Kapitel 9

Wellen in Fluids

9.1 Einführung

Wellen in Fluids führen zu einer großen Zahl interessanter Phänomene, von denen wir einige wenige im Rahmen dieses Abschnittes ansprechen wollen. Betrachtet man etwa eine Gruppe von Wellen auf einem Fluid, so stellt man fest, daß sich jeder Wellenkamm schneller bewegt als die Gruppe als Ganzes. Es bilden sich an der Rückseite der Gruppe ständig neue Wellenkämme um an der Vorderseite wieder zu verschwinden. Nehmen wir etwa, wie in Abb. 9.1 dargestellt, an, daß auf einer Momentaufnahme zehn Wellenkämme im Wellenzug sind, so wird ein stationärer Beobachter in einem Punkt auf der x_1-Achse wesentlich mehr als zehn Wellenkämme zählen, wenn der Wellenzug vorbezieht. Die Ursache für dieses Verhalten ist, wie sich zeigen wird, daß Wasserwellen *dispersiv* sind, was bedeutet, daß sich die FOURIER-Komponenten der Störung mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten, und zwar in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Es wird sich herausstellen, daß sich im Fall von *Oberflächenwellen* in Wasser die Wellenkämme doppelt so schnell bewegen können als sich die Gruppe bewegt.

Die dispersive Eigenschaft von Wasserwellen ist von grundlegender Bedeutung. Sie ist verantwortlich für das komplizierte Wellenmuster hinter einem Schiff (Abb. 9.2a). Bei sehr kurzen Wellen wird dieser Effekt noch durch die Oberflächenspannung verstärkt. Werden Wasserwellen in ihrer Ausbreitung durch ein Hinderniss (Abb. 9.2b) gestört, so enthält das stationäre Wellenbild Störungen oberhalb und unterhalb der Störung. (Ein solches Wellenbild erhält man zum Beispiel, indem man die Wellenkämme durch Linien kennzeichnet.)

Weitere interessante Effekte sind zu beobachten, wenn man zwei übereinanderliegende Fluidschichten unterschiedlicher Dichte in Hinblick auf Strömungen untersucht. Das Phänomen des Auftriebs infolge der Schwerkraft spielt hier die dominante Rolle. Eine andere Art von Wellen kann entstehen,

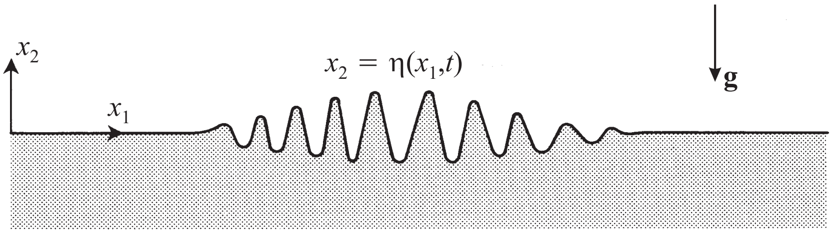
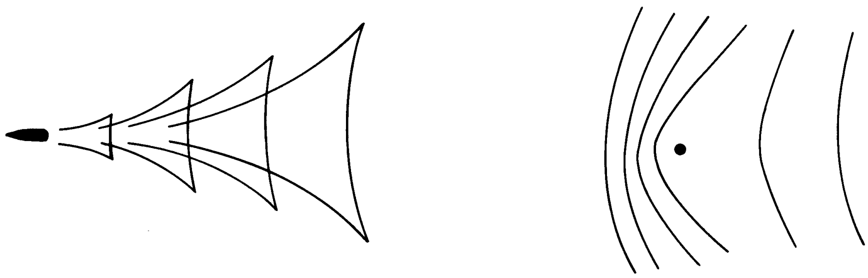


Abbildung 9.1: Eine Gruppe von Oberflächenwellen auf tiefem Wasser.



(*a*) (*b*)

Abbildung 9.2: Stationäres Wellenbild in der Strömung (a) vorbei an einem Schiff, (b) vorbei an einer Angelleine.

wenn die Dichte des Fluids kontinuierlich mit der Höhe abnimmt. Wieder sind Auftriebskräfte verantwortlich; diesmal bewegen sich aber innere Gravitationswellen durch das Fluid.

Der Auftrieb ist nicht der einzige Mechanismus, welcher es einem Fluid ermöglicht eine Wellenbewegung zu unterstützen. So erlaubt die Kompressibilität die Ausbreitung von *Schallwellen*.

9.2 Oberflächenwellen auf tiefem Wasser

Wir wollen jetzt zweidimensionale Wasserwellen untersuchen und beschreiben das Geschwindigkeitsfeld mit Hilfe von

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x_1, x_2, t) \\ v(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und nehmen weiters an, daß die Strömung wirbelfrei ist, was zu

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

führt. Diese Annahme ist zutreffend, wenn man davon ausgeht, daß die Viskosität des Fluids vernachlässigbar ist, und daß das Fluid anfänglich in Ruhe war. Die Wirbelstärke jedes Fluid-Elements ist dann für $t = 0$ gleich Null und bleibt gleich Null aufgrund der Wirbelgleichung (7.20). Die Wirbelfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes ($\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$) impliziert die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials $\phi(x_1, x_2, t)$ derart, daß

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi, \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}. \tag{9.1}$$

Wegen der Inkompressibilitätsbedingung (7.3) genügt das Geschwindigkeitspotential folgender partieller Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Dies ist eine LAPLACE-Differentialgleichung, von welcher bekannt ist, daß sie stets Lösungen hat.

Wir stellen uns nun vor, daß die Fluidbewegung von einer Deformation der Fluidoberfläche herrühren möge. Wir beschreiben die in Abb. 9.1 dargestellte freie Oberfläche durch die Gleichung

$$x_2 = \eta(x_1, t), \tag{9.3}$$

und bestimmen zunächst die *kinematischen Bedingungen für eine freie Oberfläche.*

Es ist eine Erfahrungstatsache, daß Fluid-Elemente, welche an der Oberfläche sind, an dieser verbleiben. (Man kann dies nachweisen, indem man zu einem beliebigen Zeitpunkt Fluid-Elemente an der Oberfläche einfärbt.) Wir definieren zunächst die Größe

$$F(x_1, x_2, t) = x_2 - \eta(x_1, t), \tag{9.4}$$

wobei x_2 zunächst so wie x_1 und t eine unabhängige Variable ist, und *behaupten*, daß $F(x_1, x_2, t)$ für jedes Fluid-Element an der Oberfläche (wenn wir nun speziell mit x_2 die Koordinate eines Teilchens am Ort x_1 an der Oberfläche bezeichnen) konstant bleibt. (Wegen (9.3) ist $F(x_1, x_2, t)$ tatsächlich Null.) Also gilt

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

auf der freien Oberfläche, mit (x_1, x_2) einem Punkt auf der freien Oberfläche. Dies ergibt ausgeschrieben:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) F = 0, \quad \text{auf} \quad x_2 = \eta(x_1, t). \tag{9.5}$$

Aus (9.4) bestimmen wir

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad u\frac{\partial F}{\partial x_1} = -u\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \quad v\frac{\partial F}{\partial x_2} = v,$$

und wir erhalten für Gleichung (9.5):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = v, \quad \text{auf} \quad x_2 = \eta(x_1, t). \tag{9.6}$$

Dieses Ergebnis kann man anhand von zwei Sonderfällen plausibel machen: (a) Die freie Oberfläche bleibt horizontal, dann ist $\partial\eta/\partial x_1 = 0$ und $v = d\eta/dt$, was offensichtlich zutreffend ist. (b) Wir nehmen nun an, daß die freie Oberfläche stationär ist, damit ist $\partial\eta/\partial t = 0$ und (9.6) reduziert sich auf $v/u = d\eta/dx_1$, mit $\eta = \eta(x_1)$. Dies wiederum impliziert, daß die Steigung der Stromlinien auf $x_2 = \eta(x_1)$ gleich der Steigung der freien Oberfläche ist, wie es sein muss.

Im nächsten Schritt leiten wir nun die Bernoulli-*Gleichung für nicht stationäre, wirbelfreie Strömungen* ab. Dazu kehren wir kurz zur Euler-Gleichung (7.7) zurück:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \chi\right).$$

Es ist nun, nach Voraussetzung, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, da die Strömung wirbelfrei sein soll, und damit gilt weiter (9.1). Wir erhalten dann aus der Euler-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \chi\right),$$

wobei in unserem Fall $\chi = gx_2$ ist. Integration dieser Gleichung liefert unmittelbar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \chi &= G(t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + H &= G(t), \end{aligned} \tag{9.7}$$

mit $G(t)$ einer willkürlichen Funktion der Zeit, welche die Lösung unseres Problemes $\mathbf{u} = \text{grad}\phi$ in keiner Weise beeinflußt. Gleichung (9.7) ist eine Erweiterung des Bernoulli-Theorems der wirbelfreien Strömung:

Satz 9.1 *In der nicht stationären wirbelfreien Strömung des idealen Fluids ist H über das ganze Strömungsfeld hinweg konstant.*

Dies wurde bereits auf Seite 157 angeführt.

Es sind nun die notwendigen Vorarbeiten geleistet um die *Bedingungen für den Druck an der freien Oberfläche* aufstellen zu können. Für ein ideales Fluid ist dieser an der freien Oberfläche gleich dem Atmosphärendruck p_0, welchen wir im allgemeinen als konstant über die Oberfläche $x_2 = \eta(x_1, t)$ annehmen können. Eine zweckmäßige Wahl von $G(t)$, welches ja frei wählbar ist, erlaubt dann, daß die Gleichung (9.7) die *Druckbedingung*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) + g\eta = 0, \quad \text{auf} \quad x_2 = \eta(x_1, t) \tag{9.8}$$

ergibt.

Wellen mit kleiner Amplitude

Wir nehmen nun an, daß sowohl die Oberflächenauslenkung $\eta(x_1, t)$ als auch die zugehörigen Fluidgeschwindigkeitskomponenten u und v klein seien. Dies erlaubt eine Linearisierung des Problems und wir werden Terme höher als erster Ordnung in kleinen Größen vernachlässigen. (Dies ist eine durchaus übliche Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen, wobei natürlich dann zu untersuchen sein wird, was eigentlich unter 'klein' zu verstehen ist.) Damit erhalten wir aus (9.6) unmittelbar:

$$v(x_1, x_2, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{9.9}$$

Wir entwickeln die linke Seite in eine TAYLOR-Reihe um die Stelle $x_2 = 0$

$$v(x_1, x_2, t) = v(x_1, 0, t) + \eta \left.\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} + \cdots$$

und erhalten wieder unter Vernachlässigung des Terms zweiter Ordnung aus (9.9):

$$v(x_1, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{9.10}$$

Wir verwenden nun Gleichung (9.1) und erhalten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{auf} \quad x_2 = 0. \tag{9.11}$$

Aus der Druckbedingung (9.8) wird schließlich:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad \text{auf} \quad x_2 = 0. \tag{9.12}$$

Wir untersuchen nun eine sinusförmige Wanderwelle der Form

$$\eta(x_1, t) = A\cos(kx_1 - \omega t), \tag{9.13}$$

mit A der Amplitude der Welle, ω der Frequenz und k der Wellenzahl. Die Gleichungen (9.11) und (9.12) lassen darauf schließen, daß das Geschwindigkeitspotential von der Form

$$\phi = f(x_2)\sin(kx_1 - \omega t)$$

sein wird. Da aber ϕ die LAPLACE-Gleichung (9.2) erfüllen muß, folgt, daß für $f(x_2)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} f(x_2)(-1)k^2 \sin(kx_1 - \omega t) + f''(x_2)\sin(kx_1 - \omega t) &= 0 \\ f''(x_2) - k^2 f(x_2) &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Wir finden die allgemeine Lösung:

$$f(x_2) = C\,e^{kx_2} + D\,e^{-kx_2}, \quad k > 0.$$

(Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $k > 0$ annehmen.) Ist das Wasser unendlich tief, so muß man $D = 0$ setzen, damit $\mathbf{u}$ für $x_2 \to -\infty$ beschränkt bleibt. Wir erhalten also:

$$\phi(x_1, x_2, t) = C\,e^{kx_2}\sin(kx_1 - \omega t).$$

Wir setzen dies zusammen mit (9.13) in die Bedingungen (9.11) und (9.12) für die freie Oberfläche ein und erhalten:

$$\begin{aligned} (9.11): \quad Cke^{kx_2}\sin(kx_1 - \omega t)|_{x_2=0} &= -A(-\omega)\sin(kx_1 - \omega t) \\ Ck = A\omega \quad \to \quad C &= \frac{A\omega}{k} \qquad (9.14) \\ (9.12): \quad Ce^{kx_2}(-\omega)\cos(kx_1 - \omega t)|_{x_2=0} &= -gA\cos(kx_1 - \omega t) \\ -C\omega + gA &= 0 \\ -\frac{A\omega^2}{k} + gA &= 0 \\ \omega^2 &= gk. \qquad (9.15) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\phi(x_1, x_2, t) = \frac{A\omega}{k} e^{kx_2}\sin(kx_1 - \omega t), \tag{9.16}$$

mit der *Dispersionsrelation* (9.15), welche das eigentlich wichtige Ergebnis ist. (9.15) hat die Form $\omega^2 = g\,|k|$, wenn man k nicht auf positive Werte einschränkt.

Eine wichtige Bemerkung ist hier noch angebracht: Mit der Schwingungsgleichung (4.64) wurde die Wellengeschwindigkeit c eingeführt, welche auch

Phasengeschwindigkeit genannt wird. Es ist nun $c = \omega/k$, wie in Zusammenhang mit Gleichung (4.69) festgestellt wurde. Dies ergibt nun für unsere Oberflächenwelle in Zusammenhang mit der Dispersionsrelation (9.15)

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}, \tag{9.17}$$

und damit hängt die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwelle von der Wurzel der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ab.

Wir sind nunmehr in der Lage die anfänglich gemachte Einschränkung auf 'kleine Amplituden' auf die Frage "klein im Vergleich wozu?" hin zu untersuchen. In (9.11) haben wir den Beitrag $u\partial\eta/\partial x_1$ gegenüber dem Beitrag von v vernachlässigt. Die Gleichungen (9.6) und (9.16) zeigen, daß u und v von gleicher Größenordnung sind, nämlich von der Ordnung $A\omega$. Wir haben also in (9.11) die Näherung gemacht, daß die Steigung an der freien Oberfläche klein ist. Wenn wir nun Gleichung (9.8) betrachten, so sehen wir, daß $u^2 + v^2$ von der Größenordnung $A^2\omega^2 = A^2 gk$ ist und dies ist gegenüber $g\eta$ vernachlässigbar, wenn Ak klein ist. Führen wir nun wieder die Wellenlänge λ ein, so folgt, daß $Ak = A2\pi/\lambda$ ist, und daher die Amplitude A klein gegen λ sein muß um die eingangs gemachten Annahmen realisieren zu können.

Aus der Potentialgleichung (9.16) kann man nun die Geschwindigkeitskomponenten mit Hilfe von (9.1) bestimmen:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= A\omega e^{kx_2} \cos(kx_1 - \omega t) \\ v(x_1, x_2, t) &= A\omega e^{kx_2} \sin(kx_1 - \omega t). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, daß jedes Fluid-Element nur durch einen kleinen Beitrag (x_1', x_2') von seiner mittleren Position $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ abweicht, so kann man seine Position als Funktion der Zeit durch Integration von

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial x_1'}{\partial t} = A\omega e^{k\bar{x}_2} \cos(k\bar{x}_1 - \omega t) \\ v(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial x_2'}{\partial t} = A\omega e^{k\bar{x}_2} \sin(k\bar{x}_1 - \omega t) \end{aligned}$$

bestimmen. (Dazu haben wir angenommen, daß die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ im Bereich der Fluid-Element-Auslenkungen vom Ort unabhängig ist!) Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_1' &= Ae^{k\bar{x}_2} \sin(k\bar{x}_1 - \omega t) \\ x_2' &= Ae^{k\bar{x}_2} \cos(k\bar{x}_1 - \omega t), \end{aligned}$$

und damit sind die Fluid-Element-Bahnen Kreisbahnen. Der Radius der Kreise, $Ae^{k\bar{x}_2}$, nimmt exponentiell mit der Tiefe $-x_2$ ab, genauso wie die Strömungsgeschwindigkeit selbst. Die Gesamtenergie der Oberflächenwelle ist offensichtlich in einem Bereich der Größenordnung einer halben Wellenlänge unterhalb der Oberfläche enthalten.

9.3 Die Gruppengeschwindigkeit

Definition 9.1 *Ist eine Dispersionsrelation der Form $\omega = \omega(k)$ gegeben, so definieren wir die Gruppengeschwindigkeit als*

$$c_G = \frac{d\omega}{dk}. \tag{9.18}$$

Somit hängt die Gruppengeschwindigkeit in dispersiven Medien von k ab. Die Gruppengeschwindigkeit hat folgende wichtige Eigenschaften:

(i) Es ist dies jene Geschwindigkeit, mit welcher sich ein isoliertes Wellenpaket bewegt.

(ii) Es ist dies jene Geschwindigkeit, mit welcher sich der Beobachter bewegen muß, will er stets Wellen derselben Wellenlänge sehen.

(iii) Es ist dies jene Geschwindigkeit, mit welcher Energie von Wellen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ transportiert wird.

In unserem zuvor behandelten Fall ergibt sich die Gruppengeschwindigkeit aus der Dispersionsrelation (9.15) zu

$$c_G = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

und ist somit gleich der Hälfte der Phasengeschwindigkeit (9.17), wie in der Einleitung behauptet wurde.

9.4 Schallwellen

Wir leiten nun Schallwellen in einem Fluid aus den hydrodynamischen Grundgleichungen ab. Es gilt zunächst die Kontinuitätsgleichung (6.16)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

dann die Euler-Gleichung (7.6)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \chi\right),$$

und schließlich die Zustandsgleichung (6.17)

$$p = p(\rho),$$

da wir das Fluid nicht länger als inkompressibel ansehen wollen. Es ist dies ein System von fünf nicht linearen Gleichungen zur Bestimmung der fünf Felder $\rho(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ und $p(\mathbf{r},t)$.

Ein allgemeines Verfahren zur Lösung nicht linearer Gleichungssysteme besteht in deren *Linearisierung*. Man geht dazu von bekannten Lösungen $\rho_0(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r},t)$ und $p_0(\mathbf{r},t)$ aus und betrachtet kleine Auslenkungen $\rho = \rho_0 + \delta\rho_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$ und $p = p_0 + \delta p$. Dies wird dann in obige Gleichungen eingesetzt, wobei die Terme der bekannten Lösung natürlich die Gleichungen erfüllen und sich damit aufheben. Man behält nur Beiträge, welche linear in δ.. sind und erhält so ein in $\delta\rho$, $\delta\mathbf{u}$ und δp lineares Gleichungssystem, welches dann unter Verwendung üblicher Methoden lösbar ist.

Besondere Beachtung verdient die Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned} p_0 + \delta p &= p(\rho_0 + \delta\rho) = p_0(\rho_0) + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \delta\rho + \cdots \\ &= p_0(\rho_0) + \frac{\delta\rho}{\rho\kappa_s} + \cdots \end{aligned} \tag{9.19}$$

mit der adiabatischen Kompressibilität κ_s. (Hier wurde angenommen, daß beim Schall die Dichteänderungen im Trägermedium so schnell erfolgen, daß kein nennenswerter Energieaustausch stattfindet.) Diese Gleichung ersetzt nun die Zustandsgleichung (6.17).

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Gleichgewichtslösung (keine Schallwelle)

$$\rho_0 = \text{konst}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad p_0 = \text{konst}, \tag{9.20}$$

und die Abweichungen sollen von der Form einer Wanderwelle sein:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \rho_0 + \delta\rho \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u} \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\} \\ p(\mathbf{r},t) &= p_0 + \delta p \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}\,. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Wir haben hier die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

zur Vereinfachung der weiteren Rechnung benützt, wobei natürlich nur der Realteil von physikalischer Relevanz ist. Dieser Ansatz entspricht harmonischen Schwingungen der Form (9.13). Wir setzen nun (9.20) zusammen mit dem Ansatz (9.21) in die Kontinuitätsgleichung und die Euler-Gleichung ein, berücksichtigen weiters (9.19), und erhalten:

$$\begin{aligned} (-i\omega\delta\rho + i\mathbf{k}\delta\mathbf{u}\,\rho_0)\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\} &= 0 \\ \left(-i\omega\rho_0\delta\mathbf{u} + \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0\kappa_s}\right)\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\} &= 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben dies in Matrixform an:

$$\begin{pmatrix} -\omega & \rho_0 \mathbf{k} \\ \frac{\mathbf{k}}{\rho_0 \kappa_s} & -\omega \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta\mathbf{u} \end{pmatrix} = 0. \tag{9.22}$$

Wählen wir zunächst $\delta\mathbf{u} \perp \mathbf{k}$, so folgt $\omega = 0$ und $\mathbf{k} = 0$ und diese Lösung entspricht einer trivialen Änderung von (9.20). Somit sind *transversale Wellen* für Schallwellen uninteressant. Von Interesse sind hingegen Lösungen mit $\delta\mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$, also *longitudinale Wellen.* Wir wählen $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$ und $\delta\mathbf{u} = \delta u\, \mathbf{e}_3$ und erhalten für (9.22)

$$\begin{pmatrix} -\omega & k\rho_0 \\ \frac{k}{\rho_0 \kappa_s} & -\omega \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \end{pmatrix} = 0,$$

mit der nicht trivialen Lösung, welche vom Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} -\omega & k\rho_0 \\ \frac{k}{\rho_0 \kappa_s} & -\omega \rho_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k^2}{\rho_0 \kappa_s}$$

bestimmt ist. Wir führen noch die *Schallgeschwindigkeit*

$$c_S = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \kappa_s}} \tag{9.23}$$

ein, und finden die *lineare* Dispersionsrelation

$$\omega = c_S k = c_S \, |\mathbf{k}| \tag{9.24}$$

im Gegensatz zu Oberflächenwellen. Somit pflanzen sich die Wellenpakete *ohne* Dispersion, also ohne Änderung ihrer Form fort. Bei einer nicht linearen Dispersionsrelation würden sich hohe und tiefe Töne mit unterschiedlichen Laufzeiten fortpflanzen und so eine akustische Verständigung praktisch unmöglich machen.

Wir können nun die adiabatische Kompressibilität anhand von (6.18) mit

$$\kappa_s = \frac{1}{\gamma p_0}$$

identifizieren, wenn für das Fluid eine polytrope Zustandsgleichung vorausgesetzt wird. Damit wird dann

$$c_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

Bedeutend ist das Auftreten der Kompressibilität in der Schallgeschwindigkeit, da dadurch die am Anfang dieses Kapitels gemachte Feststellung, daß die Kompressibilität die Ausbreitung von Schallwellen erlaubt, bewiesen ist.

Gleichzeitig ist auch gezeigt, daß Schallwellen ohne Medium nicht entstehen können, da Gleichung (9.19) wesentlich war. (Für Vakuum kann eine solche Beziehung nicht formuliert werden.)

Da sich das Strömungsverhalten von Fluids grundlegend verändert, wenn die Schallgeschwindigkeit unter- bzw. überschritten wird, wird häufig zur Charakterisierung eines Fluids die MACH-Zahl

$$M = \frac{U}{c_S} \tag{9.25}$$

eingeführt, wobei U die Geschwindigkeit der freien Strömung ist. Ist $M^2 \ll 1$, so haben wir weitestgehend die Strömung eines inkompressiblen Fluids.