spitz zulaufenden Profil. In Abb. 7.7 sieht man, daß der Druck an der Oberseite innerhalb der ersten 10% des Profils stark abfällt und dann, langsamer, wieder ansteigt. Die Grenzschicht reißt daher erst kurz vor der Hinterkante ab. Dies trifft zu, so lange der Anstellwinkel hinreichend klein ist. Ist der Winkel zu steil, so kommt es, wie in Abb. 8.4 dargestellt ist, zum Abriss der Grenzfläche, und der Auftrieb geht verloren ("Absacken").

Wir sehen also, daß das Verhalten eines Fluids niedriger Viskosität aufgrund der möglichen Grenzschichtablösung von dem eines idealen Fluids sehr verschieden sein kann.

8.2 Die Bewegungsgleichung der zähen Strömung

Wir nehmen an, daß es sich um ein inkompressibles, NEWTONsches Fluid handelt mit konstanter Massendichte ρ und konstanter Viskosität μ. Seine Bewegung wird durch die NAVIER-STOKES Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} \tag{8.3}$$

beschrieben. (Diese Gleichungen können exakt abgeleitet werden, was aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde.[1]) Sie unterscheiden sich von den EULER-Gleichungen (7.4) nur durch den zusätzlichen *Viskoseterm* $\nu\nabla^2\mathbf{u}$.

Die Beobachtung reller, also viskoser, Fluids hat gezeigt, daß sowohl die Normal- als auch die Tangetialkomponenten der Strömungsgeschwindigkeit entlang fester Grenzflächen gleich jenen der Grenzfläche selbst sind. Ruht die Grenzfläche, so ist entlang dieser $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Diese Bedingung für die Tangentialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit wird auch *Nichtgleit-Bedingung* genannt. Sie gilt für ein Fluid beliebiger Viskosität $\nu \neq 0$, unabhängig davon wie klein ν auch sein mag.

8.2.1 REYNOLDS-Zahl

Wir betrachten ein viskoses Fluid mit U einer typischen Strömungsgeschwindigkeit und L einer charakteristischen Längenskala der Strömung. Es ist dann die dimensionslose Größe

$$R = \frac{U\,L}{\nu} \tag{8.4}$$

die REYNOLDS-*Zahl*. Um ihre Bedeutung erkennen zu können, gehen wir einmal davon aus, daß typisch $|\partial u/\partial x| = \mathcal{O}(U/L)$ gelten wird, daß sich also die Komponenten von $\mathbf{u}$ über Abstände der Größenordnung L um U ändern werden. Damit wird auch $|\partial^2 u/\partial x^2| = \mathcal{O}(U/L^2)$ gelten. Damit ändern sich die Terme in den NAVIER-STOKES Gleichungen wie:

$$\begin{aligned} \text{Trägheitsterm:} \quad & |(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}| = \mathcal{O}(U^2/L) \\ \text{Viskoseterm:} \quad & \left|\nu\nabla^2\mathbf{u}\right| = \mathcal{O}(\nu U/L^2). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{|(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}|}{|\nu\nabla^2\mathbf{u}|} = \mathcal{O}\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = \mathcal{O}(R). \tag{8.5}$$

[1] Siehe: D.J. Acheson *Elementary Fluid Dynamics*, Kapitel 6, Carendon Press (Oxford 1990).

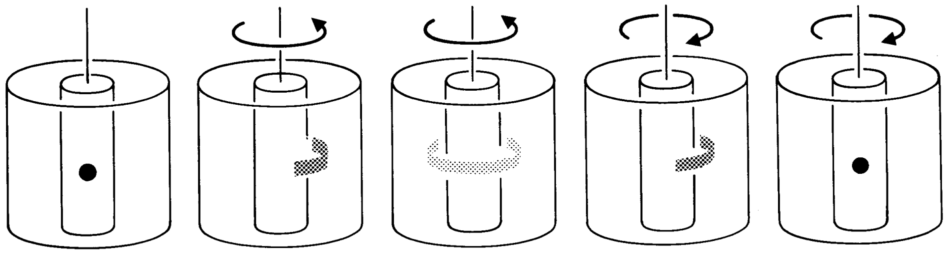


Abbildung 8.5: Die Umkehrbarkeit der stark viskosen Strömung.

Somit gibt die REYNOLDS-Zahl eine Größenordnung des Verhältnisses zweier Schlüsselterme in der NAVIER-STOKES Gleichung an. Es ist daher nicht verwunderlich, daß sich Strömungen hoher REYNOLDS-Zahlen von jenen mit niedrigen in typischer Weise unterscheiden.

Strömungen mit hoher REYNOLDS-Zahl

$R \gg 1$ entspricht der Strömung von Fluids kleiner Zähigkeit, bzw., entsprechend (8.4), Fällen, in welchen Viskositätseffekte vernachlässigbar sind. Ist allerdings der Viskoseterm ($\propto \nabla^2 \mathbf{u}$) infolge des Geschwindigkeitsgefälles in der Grenzschicht groß, so wird in der Abschätzung (8.5) die Bedeutung der REYNOLDS-Zahl überschätzt.

Man kann zeigen, daß die typische Dicke δ der Grenzschicht mit Hilfe von

$$\frac{\delta}{L} = \mathcal{O}\left(R^{-1/2}\right) \tag{8.6}$$

abgeschätzt werden kann. Die Grenzschicht wird also mit wachsender REYNOLDS-Zahl immer dünner.

Eine große REYNOLDS-Zahl ist notwendig um die Theorie idealer Fluids anwenden zu können, dies ist allerdings *nicht* hinreichend. Komplizierend kommt hinzu, daß stationäre Strömungen sehr oft gegenüber kleinen Störungen instabil sind und dadurch allein schon Turbulenzen auftreten können, was ein nicht ideales Verhalten zur Folge hat.

Strömungen mit kleiner REYNOLDS-Zahl

Stellen wir uns vor, daß Sirup den Raum zwischen innerem und äußerem Zylinder von Abb. 8.5 füllt, wobei der innere rotiert, während der äußere in Ruhe ist. Bei vernünftigen Drehzahlen ist $R \sim 10^{-2}$. Bei einer solchen REYNOLDS-Zahl gibt es keine Turbulenzen und die Strömung ist wohl geordnet. Die

Strömung ist sogar so wohlgeordnet, daß, nachdem die Drehung des inneren Zylinders nach wenigen Umdrehungen eingestellt wurde, sich der innere Zylinder sogar wieder zurückdreht. Der schwarze Tropfen Sirup (Abb. 8.5a) wurde zunächst stark gedehnt (Abb. 8.5b,c) und kehrt am Schluß praktisch an seinen Ausgangspunkt zurück (Abb. 8.5e). Diese *fast Reversibilität* ist typisch für Strömungen mit kleinen REYNOLDS-Zahlen und ist verantwortlich für die ungewöhnlichen Schwimmtechniken, welche von biologischen Mikroorganismen, etwa Spermatozoen, angenommen werden.

8.3 Einfache viskose Strömungen

Wir wollen hier einige exakte Lösungen der NAVIER-STOKES Gleichungen untersuchen. Das Hauptthema wird dabei die *Diffusion der Wirbelstärke* sein. Dies ist ein Mechanismus, welcher in idealen Fluids nicht auftritt.

8.3.1 Planparallele Schicht- (Scher-)Strömung

Die Strömung wird durch

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

beschrieben. Es gilt weiter

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u(x_2)}{\partial x_1} + 0 + 0 = 0,$$

und damit erhalten wir die NAVIER-STOKES Gleichungen in Komponentenform als

$$\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial x_2^2} \tag{8.8a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \tag{8.8b}$$

wenn wir die Gravitation nicht berücksichtigen. Somit gilt $p = p(x_1, t)$ und es folgt aus Gleichung (8.8a), daß $\partial p/\partial x_1$ gleich der Differenz zweier Terme ist, welche von x_1 unabhängig sind. Also kann $\partial p/\partial x_1$ nur von der Zeit t abhängen.

Wir wollen nun versuchen Gleichung (8.8a) besser zu verstehen. Dazu betrachten wir ein Fluid-Element mit Einheitslänge in x_3-Richtung und den Seitenlängen δx_1 und δx_2, wie in Abb. 8.6 dargestellt. Die Netto-Druckkraft auf dieses Element in x_1-Richtung ist durch

$$p(x_1)\delta x_2 - p(x_1 + \delta x_1)\delta x_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}\delta x_1\, \delta x_2$$

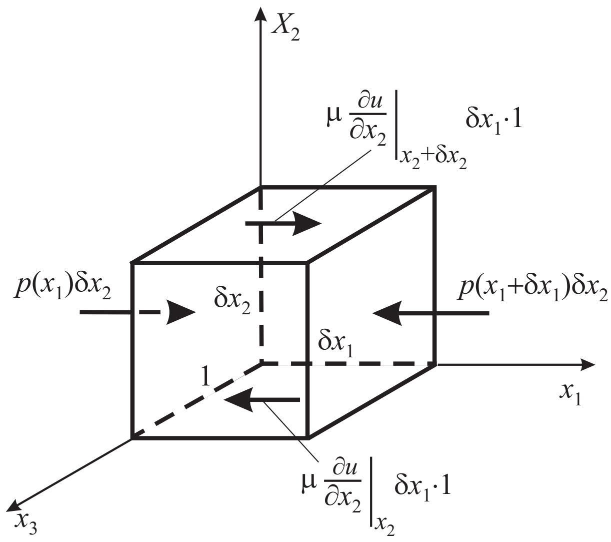


Abbildung 8.6: Die Kräfte in x_1-Richtung auf ein kleines Fluid-Element der Dimension $\delta x_1 \times \delta x_2 \times 1$ in planparalleler Scherströmung.

gegeben. Dies muß gleich sein dem Produkt aus der Masse $\rho\, \delta x_1\, \delta x_2\, 1$ des Elements mit seiner Beschleunigung

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}}_{=0}.$$

Wir können nun (8.1) dazu nutzen die Viskosekräfte auf das Fluidelement zu bestimmen. In x_1-Richtung ergibt sich die Nettokraft zu:

$$\mu \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2+\delta x_2} \delta x_1 - \mu \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2} \delta x_1 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \delta x_2\, \delta x_1.$$

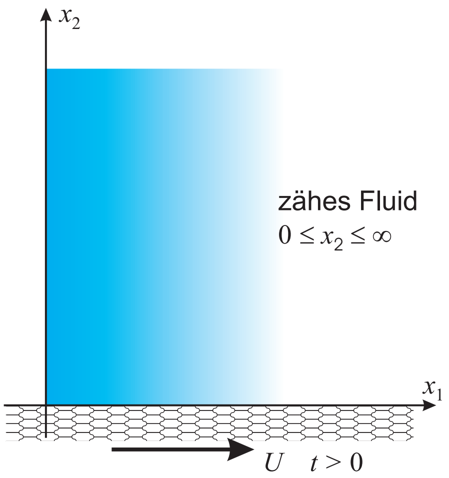
Damit erhält man die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \rho\, \delta x_1\, \delta x_2\, 1 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} \delta x_1\, \delta x_2 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \delta x_2\, \delta x_1 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \end{aligned}$$

was mit Gleichung (8.8a) übereinstimmt. Die zugehörige EULER-Gleichung für die Strömung des idealen Fluids folgt aus (7.7) mit:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}.$$

Somit haben wir, zumindest für eine sehr eingeschränkte Klasse von Strömungen, zeigen können, warum der viskose Term in der Bewegungsgleichung (8.3) die zweite Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes benötigt.



Wir nehmen nun an, daß ein viskoses Fluid im Bereich $0 \leq x_2 \leq \infty$, $-\infty < x_1 < \infty$ in Ruhe ist. Plötzlich wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Rand bei $x_2 = 0$ mit der Geschwindigkeit U in x_1-Richtung bewegt. Es ist nur natürlich anzunehmen, daß es sich bei der nun entstehenden Strömung um eine Strömung der Art (8.7), also eine Scherströmung handeln wird. Dazu nehmen wir weiter an, daß die Strömung nur durch die bewegte Wand hervorgerufen wird und nicht durch einen aufgeprägten Druckgradient. Damit kann man davon ausgehen, daß in $x_1 = \pm\infty$ die Drücke gleich sein werden. Diese Betrachtung des Experiments entspricht der Festlegung, daß die Drücke in $x_1 = \pm\infty$ gleich sind, und da $\partial p/\partial x_1$ unabhängig von x_1 ist und damit p eine lineare Funktion von x_1 ist, folgt $\partial p/\partial x_1 = 0$. Damit erhalten wir aus (8.8a) die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{8.9}$$

eine klassische eindimensionale *Diffusionsgleichung*, welche das Geschwindigkeitsfeld $u(x_2, t)$ zusammen mit der Randbedingung

$$u(x_2, 0) = 0, \quad x_2 > 0, \qquad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0$$

und der Nichtgleitbedingung

$$u(0, t) = U, \quad t > 0$$

eindeutig festlegt. Wir haben also die Lösung einer linearen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzusuchen, was am einfachsten geschieht, indem man eine Ähnlichkeitslösung aufsucht.

Solche Lösungen kann man systematisch unter Zuhilfenahme LIE*scher Transformationsgruppen* aufsuchen. Hier wollen wir der Einfachheit halber die Symmetrie durch "Erraten" aufsuchen: Die Transformation

$$x_2 \to x_2' = \alpha x_2, \quad t \to t' = \alpha^2 t, \quad \alpha = \text{konst} \tag{8.10}$$

läßt die Differentialgleichung (8.9) unverändert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_2', t')}{\partial t} &= \frac{\partial u(x_2', t')}{\partial t'}\frac{dt'}{dt} = \alpha^2 \frac{\partial u(x_2', t')}{\partial t'} \\
\frac{\partial^2 u(x_2', t')}{\partial x_2^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_2', t')}{\partial x_2'^2} \\
\Longrightarrow \quad \frac{\partial u(x_2', t')}{\partial t'} &= \nu \frac{\partial^2 u(x_2', t')}{\partial x_2'^2}.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß es Lösungen von (8.9) gibt, welche von $x_2/\sqrt{t}$ abhängen, da dies gegenüber der Transformation (8.10) invariant ist:

$$\frac{x_2'}{\sqrt{t'}} = \frac{\alpha x_2}{\sqrt{\alpha^2 t}} = \frac{x_2}{\sqrt{t}}.$$

Wir wählen nun die Ähnlichkeitsvariable

$$\eta = \frac{x_2}{\sqrt{\nu t}}$$

und machen den Ansatz $U = u(\eta)$. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\eta)}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}}_{f'(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -f'(\eta)\frac{x_2}{2\nu^{1/2}t^{3/2}} \\
\frac{\partial u(\eta)}{\partial x_2} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = f'(\eta)\frac{1}{\sqrt{\nu t}} \\
\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial x_2^2} &= f''(\eta)\frac{1}{\nu t},
\end{aligned}$$

und wir erhalten mit

$$\begin{aligned}
-f'(\eta)\frac{x_2}{2\nu^{1/2}t^{3/2}} &= \nu f''(\eta)\frac{1}{\nu t} \\
f''(\eta) + \frac{x_2}{2(\nu t)^{1/2}} f'(\eta) &= 0 \\
f''(\eta) + \frac{1}{2}\eta f'(\eta) &= 0,
\end{aligned}$$

eine normale Differentialgleichung zweiter Ordnung. Durch das Einführen der Ähnlichkeitsvariablen, welche eine gewisse Symmetrie des Problems repräsentiert, ist es also gelungen die ursprünglich partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche umzuwandeln. Die Lösung ist offensichtlich durch

$$f'(\eta) = B e^{-\eta^2/4}$$

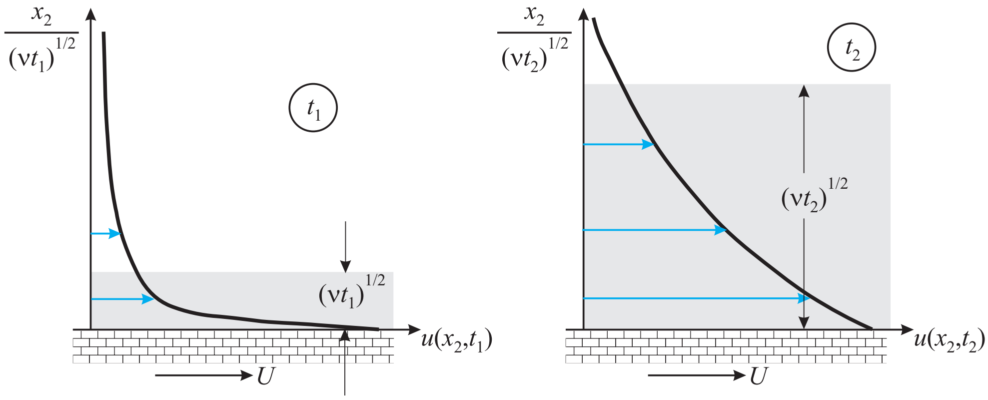


Abbildung 8.7: Diffusion der Wirbelstärke von einer ebenen Begrenzungsfläche, welche plötzlich mit der Geschwindigkeit U bewegt wird. Die voll ausgezogene Linie stellt das Geschwindigkeitsprofil zu zwei verschiedenen Zeiten $t_2 > t_1$ dar. Die grau schattierten Flächen markieren den Bereich signifikanter Wirbelstärke.

gegeben, und daraus folgt

$$f(\eta) = A + B \int_{s=0}^{\eta} ds\, e^{-s^2/4}$$

mit den Integrationskonstanten A und B. Es folgt:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x_2 > 0 \quad &: \quad u(x_2, 0) = f(\infty) = 0, \\ t > 0, \quad x_2 = 0 \quad &: \quad u(0, t) = f(0) = U, \quad \rightarrow \quad A = U, \\ t > 0, \quad x_2 = \infty \quad &: \quad u(\infty, t) = f(\infty) = 0, \\ & \quad\; 0 = U + B \int_0^{\infty} ds\, e^{-s^2/4} = U + B\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Die vollständige Lösung lautet somit:

$$u(x_2, t) = U \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} ds\, e^{-s^2/4} \right], \quad \eta = \frac{x_2}{\sqrt{\nu t}}. \tag{8.11}$$

Die Geschwindigkeitsprofile $u(x_2, t)$ sind offensichtlich zu verschiedenen Zeiten t ähnlich. Zur Zeit t_1 ist u eine eine Funktion von $x_2/\sqrt{\nu t_1}$ und zur Zeit t_2 eine von $x_2/\sqrt{\nu t_2}$, schreitet also die Zeit fort, so wird das Geschwindigkeitsprofil immer mehr gestreckt, wie es in Abb. 8.7 dargestellt ist. Zur Zeit t sind die Auswirkungen der Bewegung der Begrenzungsfläche auf einen Bereich der Ordnung $\sqrt{\nu t}$ von der Begrenzungsfläche beschränkt. Man kann aus

(8.11) unschwer berechnen, daß im Abstand $x_2 = 4\sqrt{\nu t}$ $u(x_2,t)$ kleiner als 1% von U ist. Auf diese Weise "teilt" der Einfluß der Viskose langsam die Bewegung der Begrenzungsfläche dem gesamten Fluid mit.

Noch besser kann man dies durch die *Diffusion der Wirbelstärke* beschreiben. Aufgrund von Gleichung (7.15) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\partial u}{\partial x_2} = -f'(\eta)\frac{1}{\sqrt{\nu t}} = -\frac{B}{\sqrt{\nu t}}e^{-\eta^2/4} \\ &= \frac{U}{\sqrt{\pi\nu t}}\exp\left\{\frac{-x_2^2}{4\nu t}\right\}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Dieser Wert ist ab einer Höhe von $x_2 = \sqrt{\nu t}$ exponentiell klein, wie in Abb. 8.7 durch die grau schattierten Flächen angedeutet wurde. Diese Ausbreitung der Wirbelstärke durch den Einfluß der Viskosität des Fluids glättet den ursprünglich singulären Zustand eines sogenannten *Wirbelblattes* einer unendlich hohen Konzentration an Wirbelstärke an der Berandung ($x_2 = 0$, $t \to 0$) und sonst einer verschwindend kleinen Wirbelstärke für ($x_2 > 0$, $t \to 0$).

Diese Schlußfolgerung kann wie folgt interpretiert werden:

> Die Wirbelstärke diffundiert in der Zeit t über die Strecke $L = \sqrt{\nu t}$. Hieraus folgt, daß für die Diffusion über die Distanz L die Zeitspanne $\tau = L^2/\nu$ benötigt wird. Somit können wir sagen, daß die *viskose Diffusionszeit* durch
>
> $$\tau = \mathcal{O}(L^2/\nu)$$
>
> gegeben ist.

Ein weiteres interessantes Beispiel ergibt sich aus dem Problem der Strömung eines viskosen Fluids zwischen zwei planparallelen Platten, von denen eine plötzlich mit der Geschwindigkeit U bewegt wird. Dieses Problem unterscheidet sich vom zuvor behandelten durch die Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x_2,0) &= 0, \quad 0 < x_2 < h, \\ u(0,t) &= U, \quad t > 0, \\ u(h,t) &= 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

welche zur vollständigen Lösung von Gleichung (8.9) benötigt werden. h ist dabei der Abstand der beiden planparalellen Platten. In diesem Fall haben wir inhomogene Randbedingungen und die zuvor diskutierte Lösungsmethode versagt. Man findet aber sofort eine stationäre Lösung, welche die Randbedingungen erfüllt

$$u_1 = U\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)$$

und die vollständige Lösung wird dann von der Form

$$u(x_2,t) = u_2(x_2,t) + U\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)$$

sein. Für $u_2(x_2,t)$ gilt

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned}
u_2(x_2,0) &= -U\left(1 - \frac{x_2}{h}\right), \quad 0 < x_2 < h \\
u_2(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\
u_2(h,t) &= 0, \quad t > 0,
\end{aligned}$$

welche nunmehr homogen sind. Die Methode der *Separation der Variablen* zeigt, daß Funktionen vom Typ

$$\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right\}\sin\left(\frac{n\pi x_2}{h}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

die Differentialgleichung für $u_2(x_2,t)$ zusammen mit den Randbedingungen für $x_2 = 0, h$ erfüllen. Keine befriedigt aber allein die Anfangsbedingung für $u_2(x_2,t)$ und man macht einen FOURIER-*Ansatz*

$$u_2(x_2,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right\}\sin\left(\frac{n\pi x_2}{h}\right).$$

Man benutzt nun FOURIER-Theorie um die Randbedingung aufzulösen. Dies führt zur Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x_2}{h}\right) = -U\left(1 - \frac{x_2}{h}\right), \quad 0 < x_2 < h$$

für die unbekannten Koeffizienten A_n und man findet:

$$\begin{aligned}
A_n &= -\frac{2}{h}\int_0^h dx_2\, U\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_2}{h}\right) \\
&= -\frac{2}{n}\frac{U}{\pi}.
\end{aligned}$$

Es folgt die vollständige Lösung:

$$u_2(x_2,t) = U\left(1 - \frac{x_2}{h}\right) - \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right\}\sin\left(\frac{n\pi x_2}{h}\right). \quad (8.13)$$

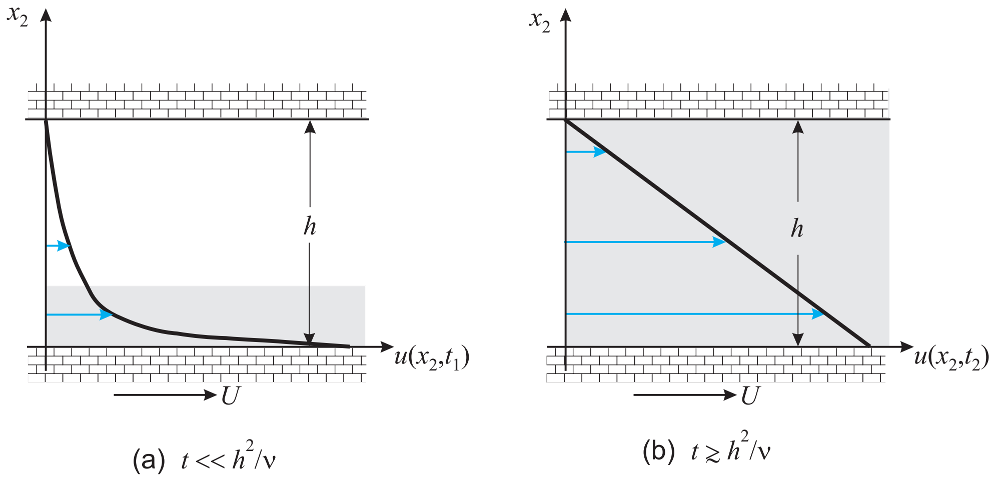


Abbildung 8.8: Strömung zwischen zwei festen, planparallelen Grenzflächen, von denen eine plötzlich mit der Geschwindigkeit U bewegt wird und die andere unbewegt bleibt. Die grau schattierten Flächen deuten die Bereiche signifikanter Wirbelstärke an.

Die wesentliche Eigenschaft dieser Lösung ist es, daß für Zeiten $t \gtrsim h^2/\nu$ die Strömung praktisch ihren stationären Zustand erreicht hat, wie es in Abb. 8.8b angedeutet wurde. Die Wirbelstärke ist nun praktisch gleichförmig über das Fluid verteilt.

8.4 Konvektion und Diffusion von Wirbelstärke

Bildet man den Rotor der NAVIER-STOKES Gleichung (8.3) und berücksichtigt man die Definition der Wirbelstärke entsprechend Gleichung (7.13), so erhalten wir nach analoger Rechnung, welche zu Gleichung (7.19) führte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nabla \times \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho}\underbrace{\nabla \times \nabla p}_{=0} + \nu\nabla^2\,(\nabla \times \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \times \nabla\lambda}_{=0} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} &= (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}.
\end{aligned}$$

Für die zweidimensionale Strömung vereinfacht sich dieses Ergebnis zu

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\omega = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}\right). \tag{8.14}$$

Im Rahmen der Theorie des idealen Fluids wurde $\nu = 0$ gesetzt und damit bleibt ω in der zweidimensionalen Strömung für jedes Fluid-Element erhalten, wie in Gleichung (7.20) zum Ausdruck gebracht wurde. Änderungen in ω in einem bestimmten Raumpunkt können nur durch *Konvektion* von Wirbelstärke aus anderen Bereichen des Fluids zustande kommen, und dies ist durch den *Konvektionstherm* $(\mathbf{u}\nabla)\,\omega$ beschrieben. In der Strömung des idealen Fluids wird also keine Diffusion der Wirbelstärke beobachtet werden können.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir einfache viskose Strömungen untersucht, in welchen der Konvektionsterm Null war und somit trat die Diffusion der Wirbelstärke isoliert auf und dieser Effekt wird durch den Term auf der rechten Seite von (8.13) beschrieben. Im allgemeinen wird also bei viskoser Strömung Konvektion *und* Diffusion von Wirbelstärke gemeinsam auftreten.