Anhang A

Etwas Mathematik

A.1 Krummlinige Koordinaten

A.1.1 Ebene Polarkoordinaten

Anstelle der kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 führt man unter Verwendung der Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\varphi, & \rho &= \sqrt{x_1^2+x_2^2}, \\ x_2 &= \rho\sin\varphi, & \varphi &= \arctan\left(x_2/x_1\right), \end{aligned} \tag{A.1}$$

Polarkoordinaten ein. Wir führen weiters die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho$ in Richtung von ρ und $\mathbf{e}_\varphi$ als (rechtshändiges) orthogonales Komplement von $\mathbf{e}_\rho$ ein. Wir bestimmen nun die Relation der neuen Einheitsvektoren zu den Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ indem man das totale

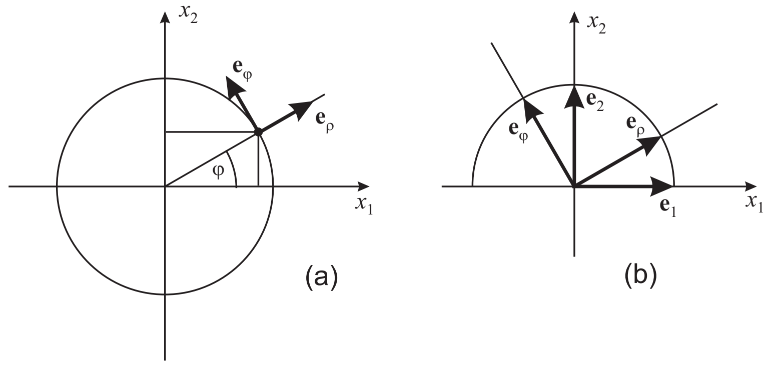


Abbildung A.1: Ebene Polarkoordinaten: (a) Definition, (b) Koordinatendreibein.

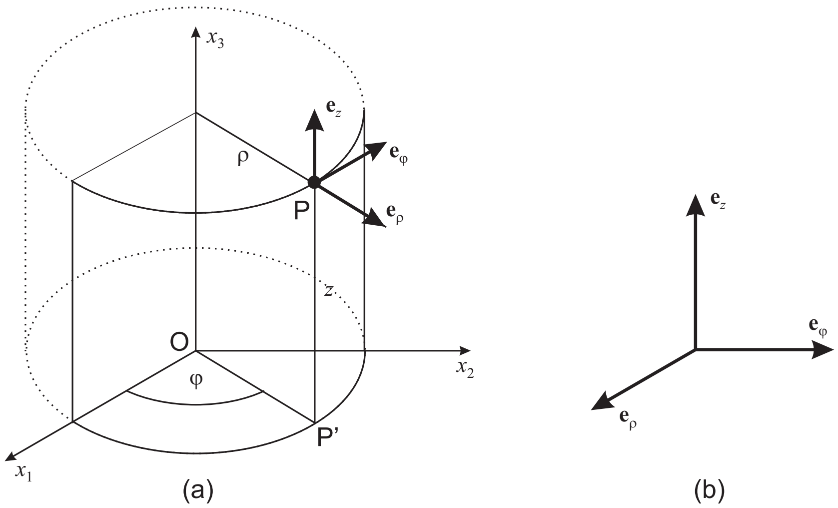


Abbildung A.2: Zylinderkoodinaten: (a) Definition, (b) Koordinatendreibein.

Differential des Ortsvektors $\mathbf{r}$ berechnet:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= dx_1\,\mathbf{e}_1 + dx_2\,\mathbf{e}_2 \\
&= \left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial x_1}{\partial\varphi}d\varphi\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}d\varphi\right)\mathbf{e}_2 \\
&= (\cos\varphi\,d\rho - \rho\sin\varphi\,d\varphi)\,\mathbf{e}_1 + (\sin\varphi\,d\rho + \rho\cos\varphi\,d\varphi)\,\mathbf{e}_2 \\
&= (\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2)\,d\rho + \rho\,(-\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2)\,d\varphi \\
&:= d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi, \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2, \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

wodurch $\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\varphi = 0$ sichergestellt ist.

A.1.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind die einfachste Erweiterung ebener Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$. Die Lage des Punktes P (Abb. A.2) im Raum wird durch ρ, den Abstand von der x_3-Achse, φ dem Winkel zwischen der Strecke $\overline{OP'}$ und der x_1-Achse und z, dem Abstand von P von der (x_1, x_2)-Ebene bestimmt. Damit ergibt sich die Transformation:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi, & \rho &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
x_2 &= \rho\sin\varphi, & \varphi &= \arctan(x_2/x_1), \qquad \text{(A.4)} \\
x_3 &= z, & z &= x_3.
\end{aligned}$$

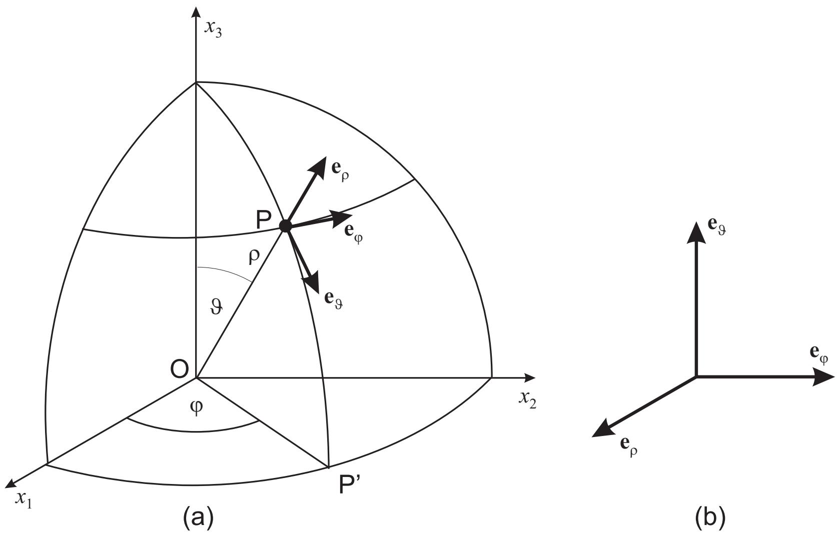


Abbildung A.3: Kugelkoordinaten: (a) Definition, (b) Koordinatendreibein.

Das Koordinatendreibein ist durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ und $\mathbf{e}_z$ gegeben. Aus dem totalen Differenzial

$$d\mathbf{r} = dz\,\mathbf{e}_z + d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \tag{A.5}$$

folgt nach analoger Rechnung wie für ebene Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_\rho\,\mathbf{e}_\varphi &= 0, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_\varphi\,\mathbf{e}_z &= 0, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_z\,\mathbf{e}_\rho &= 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.1.3 Kugelkoordinaten

Der Punkt P im Raum wird, wie in Abb. A.3a angedeutet, durch folgende Angaben charakterisiert: ρ ist der Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung, ϑ ist der Polarwinkel, der Winkel zwischen $\overline{OP}$ und der x_3-Achse und φ ist der Azimuthwinkel, also der Winkel zwischen der Strecke $\overline{OP'}$ und der x_1-Achse. Daraus ergibt sich die Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta, & \rho &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ x_2 &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta, & \varphi &= \arctan\left(x_2/x_1\right), \\ x_3 &= \rho\cos\vartheta, & \vartheta &= \arctan\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Wir führen das Koordinatendreibein ein mit $\mathbf{e}_\rho$, den Einheitsvektor in Radialrichtung, $\mathbf{e}_\vartheta$ als Einheitsvektor senkrecht zu $\mathbf{e}_\rho$, also tangential an die

Kugelfläche entlang eines Längenkreises, und $\mathbf{e}_\varphi$ als orthogonales Komplement, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\vartheta$, also als Einheitsvektor tangential an die Kugelfläche entlang eines Breitenkreises. Aus dem totalen Differential

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,d\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta + \rho\sin\vartheta\,d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \tag{A.8}$$

folgt nach analoger Rechnung wie für ebene Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= (\sin\vartheta\cos\varphi)\ \mathbf{e}_1 + (\sin\vartheta\sin\varphi)\ \mathbf{e}_2 + \cos\vartheta\,\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{e}_\vartheta &= (\cos\vartheta\cos\varphi)\ \mathbf{e}_1 + (\cos\vartheta\sin\varphi)\ \mathbf{e}_2 + (-\sin\vartheta)\ \mathbf{e}_3, \\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

A.2 Vektoranalysis

A.2.1 Definitionen und Sätze

Wir führen den Differentialoperator 'Nabla'

$$\nabla := \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A.10}$$

für ein kartesisches Koordinatensystem ein. Dieser Operator hat offensichtlich auch Vektorcharakter. Dieser Operator wird im folgenden dazu verwendet verschiedene Differentialoperationen and skalaren bzw. Vektorfeldern einzuführen.

Definition A.1 *Es existiere im $\mathbb{R}^3$ ein Skalarfeld $f(\mathbf{r})$, dann ist durch*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) := \nabla f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_i} \tag{A.11}$$

der Gradient *des Skalarfeldes $f(\mathbf{r})$ gegeben.*

Der Vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{r})$ steht im Punkte $\mathbf{r}$ senkrecht auf die Fläche $f(\mathbf{r}) = \text{konst}$.

Definition A.2 *Beschreibt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, dann ist durch*

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) := \nabla\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i(\mathbf{r})}{\partial x_i} \tag{A.12}$$

die Divergenz *des Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ gegeben, wenn die $F_i(\mathbf{r})$ die Komponente des Vektors $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in Richtung von x_i ist.*

Definition A.3 *Beschreibt* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *ein Vektorfeld im* $\mathbb{R}^3$*, dann ist durch*

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) := \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(\mathbf{r}) & F_2(\mathbf{r}) & F_3(\mathbf{r}) \end{vmatrix} \tag{A.13}$$

die Rotation *des Vektorfeldes* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *gegeben.*

Ist $\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, so bezeichnet man das Vektorfeld als *wirbelfrei*.

Die zweifache Anwendung des ∇-Operators wird als LAPLACE-Operator

$$\Delta := \nabla^2 = \nabla\nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} \tag{A.14}$$

bezeichnet.

Folgende Ergebnisse sind unschwer aus den vorhergehenden Defintionen und unter Berücksichtigung der Vektoreigenschaften des Nablaoperators abzuleiten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) &= \nabla\left[\nabla f(\mathbf{r})\right] = (\nabla\nabla)\, f(\mathbf{r}) = \nabla^2 f(\mathbf{r}), \\ \operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \mathbf{b}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{b}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \nabla^2\,\mathbf{a}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \nabla\,(\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) = 0, \\ \operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left[\nabla\, f(\mathbf{r})\right] = 0. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Weiters gelten die Integralsätze:

Satz von GAUSS**:**

> Es ist $\mathcal{B}$ ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^3$, welches von der Fläche $\mathcal{S}$ vollständig umschlossen ist. Auf diesem Gebiet ist ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{B}$ gegeben. Ferner sei $\mathbf{n}$ der Flächennormalvektor auf $\mathcal{S}$ im Punkte $\mathbf{r} \in \mathcal{S}$. Dann gilt:
>
> $$\int_{\mathcal{B}} d^3r\, \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} dA\, \mathbf{F}(\mathbf{r})\, \mathbf{n}. \tag{A.16}$$

Satz von STOKES**:**

> Es existiere eine Fläche $\mathcal{A}$ im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbf{n}$ sei der Flächennormalvektor auf die Fläche $\mathcal{A}$. Ferner ist die Fläche $\mathcal{A}$ vollständig von der Raumkurve $\mathcal{C}$ begrenzt. Auf dieser Fläche sei ferner ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{A}$ gegeben. Dann gilt:
>
> $$\int_{\mathcal{A}} dA\, \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\, \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{A.17}$$

Man bezeichnet die rechte Seite von (A.17) oft auch als die *Zirkulation* des Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ längs der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$.

A.2.2 Der ∇-Operator in krummlinigen Koordinaten

Wir beschränken uns zunächst auf zwei Dimensionen und bestimmen die Umkehrung der Gleichungen (A.3), d.h.: wir wollen die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho$ und $\mathbf{e}_\varphi$ ausdrücken. Wir bestimmen dazu das totale Differential entsprechend (A.2)

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\rho}{\partial x_2}dx_2\right)\mathbf{e}_\rho + \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2\right)\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Aus den Beziehungen (A.1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial x_1} &= \frac{x_1}{\rho}, & \frac{\partial\rho}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{\rho} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= -\frac{x_2}{\rho^2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{\rho^2}, \end{aligned}$$

und wir fahren fort:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \left(\frac{x_1}{\rho}dx_1 + \frac{x_2}{\rho}dx_2\right)\mathbf{e}_\rho + \rho\left(-\frac{x_2}{\rho^2}dx_1 + \frac{x_1}{\rho^2}dx_2\right)\mathbf{e}_\varphi \\ &= dx_1\,\mathbf{e}_1 + dx_2\,\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Durch Vergleich ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\rho}\left(x_1\mathbf{e}_\rho - x_2\mathbf{e}_\varphi\right) \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\rho}\left(x_2\mathbf{e}_\rho + x_1\mathbf{e}_\varphi\right). \end{aligned} \tag{A.18}$$

Wir transformieren nun den Nabla-Operator in zwei Dimensionen von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= \mathbf{e}_1\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \mathbf{e}_2\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\ &= \frac{1}{\rho}\left(x_1\mathbf{e}_\rho - x_2\mathbf{e}_\varphi\right)\left[\frac{x_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{x_2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left(x_2\mathbf{e}_\rho + x_1\mathbf{e}_\varphi\right)\left[\frac{x_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{x_1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\ &= \mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Dieses Ergebnis ist unmittelbar auf Zylinderkoordinaten erweiterbar und wir erhalten:

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{A.20}$$

Eine analoge Rechnung führt unter Verwendung der Transformation (A.7) zum Nabla-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{A.21}$$

A.3 Variationsrechnung

In diesem Anhang werden die Problemstellung und die Lösungsmethoden der Variationsrechnung kurz erläutert und mit denen der gewöhnlichen Maximum-Minimum Rechnung verglichen.

A.3.1 Eine abhängige Variable

Maximum-Minimum-Rechnung

Gegeben ist eine *Funktion*

$$f(x) \quad \text{gegeben.}$$

Gesucht ist ein *Wert* x_0, für den $f(x)$ einen Extremwert annimmt.

$$f(x_0) \;=\; \text{Extr.}$$

Lösungsvorschift: Die Werte x_0 suchen, für die die erste Ableitung der Funktion Null ist:

$$f'(x_0) \;\stackrel{!}{=}\; 0.$$

Variationsrechnung

Gegeben ist ein *bestimmtes Integral*

$$\int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y(x), y'(x), x) \quad \text{gegeben,}$$

worin $F(y, y', x)$ als Funktion seiner Argumente y, y', x bekannt ist. (Hier ist $y' = dy/dx$.)

Gesucht ist eine *Funktion* $y = y(x)$, die in das obige Integral eingesetzt, diesem einen extremen Wert verleiht:

$$\int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y(x), y'(x), x) = \text{Extr.} \tag{A.22}$$

Lösungsvorschift: Die erste Variation des Integrals muß Null sein:

$$\delta \int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y(x), y'(x), x) \stackrel{!}{=} 0. \tag{A.23}$$

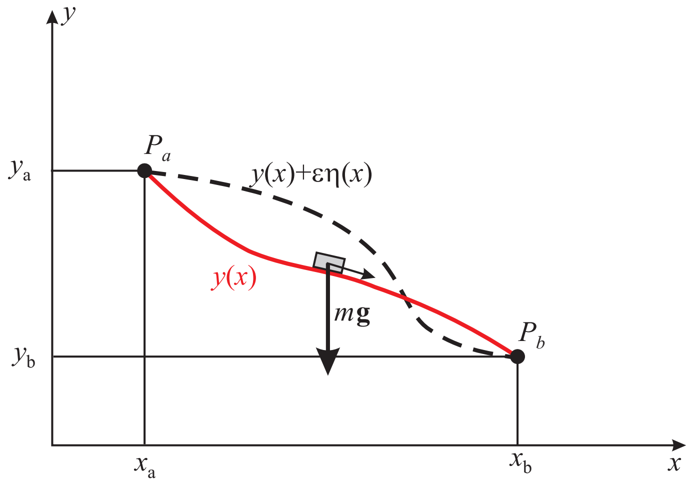


Abbildung A.4: Die Brachistochrone: Auf welcher Kurve kommt ein reibungsfrei gleitender Körper im Schwerefeld am schnellsten von P_a nach P_b?

Wie unten gezeigt wird, ist das der Fall, wenn die Funktion $x(t)$ Lösung der EULER*schen Differentialgleichung* des Variationsproblems ist:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \;=\; 0. \qquad \text{(A.24)}$$

Die Problemstellung der Variationsrechnung soll zunächst am Beispiel der *Brachystochrone* erläutert werden: *Ein Teilchen bewegt sich in einer vertikalen Ebene auf einer vorgeschriebenen Kurve unter dem Einfluß der Schwerkraft. Welche Kurve muß man wählen, damit die Laufzeit vom gegebenen Anfangspunkt* (x_a, y_a) *zum gegebenen Endpunkt* (x_b, y_b) *möglichst kurz ist?*

Dazu wird der Energiesatz für ein Teilchen der Masse m im Schwerefeld nach der Geschwindigkeit aufgelöst

$$E = T + U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mg\,y = \frac{m}{2}\,v^2 \;+\; mg\,y,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2g\,y}, \qquad ds \;=\; \sqrt{dx^2 + dy^2} \;=\; \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Die Bahnkurve soll so gewählt werden, daß die Laufzeit τ ein Extremum ist (siehe Abb. A.4):

$$\tau = \int_{t_a}^{t_b} dt = \int_{P_a}^{P_b} \frac{ds}{v} = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{\frac{2E}{m} - 2g\,y}} := \int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y, y', x) \stackrel{!}{=} \text{Extr.} \qquad \text{(A.25)}$$

Die Methode zur Lösung des Variationsproblems (A.22) besteht darin, daß das Variationsproblem auf ein gewöhnliches Maximum-Minimum Problem zurückgeführt wird. Dazu wird angenommen, daß die Lösung $x(t)$, die dem Integral in Gl. (A.22) einen extremalen Wert verleiht, schon bekannt ist. Der mit der Lösung $x(t)$ berechnete Wert des Integrals (A.22), nämlich

$$I_0 := \int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, F(y(x), y'(x), x)$$

wird verglichen mit den Werten, die man erhält, wenn man in das Integral (A.22) die folgenden Vergleichsfunktionen

$$y(x,\varepsilon) = y(x) + \varepsilon\,\eta(x), \qquad 0 \leq \varepsilon \ll 1 \tag{A.26}$$

einsetzt. Diese sollen in der Nähe von $y(x)$ liegen (daher $\varepsilon \ll 1$!) und durch denselben Anfangs- und Endpunkt gehen wie die Lösung

$$\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0. \tag{A.27}$$

Einsetzen der Vergleichsfunktionen in das Integral (A.22) gibt:

$$I(\varepsilon) := \int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, F(y(x,\varepsilon), y'(x,\varepsilon), x). \tag{A.28}$$

Es ist klar, daß $I(\varepsilon = 0) = I_0$ ist. Weil $y(x)$ die Lösung des Variationsproblems ist, also dem Integral (A.22) den extremalen Wert verleiht, muß aber auch gelten:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \;=\; 0. \tag{A.29}$$

Durch diese Vorgangsweise mit dem Ansatz (A.26) und dessen Einsetzen in (A.22) ist das Variationsproblem in ein gewöhnliches Extremalproblem bezüglich des Parameters ε transformiert worden. Dies wird nun weiter im Integral (A.28) ausgeführt:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, \left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\right] = \int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta \;+\; \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right].$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt daraus gemäß (A.29) und (A.28)

$$\int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right] = \int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \int\limits_{x_a}^{x_b} dx\, \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' = 0. \tag{A.30}$$

Im zweiten Integral wird die Ableitung nach der unabhängigen Variablen durch partielle Integration überwälzt:

$$\int_{x_a}^{x_b} dx\, \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' = \eta\, \frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} dx\, \eta\, \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -\int_{x_a}^{x_b} dx\, \eta\, \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Wegen (A.27) ist der integrierte Anteil Null. Durch Einsetzen der gerade berechneten Relation in das Integral (A.30) wird dieses auf folgende Form gebracht:

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_a}^{x_b} dx\, \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\eta(x) = 0.$$

Die Funktion η ist in hohem Maße willkürlich. Deswegen kann das vorstehende Integral nur dann Null sein, wenn der Ausdruck in der Klammer Null ist. Dies gibt die EULER*sche Differentialgleichung* des Variationsproblems (A.23):

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} - \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y} = 0. \tag{A.31}$$

Deren Lösung $y(x)$ ist die gesuchte Funktion, die dem Integral (A.22) seinen extremalen Wert verleiht.

In dem wichtigen Spezialfall, daß die Funktion $F(y,y',x)$ nicht explizit von der unabhängigen Variablen x abhängt, ist folgende einfachere Bedingung, das JACOBI-Integral, der EULERschen Differentialgleichung äquivalent:

$$F(y,y') - y'\,\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = \text{konst.} \tag{A.32}$$

Aus $\partial F/\partial x = 0$ und aus Gl. (A.32) folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[F(y,y') - y'\,\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\right] &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\,y'' - y''\,\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=0} - y'\frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y'} \\
&= y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = 0.
\end{aligned}$$

A.3.2 Mehrere abhängige Variable

Die oben gebrachte Variationsrechnung läßt sich für den Fall von n abhängigen Variablen $y_i(x)$ verallgemeinern: Gesucht sind die Funktionen $y_i(x)$, sodass das Integral

$$\int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x); y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x); x) = \text{Extr} \tag{A.33}$$

ein Extrem wird, wobei F eine bekannte Funktion der Argumente ist. Dies bedeutet also

$$\delta \int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x); y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x); x) = 0.$$

Eine Schlußweise ganz wie die im Falle einer unbekannten abhängigen Variablen führt zu dem *System von* EULER*schen Gleichungen*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{A.34}$$

Es wird dazu angenommen, die $y_i(x)$ seien die gesuchten Funktionen, die dem Integral seinen extremen Wert verleihen. Setzt man die Vergleichsfunktionen

$$y_i(x) + \varepsilon\, \eta_i(x), \quad \varepsilon \ll 1,$$

die durch den gleichen Anfangs- und Endpunkt gehen sollen wie die Lösungen, d.h.

$$\eta_i(x_a) = \eta_i(x_b) = 0, \tag{A.35}$$

in das Integral (A.33) ein, dann ist das Variationsproblem wieder auf ein gewöhnliches Extremalproblem für das folgende Integral zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon) &= \int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y_1 + \varepsilon\, \eta_1, \ldots y_n + \varepsilon\, \eta_n; y_1' + \varepsilon\, \eta_1', \ldots, y_n' + \varepsilon\, \eta_n'; t), \\
\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \overset{!}{=} 0 &= \int_{x_a}^{x_b} dx \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i'} \eta_i' + \frac{\partial F}{\partial y_i}\, \eta_i \right\} \\
&= \int_{x_a}^{x_b} dx \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right\} \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\, \underbrace{\eta_i \Big|_{x=x_a}^{x=t_b}}_{=0} .
\end{aligned}$$

Die Ableitung des Integrals ist partiell integriert worden. Der integrierte Term ist wegen Bedingung (A.35) Null. Wegen der Willkürlichkeit und der Unabhängigkeit der η_i muß jede geschweifte Klammer für sich Null sein. Das gibt die oben bereits angeführten EULERschen Gleichungen (A.34)).

A.3.3 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Als letztes behandeln wir Variationsprobleme mit Nebenbedingungen. In der gewöhnlichen Maximum-Minimum-Rechnung sollen die Argumente $x_1, \ldots, x_n$

aufgesucht werden, die der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ einen extremen Wert verleihen. Dabei sind diese Argumente durch Nebenbedingungen eingeschränkt.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \text{Extr.} \\ g_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, K. \end{aligned}$$

Die Lösungsvorschrift ist (ohne Beweis): Mittels LAGRANGE Multiplikatoren λ_α bilde man die Funktion

$$f^* := f \;+\; \sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha$$

und suche deren Extrema gemäß

$$\begin{aligned} & & \frac{\partial f^*}{\partial x_i} &= 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \\ \frac{\partial f^*}{\partial \lambda_\alpha} &= & g_\alpha &= 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Der zweite Satz von Bedingungen sind gerade die Nebenbedingungen, die in formaler Weise ebenfalls als Ableitungen ausgedrückt worden sind. Aus den obigen $n+r$ Gleichungen können die $n+r$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ bestimmt werden.

Das analoge Problem der Variationsrechnung ist wieder: die Funktionen $y_i(x)$ zu finden, so dass

$$\int_{x_a}^{x_b} dx\, F(y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x); y_1'(x), y_2'(x), \ldots y_n'(x); x) \;=\; \text{Extr} \tag{A.36}$$

$$g_\alpha(y_1, y_2, \ldots y_n; y_1', y_2', \ldots y_n'; x) \;=\; 0. \tag{A.37}$$

Diese Funktionen, $y_i(x)$, werden durch die Nebenbedingungen $g_\alpha = 0$ eingeschränkt. Kommen in den g_α keine Ableitungen vor, heißen die Nebenbedingungen *holonom*, sonst *nicht holonom*. Die Lösungsvorschrift ist in beiden Fällen die gleiche: Man bilde die Funktion

$$F^*(y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r; y_1', y_2', \ldots, y_n', x) = F + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha g_\alpha. \tag{A.38}$$

Die gesuchten Funktionen $y_i(x)$ und die LAGRANGE Multiplikatoren $\lambda_\alpha(x)$ sind die Lösungen der EULERschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} - \frac{\partial F^*}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_\alpha'} - \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_\alpha} = 0. \tag{A.39}$$

Daher kann man das Variationsproblem (A.36) und (A.37) auch schreiben als

$$\delta \int_{x_a}^{x_b} dx\, F^*(y_1(x), \ldots, y_n(x); \lambda_1(x), \ldots, \lambda_r(x); y_1'(x), \ldots, y_n'(x);$$
$$\lambda_1'(x), \ldots, \lambda_r'(x); x) = 0. \quad \text{(A.40)}$$

Die strenge mathematische Behandlung der Variationsrechnung ist ungleich schwieriger als die der gewöhnlichen Maximum-Minimum-Rechnung. Insbesondere ist die Existenz von stationären Werten der Integrale (dieser Begriff ist allgemeiner und zutreffender als der des Extremums) nicht immer gesichert. Auch der Beweis der Methode der LAGRANGE Multiplikatoren ist sehr kompliziert. Auf diese Schwierigkeiten kann hier nicht eingegangen werden.

A.4 Tensoren

Die Tensoren des dreidimensionalen Raumes werden durch ihr Verhalten unter orthogonalen Transformationen definiert.

A.4.1 Orthogonale Transformationen

Wir bezeichnen, wie üblich, den Ortsvektor $\mathbf{r}$ durch seine Komponenten x_i:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad \text{(A.41)}$$

Bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Komponenten von $\mathbf{r}$ gemäß

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k, \quad \text{(A.42)}$$

wobei die x_i' die Komponenten desselben Ortsvektors $\mathbf{r}$ im gedrehten Koordinatensystem sind:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \mathbf{e}_i'. \quad \text{(A.43)}$$

Wir haben also zwei relativ zueinander verdrehte Koordinatensysteme und den Ortsvektor $\mathbf{r}$. Man kann aber auch eine alternative Vorstellung entwickeln: In einem gegebenen Koordinatensystem wird der Vektor $\mathbf{r}$ gedreht und der gedrehte Vektor ist $\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \mathbf{e}_i'$. Im ersten Fall stellt $\mathbf{r}$ vielleicht eine physikalische Größe dar und ein Beobachter beschreibt sie unter Verwendung der Zahlen x_i in dem von ihm gewählten Koordinatensystem und ein anderer Beobachter durch die Zahlen x'_i in seinem Koordinatensystem.

Wir wollen nun Aussagen über die Größen α_{ik} machen. Wir benutzen dazu die Tatsache, daß die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}'_i$ üblicher Weise orthogonal gewählt werden. Wir erhalten dann:

$$r^2 = \mathbf{r}^T\mathbf{r} = \begin{cases} \sum\limits_n x_n^2 & \\ \sum\limits_n x_n'^2 & \overset{\text{(A.42)}}{=} \quad \sum\limits_{m,n} \left(\sum\limits_i \alpha_{im}\alpha_{in} \right) x_m x_n. \end{cases} \tag{A.44}$$

Hier ist $\mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ der zu $\mathbf{r}$ gehörende transponierte Vektor (Zeilenvektor). Die beiden Ausdrücke sind aber gleich, da r^2 eine Invariante (also eine vom Bezugssystem unabhängige Größe) ist. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{in} = \delta_{mn}. \tag{A.45}$$

Wählen wir nun (A.42) als Ausgangspunkt, so erhalten wir

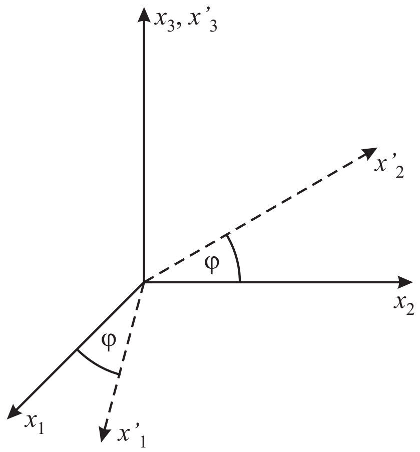
$$\sum_i \alpha_{in} x'_i = \sum_i \alpha_{in} \sum_k \alpha_{ik} x_k = \sum_k \delta_{nk} x_k = x_n,$$

und wir haben die zu (A.42) gehörende Rücktransformation aufgefunden. Wir benützen nun (A.41) und (A.43)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i &= \sum_{i=1}^{3} x'_i \mathbf{e}'_i \\ \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_j &= \sum_{i=1}^{3} x'_i \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = x'_j, \end{aligned} \tag{A.46}$$

und finden durch Vergleich mit (A.42)

$$\alpha_{ik} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k. \tag{A.47}$$



Wir betrachten nun eine Drehung um die x_3-Achse. Es folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi \\
\mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi \\
\mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

und daraus folgen die Größen α_{ik}, welche wir zu einer Matrix $\tilde{\alpha}$ zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= (\alpha_{ik}) = (\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit können wir die Transformationen (A.42) und (A.46) kompakt in Matrixnotation anschreiben:

$$\mathbf{r}' = \tilde{\alpha}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'^T = \mathbf{r}^T \tilde{\alpha}^T, \qquad \mathbf{r} = \tilde{\alpha}^T \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}^T = \mathbf{r}'^T \tilde{\alpha},$$

mit $\tilde{\alpha}^T$ der zu $\tilde{\alpha}$ transponierten Matrix. Aus der Invarianz des Skalarproduktes folgt schließlich:

$$\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' = \mathbf{r}^T \tilde{\alpha}^T \tilde{\alpha} \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\alpha}^T \tilde{\alpha} = \boldsymbol{E}, \quad \tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}^T.$$

$\boldsymbol{E}$ ist die Einheitsmatrix.

A.4.2 Tensordefintion

Definition A.4

1. *Eine Größe, welche sich unter orthogonalen Transformationen nicht verändert heißt* Skalar *oder* Tensor nullter Stufe. *Ein Beispiel hiefür war das Skalarprodukt eines Vektors.*

2. *Eine Größe V_i mit einem Index, welche wie die Komponente eines Ortsvektors x_i transformiert*

$$V'_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} V_k, \qquad V_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} V'_i \tag{A.48}$$

heißt ein Tensor erster Stufe.

3. *Eine N-fach indizierte Größe heißt* Tensor N-ter Stufe, *wenn sie komponentenweise wie die Komponenten des Ortsvektors x_i transformiert, also*

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \sum_{m_1=1}^{3} \cdots \sum_{m_N=1}^{3} \alpha_{i_1 m_1} \cdots \alpha_{i_N m_N} T_{m_1 m_2 \ldots m_N} \tag{A.49}$$

mit der zu (A.48) *analogen Umkehrtransformation.*

Für Tensoren der ersten und zweiten Stufe können die Transformationen auch in Matrixform angeschrieben werden:

$$\mathbf{V}' = \tilde{\alpha}\mathbf{V}, \qquad \mathbf{V} = \tilde{\alpha}^T \mathbf{V}', \tag{A.50}$$

$$\boldsymbol{T}' = \tilde{\alpha}\boldsymbol{T}\tilde{\alpha}^T, \qquad \boldsymbol{T} = \tilde{\alpha}^T \boldsymbol{T}'\tilde{\alpha}, \tag{A.51}$$

mit $\mathbf{V} = (V_i)$, einem Spaltenvektor und $\boldsymbol{T} = (T_{ik})$ einer 3×3 Matrix. Für Tensoren höherer Stufe ist diese Matrixschreibweise nicht möglich.

Unter Tensoren sind folgende algebraische Operationen möglich:

1. Addition und Subtraktion von Tensoren gleicher Stufe. Das Ergebnis

$$\beta A_{i_1 \ldots i_N} + \gamma B_{i_1 \ldots i_N} = C_{i_1 \ldots i_N}$$

ist wieder ein Tensor gleicher Stufe.

2. Die Multiplikation eines Tensors der Stufe M mit einem Tensor der Stufe N

$$A_{i_1 \ldots i_N} B_{j_1 \ldots j_M} = C_{i_1 \ldots i_{N+M}}$$

ist ein Tensor der Stufe $M + N$.

3. Die Operation der *Kontraktion* eines Tensors der Stufe N

$$\sum_{i=1}^{3} A_{i_1 \ldots i_k \ldots i_k \ldots i_N} = C_{i_1 \ldots i_{N-2}}$$

ist ein Tensor der Stufe $N - 2$.

Wir haben in Gleichung (5.18) den Trägheitstensor

$$I_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu^2 \delta_{ik} - x_i^{(\nu)} x_k^{(\nu)} \right)$$

eingeführt. Wir zeigen nun formal, daß dies ein Tensor zweiter Stufe ist: Die Massen m_ν sind Skalare. Die Ortsvektoren $\left(x_i^{(\nu)}\right)$ der einzelnen Massenpunkte sind Tensoren erster Stufe. Das Produkt $m_\nu x_i^{(\nu)} x_k^{(\nu)}$ zweier Tensore erster

Stufe und eines Skalars ist ein Tensor zweiter Stufe. Das Kronekersymbol δ_{ik} ist zunächst durch eine einfache Zahlenzuweisung definiert und es ist daher unabhängig vom Koordinatensystem, also $\delta'_{ik} = \delta_{ik}$. Wir können aber auch (A.49) verwenden:

$$\delta'_{ik} = \sum_{n,l=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{kl}\delta_{nl} = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{in}\alpha_{kn} \overset{(A.45)}{=} \delta_{ik}.$$

Damit ist das Kronekersymbol auch ein Tensor zweiter Stufe und damit ist der Trägheitstensor selbst ein Tensor zweiter Stufe.