Anhang B

Spezielle Relativitätstheorie und Relativistische Mechanik

B.1 Einführung

Die spezielle Relativitätstheorie beruht auf zwei Grundannahmen (= Prinzipien), dem

1. *Relativitätsprinzip*, und dem
2. *Prinzip von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit*.

Beide Annahmen werden durch experimentelle Befunde nahegelegt, doch geht auch eine gewisse philosophische Grundeinstellung darin ein.[1]

B.1.1 Das Relativitätsprinzip

Wiederholung der Definition eines *Inertialsystems* 2.3: In einem solchen System gehorcht ein Massenpunkt dem Axiom 2.1, also bleibt ein Massenpunkt im Zustand Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt. Ein solches System ist realisiert in einem Bezugssystem, das sich relativ zum Fixsternhimmel in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindet.

Das EINSTEIN*sche Relativitätsprinzip* besagt hingegen, daß alle physikalischen Vorgänge in allen Inertialsystemen bei sonst gleichen Bedingungen gleich ablaufen. Es ist durch kein Experiment möglich, eine absolute Geschwindigkeit eines Systems festzustellen. Daher muß auch die mathemati-

[1]Eine umfangreiche Darstellung der speziellen Relativitätstheorie kann im gleichnamigen Vorlesungsskriptum von E. SCHACHINGER gefunden werden, welches von http://www.itp.tu-graz.ac.at/lectures.html heruntergeladen werden kann.

sche Beschreibung aller physikalischen Vorgänge in allen Inertialsystemen gleichartig sein (*Kovarianz*).

Ein Spezialfall dieses EINSTEINschen Relativitätsprinzips ist das GALILEI*sche Relativitätsprinzip*, das nur für die klassische Mechanik (Mechanik für Teilchengeschwindigkeiten $\ll c$) gilt, und welches bereits im Abschnitt 2.9.1 behandelt wurde. Man kann es wie folgt formulieren:

> *Man kann aufgrund mechanischer Experimente keine Aussagen über den Bewegungszustand eines gleichförmig bewegten Systems, in dem man sich befindet, machen.*

B.1.2 Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c

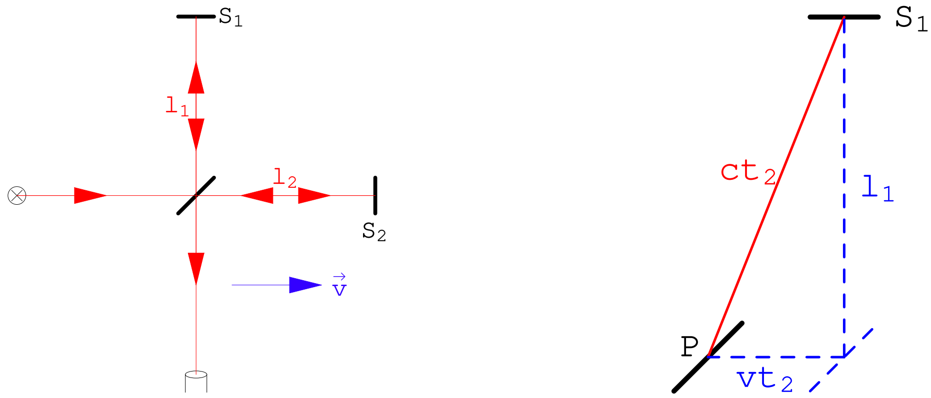
Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat den konstanten Wert

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \,\mathrm{m/s}.$$

Gemäß diesem Prinzip ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit c sowohl vom Bewegungszustand des Beobachters als auch von dem der Lichtquelle völlig unabhängig (bei alleiniger Betrachtung von Inertialsystemen). In jedem Inertialsystem findet man, z.B. für die Ausbreitung der Wellenfront eines Lichtblitzes den Wert c, selbst wenn die Quelle relativ zu diesem System in gleichförmiger Bewegung ist. Bei der Schaffung der Elektrodynamik zu Ende des vergangenen Jahrhunderts hielt man für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen ein Medium (den sogenannten Äther) für nötig analog zur Ausbreitung der Schallwellen in Luft, oder einen anderen elastisch deformierbaren Körper.

Außerdem glaubte man (irrigerweise), daß das Relativitätsprinzip notwendigerweise die GALILEI-Transformation (2.100) nach sich zieht. Daraus schloß man (irrigerweise), daß die Elektrodynamik das Relativitätsprinzip nicht erfüllt und daß es ein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt, das im "Äther" ruht. Man versuchte nun einen "Ätherwind" festzustellen, der dadurch entstehen sollte, daß sich die Erde bei ihrer Revolution um die Sonne relativ zum Äther bewegt.

Die Messung der Schallgeschwindigkeit kann im Prinzip auf einer Meßstrecke erfolgen mit einer Nachrichtenübermittlung mittels elektrischer oder optischer Signale (deren Geschwindigkeit c groß gegenüber der zu messenden Schallgeschwindigkeit ist) vom Anfang zum Ende der Strecke (Messung der "Einweggeschwindigkeit"). Ein derartiges Vorgehen ist bei der Messung der Vakuumlichtgeschwindigkeit c nicht möglich, da man keine Art von Signalen kennt, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit groß gegen c ist. Man ist daher gezwungen, das Lichtsignal, dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit gemessen



(a) (b)

Abbildung B.1: a) Der Michelsonversuch. b) Lichtweg bei Reflexion an S_1.

werden soll, am Ende der Messtrecke zu reflektieren und kann daher nur die Laufzeit für Hin- und Rückweg messen ("Zweiweggeschwindigkeit"). Das wichtigste der diesbezüglichen Experimente war der MICHELSON-*Versuch*: (Im Äther ist die Lichtgeschwindigkeit gemäß der damaligen Ansicht $= c$, für andere Systeme muß man gemäß (2.100) umrechnen, (Abb. B.1a). Der gesamte Meßapparat bewegt sich relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Ein Beobachter im mitbewegten System S' stellt folgende Laufzeit t_1 für den Weg $\mathrm{PS_2P}$ fest (P = Position des halbdurchlässigen Spiegels, siehe Abb. B.1b):

$$t_1 = \frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v}$$

Ebenso ergibt sich im mitbewegten System aus

$$\begin{aligned} c^2 t_2^2 &= v^2 t_2^2 + l_1^2, \\ t_2^2(c^2 - v^2) &= l_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{aligned}$$

folgende Zeit t_3 für den Lauf $\mathrm{PS_1P}$ (Abb. B.1b):

$$t_3 = 2\frac{l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Aus den beiden Laufzeiten

$$\begin{aligned} t_1 &= (c + v + c - v)\frac{l_2}{c^2 - v^2} = 2\frac{l_2 c}{c^2 - v^2} = 2\frac{l_2/c}{1 - \beta^2} \\ t_3 &= 2\frac{l_1/c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{aligned}$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{B.1}$$

ergibt sich folgender Zeit- und damit auch Phasenunterschied im Beobachtungsfernrohr:

$$\Delta t = t_3 - t_1 = \frac{2}{c}\left[\frac{l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{l_2}{1 - \beta^2}\right].$$

Ist der Apparat um 90° verdreht, ergeben sich folgende Änderungen und folgender Laufzeit- und Phasenunterschied:

$$l_1 \quad \rightarrow \quad l_2, \qquad t_1 \quad \rightarrow \quad t_1' = t_3, \qquad t_3 \quad \rightarrow \quad t_3' = t_1,$$

$$\Delta t' = t_3' - t_1' = \frac{2}{c}\left[\frac{l_1}{1 - \beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right].$$

Wird nun das Interferometer während des Beobachtungsvorganges gedreht, sollte dadurch folgender Laufzeit- und damit auch Phasenunterschied resultieren:

$$\begin{aligned} \tau &= \Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}\left[\frac{l_1}{1 - \beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{l_2}{1 - \beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right] \\ \tau &= 2\frac{l_1 + l_2}{c}\left[\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right]. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Der unerwartete Nulleffekt konnte nur durch eine zusätzliche Hypothese (Fizgerald, Lorentz) erklärt werden: Bei Bewegung relativ zum Äther verkürzen sich Längen in der Bewegungsrichtung um den Faktor $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; Längen in den transversalen Richtungen bleiben unverändert. Dann erhält man in den obigen Gleichungen für

$$l_1 = l_2: \quad \Delta t = \Delta t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.$$

Damit sind aber noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt; um den negativen Ausgang weiterer Experimente deuten zu können, waren noch zusätzliche Hypothesen über die Zeitdilatation und die Veränderung der Kräfte bei Bewegung relativ zum Äther erforderlich. Der Äther wird damit unbeobachtbar. Einstein vereinfachte 1905 die Situation in radikaler und revolutionärer Weise, indem er den Äther für die Lichtausbreitung für unnötig erklärte und die Gültigkeit des *Relativitätsprinzips für alle physikalischen Vorgänge* forderte. Weiters postulierte er, daß die Vakuumlichtgeschwindigkeit in *allen* Inertialsystemen den Wert c hat. Er analysierte den Begriff der Gleichzeitigkeit und zeigte, daß jedes Inertialsystem seine *eigene* Zeit hat und daß Zeitangaben von einem System ins andere mittels der Lorentz-*Transformation* durchgeführt werden müssen.

B.2 Die LORENTZtransformationen

System S: Koordinaten x_i, $(i = 1, 2, 3)$, Zeit t;
System S': Koordinaten x_i', $(i = 1, 2, 3)$, Zeit t'.
Zur Vereinfachung der Berechnung seien die beiden Koordinatensysteme parallel und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Ursprungs von S' liege in der x_1-Achse von S:

$$v_i = v\delta_{1i}. \tag{B.3}$$

Zur Zeit $t = t' = 0$ sollen die Ursprünge $x_i = x_i' = 0$ zusammenfallen und zu dieser Zeit werde ein Lichtblitz vom Ursprung ausgesandt. Zur in S gemessenen Zeit t ist die Wellenfront in $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i x_i} = \sqrt{x_i x_i} = c\,t$ angekommen. (Hier wurde die sogenannte EINSTEIN*sche Summenkonvention* eingeführt: Über zweifach auftretende Indizes wird summiert, in diesem Fall also über den Index i.) Es gilt dann:

$$c^2t^2 - x_i x_i = 0. \tag{B.4}$$

Diese Gleichung muß invarianten Charakter haben, daher gilt in S' $(c' = c)$:

$$c^2t'^2 - x_i' x_i' = 0. \tag{B.5}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nun $x_0 = c\,t$ und $x_0' = c\,t'$ gesetzt. Man fordert weiters das Bestehen der linearen Transformation:

$$x_\alpha' = \sum_{\alpha=0}^{3} a_{\alpha\beta} x_\beta. \tag{B.6}$$

zwischen S und S'. Für das Bestehen einer solchen linearen Transformation sprechen folgende Tatsachen:

1. Die Homogenität und Isotropie des freien Raumes.
2. Die Bewegung eines kräftefreien Teilchens relativ zu einem Inertialsystem wird durch eine lineare Gleichung in den x_i beschrieben. Dies muß für jedes Inertialsystem gelten. Die obige Transformation aus einem Inertialsystem in ein anderes muß daher eine lineare Gleichung wieder affin in eine solche transformieren.

Bei unserer Wahl der Bewegungsrichtung gilt:

$$x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \tag{B.7}$$

d.h.: wir können von den Koordinaten x_2 und x_3 völlig absehen und die weiteren Überlegungen in der (x_0, x_1)-Ebene durchführen:

$$x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1, \tag{B.8}$$
$$x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1. \tag{B.9}$$

Setzt man diese Gln. in die sich aus Gln. (B.4) und (B.5) ergebende Bedingung ein, so folgt:

$$\begin{aligned} x_0'^2 - x_1'^2 &\equiv x_0^2 - x_1^2, \\ (a_{00}^2 - a_{10}^2)x_0^2 + 2(a_{10}a_{11} - a_{00}a_{01})x_0x_1 + (a_{01}^2 - a_{11}^2)x_1^2 &\equiv x_0^2 - x_1^2, \\ \Rightarrow \quad a_{00}^2 - a_{10}^2 = 1, \quad a_{10}a_{11} - a_{00}a_{01} = 0, \quad a_{01}^2 - a_{11}^2 &= -1. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung der letzten Zeile wird durch den nachfolgenden Ansatz befriedigt:

$$a_{00} = \cosh u, \quad a_{10} = \sinh u;$$

aus der zweiten folgt:

$$\begin{aligned} a_{10}/a_{00} &= a_{01}/a_{11} = \tanh u, \\ a_{01} &= \rho \sinh u, \quad a_{11} = \rho \cosh u, \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich wegen der dritten:

$$\rho^2 = 1, \quad \rho = \pm 1.$$

Es wird $\rho = 1$ gewählt. (Für $\rho = -1$ erhielte man aus (B.8) und (B.9) eine Transformationsgleichung, bei der entweder die Zeit umgekehrt und/oder das Rechtssystem im Raum in ein Linkssystem transformiert werden würde.) Es ist also:

$$x_0' = x_0 \cosh u + x_1 \sinh u, \tag{B.10}$$

$$x_1' = x_0 \sinh u + x_1 \cosh u. \tag{B.11}$$

Der Ursprung von S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S [Gl. (B.3)]:

$$\beta = v/c, \quad x_1' = 0, \quad x_1 = \beta x_0. \tag{B.12}$$

Damit folgt aus obigen Transformationsgleichungen:

$$0 = x_0 \sinh u + x_0 \beta \cosh u, \quad \tanh u = -\beta < 1,$$

und durch Umrechnung:

$$\begin{aligned} \cosh u &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \\ \sinh u &= \frac{\tanh u}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}} = -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\beta\gamma. \end{aligned}$$

Damit haben wir die LORENTZ-*Transformation* für eine Bewegung längs der x_1-Achse mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ abgeleitet:

$$\begin{aligned}
x_0' &= \gamma x_0 - \beta\gamma x_1, & ct' &= \tfrac{ct - v/c x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \text{(a)} \\
x_1' &= -\beta\gamma x_0 + \gamma x_1, & x_1' &= \tfrac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \text{(b)} \\
x_2' &= x_2, & x_2' &= x_2, & \text{(c)} \\
x_3' &= x_3, & x_3' &= x_3. & \text{(d)}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Die inversen Transformationen erhält man durch Auflösung des obigen Gleichungssystems, einfacher noch durch Anwendung des Relativitätsprinzips (Wechsel des Systems ist gleichbedeutend mit Umkehr der Geschwindigkeit):

$$\beta \quad\to\quad -\beta, \quad x_i' \;\to\; x_i, \quad x_i \quad\to\quad x_i';$$

$$ct = \frac{c\,t' + \beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{B.14a}$$

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{B.14b}$$

$$x_2 = x_2', \tag{B.14c}$$

$$x_3 = x_3'. \tag{B.14d}$$

Diese LORENTZ-Transformationen bilden eine Gruppe. Alle physikalischen Größen transformieren sich gemäß diesen Transformationsgleichungen.

Das augenscheinlichste Ergebnis dieser neuen Transformationsgleichungen ist, daß die *Zeit keine Invariante* mehr ist. Als Grenzfall für $v \ll c$ und $\beta \ll 1$ enthalten obige Gleichungen die GALILEI-Transformationen, Gln. (2.100).

B.3 Folgerungen aus den LORENTZ-Transformationen und deren experimentelle Überprüfung

Für einen Beobachter $\mathcal{B}$ in S ist S das "Ruhesystem" und S' das "bewegte System"; für einen Beobachter $\mathcal{B}'$ in S' verhält es sich gerade umgekehrt. Wir nehmen von den obigen LORENTZ-Transformationen nur die Gleichung für die zur Systembewegung parallele Komponente und die Zeit:

$$\beta = \frac{v}{c} < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1,$$

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt), \quad \text{(a)} \qquad x_1 = \gamma(x_1' + vt'), \quad \text{(b)} \qquad \text{(B.15)}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right), \quad \text{(a)} \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x_1'\right). \quad \text{(b)} \qquad \text{(B.16)}$$

B.3.1 Relativierung des Begriffes der Gleichzeitigkeit

In jedem System werden alle Uhren untereinander synchronisiert. Z.B. wird zur Zeit $t = t' = 0$ vom Ursprung $x_i = x_i' = 0$ ein Lichtblitz ausgesendet. In jedem System befindet sich bei jeder Uhr ein Spiegel, der den Lichtblitz zum Ursprung reflektiert. Die Hälfte der ganzen Laufzeit ist dann die Zeit, die die Uhr in dem Moment anzeigen muß, als bei ihr der Lichtblitz eingetroffen ist.

$\mathcal{B}'$ stellt fest, daß zwei Ereignisse an verschiedenen Orten seines Systems gleichzeitig eingetreten sind:

$$\begin{aligned}(x_1', t')_1 &= (0, 0),\\ (x_1', t')_2 &= (a', 0).\end{aligned}$$

Z.B. sind die Ereignisse das Aufblitzen von Lichtern und diese Lichtblitze treffen bei dem in $x_1' = a'/2$ befindlichen Beobachter $\mathcal{B}'$ gleichzeitig ein. Gemäß Gln. (B.15b) und (B.16b) gilt dann für den Beobachter $\mathcal{B}$ in S:

$$\begin{aligned}(x_1, t)_1 &= (0, 0),\\ (x_1, t)_2 &= \left(a'\gamma, \gamma\frac{v}{c^2}\right).\end{aligned}$$

Dem Beobachter $\mathcal{B}$ erscheinen die beiden Ereignisse also nicht gleichzeitig. Wenn, umgekehrt, $\mathcal{B}$ zwei Ereignisse an verschiedenen Orten gleichzeitig erscheinen, so sind diese für $\mathcal{B}'$ nicht gleichzeitig. *Gleichzeitigkeit* ist also ein Begriff, der jeweils nur in *einem* System Sinn hat, und ist somit keine Invariante der Transformationsgruppe.

B.3.2 Zeitdilatation

Wir betrachten zwei Ereignisse, die im Ursprung von S' ($x_i' = 0$) zu den Zeiten $t' = 0$ und $t' = \Delta t$ stattfinden (etwa Ablesen einer Uhr, die sich im Ursprung befindet). $\mathcal{B}'$ mißt:

$$\begin{aligned}(x_1', t')_1 &= (0, 0),\\ (x_1', t')_2 &= (0, \Delta t').\end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ in S hingegen mißt für die beiden Ereignisse:

$$\begin{aligned}(x_1, t)_1 &= (0, 0),\\ (x_1, t)_2 &= (\gamma v\Delta t', \gamma\Delta t').\end{aligned}$$

Daß $\mathcal{B}$ für die beiden Ereignisse verschiedene Ortskoordinaten mißt, ist aufgrund des Bewegungszustandes von S leicht einsichtig. Daß $\mathcal{B}$ jedoch für den Zeitunterschied die von $\Delta t'$ verschiedene Zeitspanne $\gamma\Delta t'$ mißt, ist ein vom klassischen Standpunkt abweichendes Resultat. Da $\gamma \geq 1$ ist, ist $\Delta t \geq \Delta t'$. Man sagt daher auch: "Bewegte Uhren gehen langsamer". Genau dasselbe stellt $\mathcal{B}'$ für eine in S ruhende Uhr fest; sie ist für $\mathcal{B}'$ eine bewegte Uhr und scheint ihm langsamer zu gehen. Wir schreiben dies in der folgenden Form, weisen aber darauf hin, daß diese Beziehung mit grosser Vorsicht anzuwenden ist; eigentlich sollte man für Zeitumrechnungen immer Gleichung wie in den LORENTZ-Transformationen benutzen.

$$\Delta t_{ruh.} = \gamma\, \Delta t_{bew.} \tag{B.17}$$

Operationelle Beobachtung der Zeitdilatation

Beobachter $\mathcal{B}$ hat in seinem System längs der x_1-Achse an allen Orten Uhren aufgestellt und synchronisiert (in seinem System ist ja der Begriff der Gleichzeitigkeit sinnvoll). Die Uhren des Systems S' (dort ruhend) fliegen an denen des Systems S vorbei und werden mit den jeweils gegenüberliegenden Uhren von S verglichen. Dies ergibt zu den Zeitpunkten $t = 0$ bzw. $t = \Delta t$, die in Abb. B.2 dargestellte Situation. Für einen Uhrenvergleich zum Nachweis der Zeitdilatation benötigt man mindestens 3 Uhren (z.B. in S' in $x_1' = 0$; in S in $x_1 = 0$ und $x_1 = \ell$).

Experimenteller Nachweis der Zeitdilatation an Myonen

Myonen entstehen beim radioaktiven Zerfall des Pions (π-Mesons). Das Myon könnte als ein schweres Elektron bezeichnet werden ($m_\mu = 206\, m_e$, $m_\mu c^2 = 106$ MeV, mit m_e der Elektronenmasse.); es hat einen radioaktiven Zerfall mit einer Lebensdauer von $2.2\,\mu$s:

$$\mu^- \quad \longrightarrow \quad e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \ : \qquad N_\mu = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \tag{B.18}$$

(μ^- symbolisiert ein negativ geladenes Myon, e^- ein Elektron, $\bar{\nu}_e$ ein Antineutrino und ν_μ ein μ-Neutrino.) Das Pion wird mittels einer Kernreaktion erzeugt:

$$\begin{aligned} p + \mathrm{Kern}_1 \quad &\longrightarrow \quad \pi^\pm + p + \mathrm{Kern}_2; \\ \pi^- \quad &\longrightarrow \quad \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{(radioaktiver Zerfall).} \end{aligned}$$

(p symbolisiert hier ein Proton.) Myonen werden von einfallenden Teilchen der kosmischen Höhenstrahlung über die obige Pionenreaktion erzeugt und fliegen mit annähernd Lichtgeschwindigkeit weiter und können daher in $\tau_0 =$

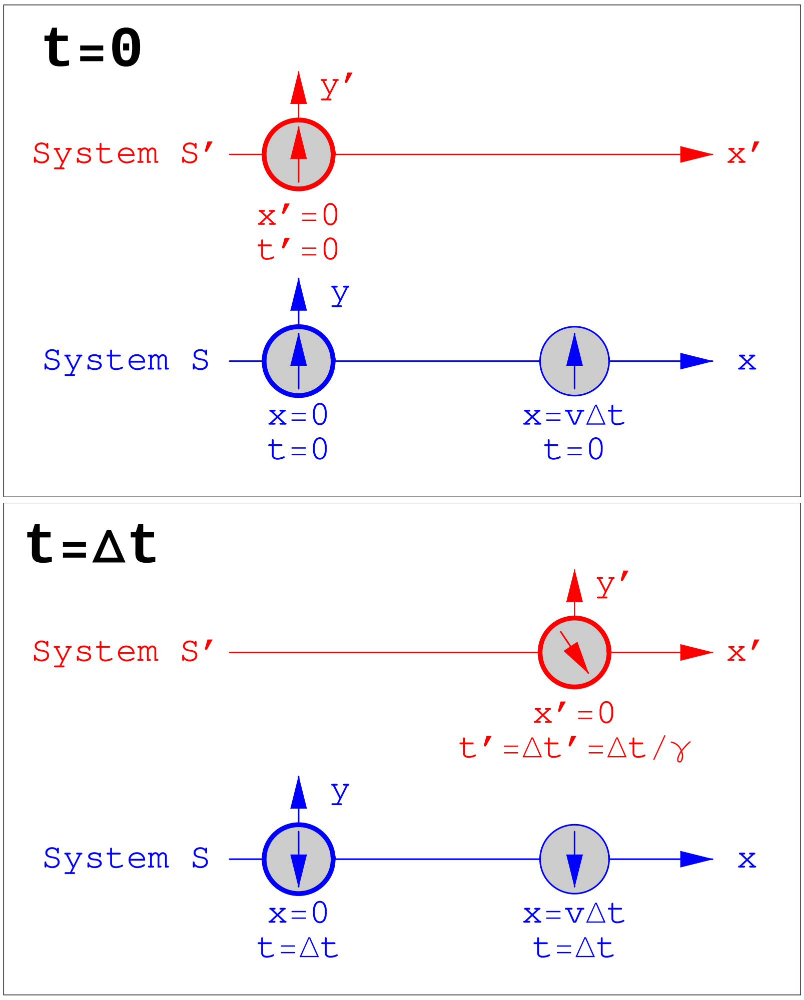


Abbildung B.2: Zeitanzeigen der Uhren in verschiedenen bewegten Systemen

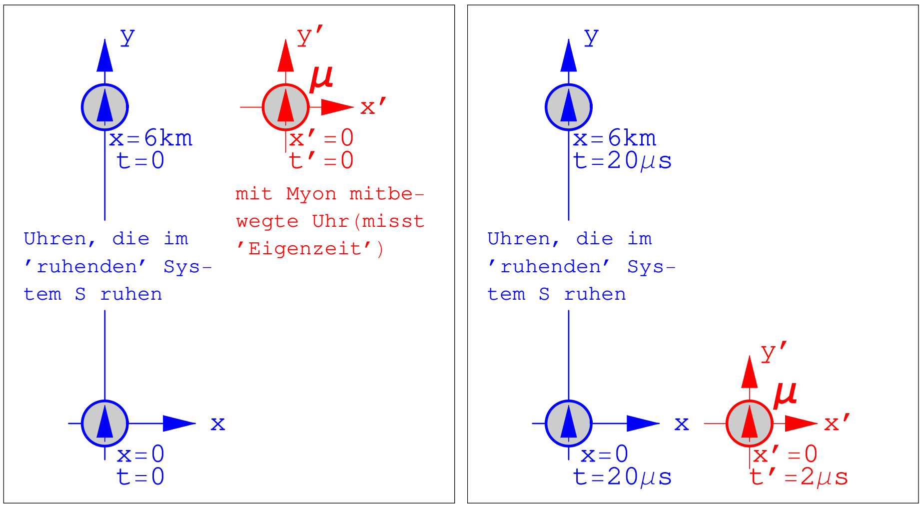


Abbildung B.3: Myonen in der Atmosphäre

2.2 μs höchstens eine Strecke von 660 m zurücklegen. Man kann die Myonen aber noch in Meereshöhe, also nach einem Flugweg von 6 - 10 km, nachweisen. Die aus der LORENTZ-Transformation folgende Zeitdilatation erklärt diese Erscheinung.

Wenn ein Myon mit $\beta = 0.995$, d.h. $\gamma \approx 10$, fliegt, dann mißt man von der Erde aus anstelle von $\tau_0' = 2.2\,\mu$s die längere mittlere Lebensdauer von $\tau_0 = \gamma\tau_0' = 22\,\mu$s. Diese Zeit reicht aus, um eine Strecke von 6 km zurückzulegen. Dieser Effekt wurde bei Beobachtungen genau untersucht. Wegen des statistischen Charakters des Zerfallsgesetzes ist dieses Experiment nicht so einfach durchzuführen, wie in Abb. B.3 schematisiert dargestellt wurde. Es wurden die Myonenzahlen in verschiedenen Höhen registriert und daraus die Lebensdauer deduziert.[2]

Zwillingsparadoxon, Uhrenparadoxon

Zwei Uhren, eine fliegt im Raumschiff mit, die andere bleibt auf der Erde. (Von der Wirkung des Gravitationsfeldes auf die Uhr, die im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie behandelt werden kann, wird abgesehen.) Das Raumschiff beschleunigt bis nahe an c und fliegt gleichförmig bis zu einem die Strecke $c\,T_L = d_{\text{Erde}}$ entfernten Himmelskörper, kehrt dort um und fliegt gleichförmig wieder zurück. Ein Beobachter, der am Startpunkt der Rakete in Ruhe zurückbleibt, mißt folgende Flugzeit:

$$T_{\text{Erde}} = \frac{T_L c}{v} + \cdots = \frac{T_L}{\beta} + \cdots \quad \text{(Effekte der Beschleunigung)}$$

[2] siehe J. H. SMITH, *Theory of Relativity* (Benjamin 1965), §3.5).

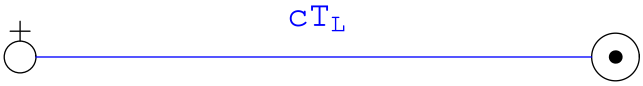


Abbildung B.4: Flug eines Raumschiffs von der Erde zur Sonne

bis zum Eintreffen des Raumschiffes am Zielpunkt. Ein Beobachter im fliegenden Raumschiff liest von seiner Uhr die Zeit (= Eigenzeit)

$$T_0 = \frac{T_{\text{Erde}}}{\gamma} = \frac{T_L}{\gamma\beta}$$

ab. Da $\gamma \geq 1$ ist, scheint für ihn die Zeit langsamer vergangen zu sein. Wenn der Raumfahrer zurückkehrt, wird er weniger gealtert sein, als sein auf der Erde zurückgebliebener Zwillingsbruder (von Wirkungen des Gravitationsfeldes abgesehen). Ein Beispiel:

$$\text{Erde} \quad \longrightarrow \quad \alpha\text{-Centauri}: \quad T_L = 4.5 \text{ Jahre.}$$

Annahme: $\beta = 0.9 \rightarrow \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/0.435$

$$T_0 = \frac{T_L}{\gamma\beta} = 0.435 \cdot 1.11 \cdot T_L = 0.485\, T_L.$$

Im System des Raumfahrers zeigt die Uhr also nur etwa halb so viel Zeit, wie das Licht zur Bewältigung dieser Strecke braucht.

$$T_{\text{Erde}} = \frac{T_L}{\beta} = 1.11\, T_L.$$

Für den auf der Erde verbliebenen Zwillingsbruder vergeht also währenddessen die 1.11-fache Zeit, die das Licht braucht, um von α-Centauri zur Erde zu gelangen.

Die Anwendung der Speziellen Relativitätstheorie ist in diesem Falle eigentlich nicht gerechtfertigt, da Beschleunigungen auftreten. Die Behandlung obigen Vorganges nach der Allgemeinen Relativitätstheorie führt jedoch zum selben Ergebnis.[3]

Das g-2-Experiment am Myonspeicherring bei CERN

Die Zeitdilatation kann auch beim g-2 Experiment im Myonenspeicherring beobachtet werden. Das Myon hat ein magnetisches Moment $\propto g$; dieses

[3] siehe M. Born *Die Relativitätstheorie Einsteins* (Heidelberger Taschenbuch).

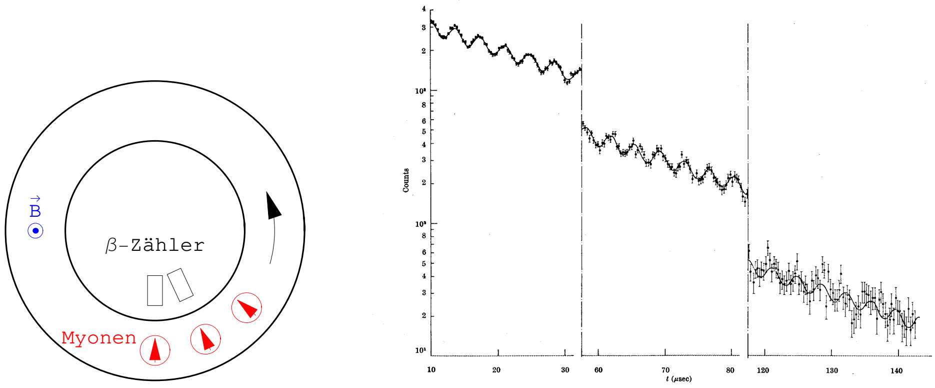


Abbildung B.5: a) Der Myon-Speicherring. b) Zählrate der Elektronen bzw. Positronen

präzediert im Magnetfeld des Speicherringes (siehe Abb. B.5a). Die Präzessionsgeschwindigkeit gestattet es, die Größe von g und damit des magnetischen Moments zu bestimmen. Die Präzession kann beobachtet werden, weil die Emission der Elektronen bzw. Positronen e^+ beim Zerfall des Myons

$$\mu^- \quad \rightarrow \quad e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \qquad \mu^+ \quad \rightarrow \quad e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

eine Vorzugsrichtung in Richtung des magnetischen Momentes hat. Die emittierten Elektronen bzw. Positronen werden mit Zählern registriert. Aus der Abnahme der Zählrate kann die mittlere Lebensdauer der Myonen nach dem Zerfallsgesetz (B.18) bestimmt werden, aus der 'Modulation' der e-Potenz das gesuchte g-2 (siehe Abb. B.5b). Dieses Problem wäre streng genommen auch nicht nach der speziellen Relativitätstheorie lösbar. Wir setzen in der LORENTZ-Transformation v gleich der Tangentialgeschwindigkeit der umlaufenden Myonen. Für $\gamma = 12.1$ ergibt sich theoretisch eine vom Laborsystem (der Erde) aus gemessene Lebensdauer von $t_0 = \gamma\tau_0 = 12.1 \times 2.2\,\mu\text{s} = 26.72\,\mu\text{s}$. Gemessen wurde ein Wert von $26.15\,\mu\text{s}$. Eine kleine Diskrepanz aufgrund von Meßfehlern.

B.3.3 LORENTZ-Kontraktion

In S' ruht ein Stab der Länge ℓ'_0, d.h. ein Beobachter in S' beschreibt die Endpunkte des Stabes mit den Koordinaten:

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad x' = \ell'_0.$$

Ein Beobachter $\mathcal{B}$ in S mißt zur Zeit $t = 0$ für die beiden Endpunkte die Koordinaten

$$x_1 = \frac{x'_1}{\gamma} = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{\ell'_0}{\gamma}.$$

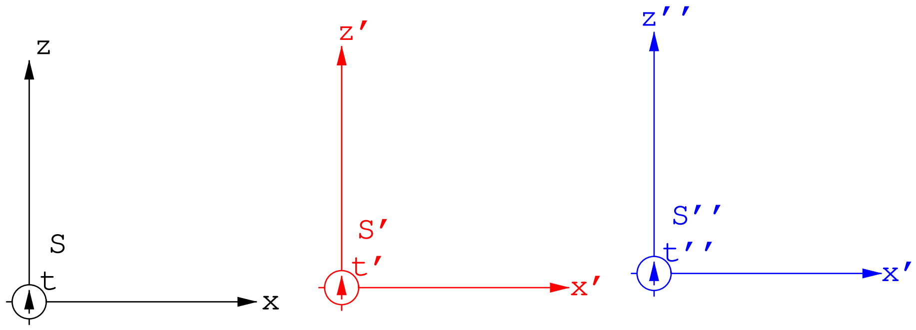


Abbildung B.6: Zum Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$\mathcal{B}$ sagt, der Maßstab habe eine Länge $\ell_0 = \ell_0'/\gamma$, sei also aufgrund der Bewegung verkürzt. Doch gibt es kaum eine Möglichkeit, diese LORENTZ-*Kontraktion*

$$\ell_0 = \frac{\ell_0'}{\gamma} = \ell_0'\sqrt{1-\beta^2} < \ell_0'. \tag{B.19}$$

experimentell zu beobachten.

Bei ausgedehnten Körpern muß man zusätzlich beachten, daß die von vom Beobachter weiter entfernten Punkten des Körpers ausgehenden Lichtstrahlen erst später eintreffen als die von näher gelegenen Teilen. Dadurch würde ein solcher Körper verzerrt bzw. verdreht erscheinen.

B.3.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Ein System S' bewege sich mit $v < c$ relativ zu S. Ein weiteres System S'' bewege sich mit $u < c$ relativ zu S'. Dann ist die Summe $u + v > c$. Da aber auch S'' die Grenzgeschwindigkeit c nicht überschreiten kann, kann die obige Addition der Geschwindigkeiten nicht richtig sein. Tatsächlich liegt ein Trugschluß vor; dieser wird nur vermieden, wenn man bei jedem Wert der Geschwindigkeit die Zeit des betreffenden Systems benutzt.

Beide Systeme, S' und S'', bewegen sich in x-Richtung:

- S' relativ zu S mit Geschwindigkeit v;
- S'' relativ zu S' mit Geschwindigkeit $u: \; x_1'' = 0, \quad x_1' = ut'$;
- S'' relativ zu S mit Geschwindigkeit $w = x_1/t$.

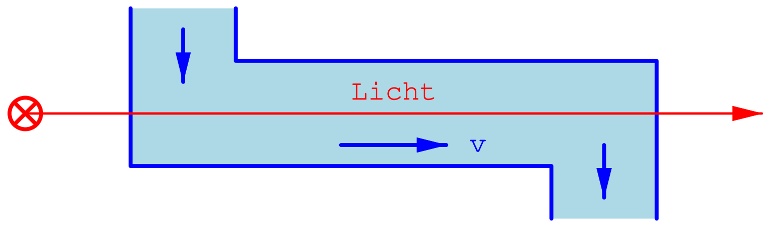
$$w = \frac{x_1}{t} = \frac{\gamma}{\gamma}\frac{x_1' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2}x_1'} = \frac{ut' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2}ut'} = \frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}}.$$

Damit lautet das Additionstheorem für die (gleichgerichteten) Geschwindigkeiten:

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}}. \tag{B.20}$$

Es gilt also nicht mehr das vektorielle Addieren von Geschwindigkeiten wie in der klassischen Mechanik. Auch folgt daraus, daß die resultierende Geschwindigkeit immer kleiner ist als c, wenn nur u und v kleiner als c sind. (Z.B.: $u = v = 0.9\,c \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1.80}{1.81}\,c \, < \, c$.)

Eine experimentelle Überprüfung des obigen Additionstheorems ergibt sich aus dem FIZEAU*schen Mitführungsversuch*:



Eine Flüssigkeit mit Brechungsindex n fließt mit Geschwindigkeit v. In der ruhenden Flüssigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit $u = c/n$. Die Lichtgeschwindigkeit im Labor (bei fließendem Wasser) beträgt:

$$w = \frac{u + \frac{c}{n}}{1 + \frac{vc}{c^2 n}} = \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc} + v \ \cdots\right) = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \cdots$$

in Übereinstimmung mit dem Experiment.

B.4 Verallgemeinerung der LORENTZ-Transformation

Bisher wurde angenommen, daß die relative Geschwindigkeit der beiden Systeme S und S' parallel zur x_1-Achse ist. Nun sei der Vektor der Geschwindigkeit von S' relativ zu S gleich $\mathbf{v}$. Um die Gesetzmäßigkeit anwenden zu können, die sich in den Formeln (B.13) zeigt, zerlegen wir den Vektor $\mathbf{r}$ in eine Komponente parallel zu $\mathbf{v}$ und in eine senkrecht zu $\mathbf{v}$. Die senkrechte Komponente bleibt unverändert. Für die Zeittransformation ist statt x_1 die Projektion von $\mathbf{r}$ auf $\mathbf{v}$ zu setzen.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{v^2} + \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{v^2}\right).$$

Eine gleiche Zerlegung wird auch für $\mathbf{r}'$ vorgenommen. Aus Gln. (B.13) folgt sinngemäß:

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp, \qquad \mathbf{r}'_\parallel = \gamma\left(\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{v}t\right).$$

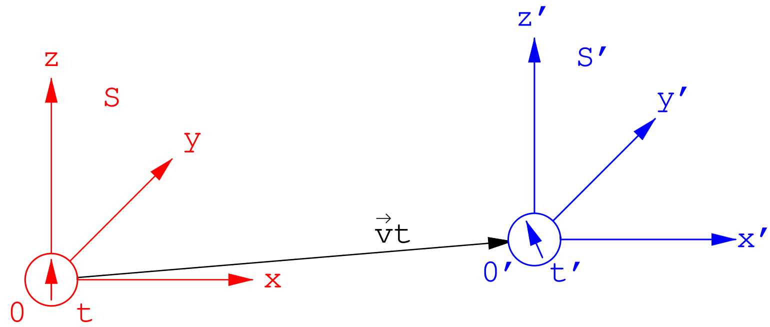


Abbildung B.7: Zur LORENTZ-Transformation bei einer Systemgeschwindigkeiten $\mathbf{v}$ in allgemeiner Richtung.

In diese Formel werden die obigen Zerlegungen für $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + \mathbf{r}'_\parallel &= \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{v^2}\right) + \gamma\left(\mathbf{r}'_\parallel - \mathbf{v}t\right) \\ &= \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{v^2}\right) + \gamma\left(\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{v^2} - \mathbf{v}t\right). \end{aligned}$$

Damit ist die LORENTZ-Transformation für die Bewegung von S relativ zu S' mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ gefunden:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\left[\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{v^2}(\gamma - 1) - \frac{1}{c}\gamma c t\right], \tag{B.21}$$

$$ct' = \gamma c t - \gamma\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c}. \tag{B.22}$$

Diese LORENTZ-Transformationen bilden keine Gruppe. Denn das Hintereinanderausführen von LORENTZ-Transformationen zu den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ bzw. $\mathbf{v}_2$ (mit $\mathbf{v}_1 \not\parallel \mathbf{v}_2$) gibt im allgemeinen eine Transformation, die auch eine Drehung enthält. Wenn man aber die räumliche Drehgruppe dazunimmt, dann erhält man eine Gruppe, die LORENTZ-*Gruppe.*

B.5 Vierdimensionale Vektorrechnung, die MINKOWSKI-Welt

Da in der Relaltivitätstheorie die Zeit t eine system- und ortsabhängige Größe ist, muß sie zusammen mit den Ortskoordinaten x_1, x_2 und x_3 zur systembezogenen Beschreibung eines physikalischen Ereignisses herangezogen werden. Es ist zweckmäßig, die Zeit t als 4. Komponente eines Vektors zu schreiben. Damit diese 4. Komponente die gleiche Dimension hat wie die drei ersten

Komponenten, wird der Lichtweg $x_0 = c\,t$ statt der reinen Zeit gewählt. Der Raum dieser vierdimensionalen Vektoren heißt die MINKOWSKI-*Welt*. Diese wird unten in der rechten Spalte eingeführt. Zum Vergleich werden die analogen bekannten Formeln der üblichen dreidimensionalen Vektorrechnung in der linken Spalte angegeben. Die MINKOWSKI-Welt ist nicht euklidisch. Deswegen gibt es hier ko- (Index unten) und kontravariante Koordinaten (Index oben); und dies muß bei der Definition des skalaren Produktes berücksichtigt werden.

3-dimens. EUKLIDischer Raum

Koordinaten:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z;$$

Vektor:

$$\mathbf{r} \mathrel{\hat{=}} x_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

mit $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$; Summationsübereinkommen für wiederholte Indizes von 1 bis 3.

Inneres Produkt zweier Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= a_i b_i. \end{aligned}$$

Norm des Ortsvektors

$$\mathbf{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_i x_i.$$

4-dimens. MINKOWSKI-Welt

kontravariante Koordinaten:

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z. \tag{B.23}$$

4-Vektor der Raum-Zeit:

$$X \mathrel{\hat{=}} x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^i \end{pmatrix}. \tag{B.24}$$

mit $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$. Summationsübereinkommen für wiederholte lateinische Indizes von 1 bis 3; griechische Indizes von 0 bis 3.

Inneres Produkt zweier 4-Vektoren:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= a^0 b^0 - a^i b^i = a^\mu b_\mu, \end{aligned} \tag{B.25}$$

$$a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\mu. \tag{B.26}$$

Norm des Raum-Zeit-Vektors:

$$\begin{aligned} X^2 &= X \cdot X = \sum_{\mu=1}^{4} (x^\mu)^2 \\ &= x^\mu x_\mu \\ &= (c\,t)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 \qquad \text{(B.27)} \\ &= (c\tau)^2 \qquad \text{(B.28)} \end{aligned}$$

Die Variable τ heißt die Eigenzeit; sie wird mit einer Uhr gemessen, die im Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ des Systems des beobachteten Teilchens ruht. Die Definition des inneren Produkts zweier Vierervektoren gemäß (B.25) wird verständlich, wenn man auf Gl. (B.27) schaut: Das innere Produkt zweier Vektoren muß invariant bleiben, im dreidimensionalen Ortsraum bei Drehungen, in der MINKOWSKI-Welt bei Drehungen im Ortsraum, insbesondere auch bei LORENTZ-Transformationen. Bei letzteren muß aber die Wellenfront eines Lichtblitzes immer eine Kugel sein, d.h. es muß $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (c\,t)^2 = -[(c\,t)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2]$ invariant bleiben. Das zwingt uns zu einer entsprechenden Definition des inneren Produkts wie oben in Gl. (B.26) mittels eines ko- oder kontravarianten *metrischen Tensors* $g_{\mu\nu}$ oder $g^{\mu\nu}$. Dieser ist hier immer diagonal und hat konstante Elemente:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.29}$$

Mittels des metrischen Tensors kann man ko- in kontravariante Vektoren umrechnen und umgekehrt; man kann "Indizes hinauf- und hinunterziehen":

$$\begin{aligned} x_\mu &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = g_\nu^\mu \, x^\mu \\ &= \begin{pmatrix} x^0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,t & -x & -y & -z \end{pmatrix}; \\ x^\mu &= g^{\mu\nu} x_\mu . \end{aligned}$$

Es gibt auch Definitionen des metrischen Tensors, bei denen die Vorzeichen gerade vertauscht sind, also ein -1 in der 1. Zeile, drei 1 in den nachfolgenden Zeilen.

Eine andere Möglichkeit die Invarianz der kugelförmigen Wellenfront und damit der obigen quadratischen Form einzuhalten, besteht darin, statt des reellen Lichtwegs x_0 im Raum-Zeit-Vektor eine vierte rein imaginäre Komponente einzuführen, also diesen Vektor folgendermaßen zu definieren:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ix_0 = ic\,t \end{pmatrix}$$

mit

$$X \cdot X = x^2 + y^2 + z^2 - (c\,t)^2 = \text{inv.}$$

Das war die ursprüngliche Definition MINKOWSKIS; darin erspart man sich die Unterscheidung von ko- und kontravarianten Komponenten. Dafür muß man komplexe Rechengrößen in Kauf nehmen, während bei Benutzung der obigen Definitionen mit metrischen Tensoren alle Rechnungen im Reellen bleiben. Deswegen hat sich diese Notation durchgesetzt.

Den Koordinatentransformationen im dreidimensionalen Euklidischen Raum entsprechen hier die LORENTZ-Transformationen:

<u>Koordinatentransformationen:</u>

$$x'_i = a_{ij} x_j;$$

Drehung des Koordinatensystems:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

<u>LORENTZ-Transformationen:</u>

$$X' = \boldsymbol{L} X \quad \rightarrow \quad x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}.$$

Lorentztransformation für Bewegung längs der x-Achse, Gl. (B.13):

$$\boldsymbol{L} = (L^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{B.30}$$

LORENTZ-Transformation für Vektor $\mathbf{v}$ (= "boost"), Gln. (B.21) und (B.22):

$$L = (L^{\mu}{}_{\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} L^0{}_0 & L^j{}_0 \\ \hline L^0{}_k & L^j{}_k \end{array} \right) \tag{B.31}$$

mit

$$\begin{aligned} L^j{}_k &= \delta^j{}_k + (\gamma - 1)\frac{v^j v_k}{v^2}, \\ L^0{}_0 &= \gamma, \\ L^j{}_0 &= \frac{\gamma v^j}{c}, \qquad L^0{}_k = \frac{\gamma v_k}{c}. \end{aligned}$$

Die Matrix der LORENTZ-Transformation (B.31) ist in Kästchenform geschrieben. In der linken oberen Ecke steht das Element $L^0{}_0$. Rechts davon stehen in der Zeile noch 3 Elemente. In der rechten unteren Ecke ist eine 3 x 3 Matrix; davor steht eine Spalte mit 3 Elementen.

Der Abstand zweier Punkte, insbesondere auch die Norm des Ortsvektors $\mathbf{r}$ sollen invariant sein gegenüber einer linearen Koordinatentransformation. Ebenso soll die Norm s^2 des Raum-Zeit-Vektors invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation sein.

Drehungen:	LORENTZ-Transformationen:
$$\begin{aligned} \mathbf{r}'^2 &= x'_i x'_i = a_{ij}a_{ik}x_j x_k \\ \mathbf{r}^2 &= x_k x_k = \delta_{jk}x_j x_k \\ \mathbf{r}'^2 &= \mathbf{r}^2 = x_i x_i = \text{inv.} \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} a_{ij}a_{ik} &= \delta_{jk} = a_{ji}a_{ki}, \\ \boldsymbol{A} &= (a_{ij},) \\ \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}}. \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} s^2 &= x_\nu x^\nu \\ &= (c\,t)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\right)^2 = \text{inv.} \\ x'_\nu x'^\nu &= L_\nu{}^\mu L^\nu{}_\lambda x_\mu x^\lambda = \\ x_\mu x^\mu &= \delta^\mu{}_\lambda x_\mu x^\lambda. \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} L_\nu{}^\mu L^\nu{}_\lambda &= \delta^\mu{}_\lambda = L_\lambda{}^\nu L^\mu{}_\nu \\ \tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{E} = \boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{L}}. \qquad \text{(B.32)} \end{aligned}$$

Die 3 x 3 Matrizen $\boldsymbol{A}$ sind reell und orthogonal; sie bilden die *Drehgruppe* des $\mathbb{R}^3$. Die LORENTZ-Transformationen $\boldsymbol{L}$ (4 x 4 Matrizen) bilden die LORENTZ-*Gruppe*.

Summe und Differenz zweier Vektoren werden wie üblich durch die Summe bzw. Differenz der jeweiligen Komponenten definiert. Demgemäß definiert man das Differential des Ortsvektors bzw. des Raum-Zeit-Vektors. $d\tau$ ist das Differential der Eigenzeit, umgerechent gemäß Gl. (B.17).

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \mathrel{\hat{=}} dx_i &= \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \\ ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \\ &= dx_i dx_i. \end{aligned}$$	$$dX \mathrel{\hat{=}} dx^\mu = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(B.33)}$$ $$\begin{aligned} d\tau^2 &= \frac{dt^2}{\gamma^2} = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \\ &= dt^2 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{c^2}, \\ &= \frac{dx_\nu\, dx^\nu}{c^2}. \qquad \text{(B.34)} \end{aligned}$$

B.6 Relativistische Kinematik

Bei der Definition des Geschwindigkeitsvektors ist zu beachten, daß die Ausdrücke dx_i/dt nicht ganz angepaßt sind, weil t selbst eine Koordinate ist. Man muß nach einem invariaten Parameter ableiten. Dafür wird die Eigenzeit τ verwendet. Man betrachtet den Raum-Zeit-Vektor X als Funktion von τ und bildet die Ableitung nach τ, dies gibt die *Vierergeschwindigkeit* $U = u^\mu$. Die

Ableitungen nach τ haben jedoch hauptsächlich theoretische Bedeutung, da z.B. Messungen meist im Ruhsystem des Beobachters, also im Laborsystem, ausgeführt werden. Man kann aber für $d\tau$ den Ausdruck dt/γ substituieren [s. Gl. (B.17)].

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t), \quad x_i = x_i(t). \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \quad \dot{x}_i = \dot{x}_i(t), \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= X(\tau), \quad x_\mu = x_\mu(\tau). \\ U &= \frac{dX}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{d\tau} \\ \frac{dx^1}{d\tau} \\ \frac{dx^2}{d\tau} \\ \frac{dx^3}{d\tau} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\dot{x}^1 \\ \gamma\dot{x}^2 \\ \gamma\dot{x}^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{B.35}$$

Punkte bezeichnen Ableitungen nach t. Im Eigensystem des Teilchens gilt:

$$U' = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U'^2 = c^2. \tag{B.36}$$

Da das skalare Produkt invariant ist, muß das letzte Resultat für jeden Vektor der Vierergeschwindigkeit in jedem System gelten:

$$U^2 = c^2 = u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu\, dx^\mu}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2. \tag{B.37}$$

Die Vierergeschwindigkeit kann also auch in dieser Weise geschrieben werden:

$$U = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Die Verallgemeinerung des 3-dimensionalen klassischen Impulses, Gl. (2.21), in die 4-dimensionale Minkowski-Welt führt zum *Viererimpuls*:

$$p_i = m\,\dot{x}_i, \qquad\Big|\qquad P = m_0\, U = m_0 \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma\mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{B.38}$$

Die Masse m_0 wird als die *Ruhemasse* bezeichnet und ist gleich der im Eigensystem des bewegten Teilchens gemessenen Masse; praktisch ist dies die

Masse, die man bei geringer Teilchengeschwindigkeit mißt. Die *bewegte Masse* ist:

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{B.39}$$

Der Raumanteil des Viererimpulses ist:

$$p_i = m\dot{x}_i = m_0\gamma\dot{x}_i, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{B.40}$$

Er geht für geringe Teilchengeschwindigkeit in den gewöhnlichen klassischen Impuls [Gl. (B.38), linke Seite] über. Die 4. Komponente des Viererimpulses ist die Energie des Teilchens dividiert durch c. Nehmen wir diese Gleichsetzung vor und entwickeln in eine binomische Reihe

$$E = mc^2 = m_0c^2\left[1-\beta^2\right]^{-1/2} = m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\beta^2+\cdots\right] = m_0c^2+\frac{1}{2}m_0\mathbf{v}^2+\cdots,$$

so sieht man, daß der 2. Term die klassische kinetische Energie darstellt, also müssen die anderen Terme auch Energien darstellen. $E_0 = m_0c^2$ wird als die *Ruhenergie* der Masse m_0 bezeichnet. Der Viererimpuls wird auch als der *Energie-Impulsvektor* bezeichnet:

$$P = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ m\mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{B.41}$$

B.7 Relativistische Dynamik

Für die relativistische Dynamik muß eine Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Axioms aufgesucht werden. Die Erfahrung widerspricht Gleichungen der Art:

$$m_0\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad \text{oder} \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F};$$

auch vertragen sich solche Gleichungen nicht mit dem Kalkül der vierdimensionalen MINKOWSKI-Welt. Zur Verallgemeinerung eignet sich die Form der klassischen Bewegungsgleichung nach (2.22). Formal setzt man dann an wie in der rechten Spalte:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad \Bigg| \qquad \mathcal{F} = \frac{dP}{d\tau} = m_0\frac{dU}{d\tau} = m_0\frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma m_0\frac{d}{dt}\gamma\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{B.42}$$

Die ersten drei Komponenten dieser Bewegungsgleichung geben im Laborsystem

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = m_0\gamma\dot{\mathbf{r}}, \tag{B.43}$$

falls für die drei raumartigen Komponenten der Viererkraft

$$\mathcal{F}_i \ = \gamma \mathbf{F}_i \tag{B.44}$$

gesetzt wird.

Um eine Aussage über die nullte (die zeitartige) Komponente der Viererkraft, $\mathcal{F}^0$, machen zu können, wird zuerst eine Hilfsrelation abgeleitet. Dazu werden die Vierergeschwindigkeit und die Viererkraft znächst im Ruhesystem angesetzt. Es zeigt sich, daß ihr skalares Produkt Null ist. Da dieses eine LORENTZ-Invariante ist, ist das Produkt in jedem System Null. Daraus kann man eine Formel für $\mathcal{F}^0$ ableiten:

$$\begin{aligned} U' &= \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}' = \big(0, \mathbf{F}\big), \quad U' \cdot \mathcal{F}' = U \cdot \mathcal{F} = 0. \\ 0 &= U \cdot \mathcal{F} = g_{\mu\nu} u^\mu \mathcal{F}^\nu = u^0 \mathcal{F}^0 - u^i \mathcal{F}^i = c\gamma \mathcal{F}^0 - \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}), \end{aligned} \tag{B.45}$$

mit $\mathbf{F}$ der Kraft auf das Teilchen. Daraus ergibt sich für die nullte Komponente der Viererkraft:

$$\mathcal{F}^0 = \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) = \frac{\gamma}{c} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{c} \frac{dA}{dt}. \tag{B.46}$$

Für eine nicht zeitabhängige Kraft ist die nullte Komponente der Viererkraft proportional zur Leistung.

Für die Beschleunigung auf relativistische Geschwindigkeiten kommen fast nur Elementarteilchen oder Ionen in Frage. Für die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld besteht die Kraft aus zwei Anteilen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{St}. \tag{B.47}$$

$\mathbf{F}_L$ ist die LORENTZ-Kraft:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{B.48}$$

mit q der Ladung des Teilchens. Die Strahlungsrückwirkungskraft $\mathbf{F}_{St}$ entsteht dadurch, daß jede beschleunigte Ladung ein elektromagnetisches Feld (elektromagnetische Wellen) abstrahlt. Dieses Feld wirkt auf die Ladung zurück. Diese Strahlungsrückwirkungskraft ist sehr kompliziert zu berechnen. Da sie oft klein ist, wird sie meist in einem ersten Näherungsschritt weggelassen und erst in einem weiteren berücksichtigt, nachdem die Bewegungsgleichungen ohne diese gelöst worden sind. Unter dieser Vernachlässigung lautet dann die *Bewegungsgleichung im Laborsystem*:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m_0 \gamma \mathbf{v})}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.} \tag{B.49}$$

B.7.1 Der relativistische Energiesatz

Für eine zeitunabhängige Kraft **F**, die ein Potential V besitzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{F} = -\mathrm{grad} V, \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \mathrm{grad} V\, \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}\, \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dA}{dt} = \frac{d(m_0\gamma c^2)}{dt};
\end{aligned}$$

gilt also:

$$\frac{d}{dt}\left[V + m_0\gamma c^2\right] = 0.$$

Das ist die *Gesamtenergie:*

$$\boxed{E = m_0\gamma c^2 + V = m_0 c^2 + m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) + V = \text{konst.}} \tag{B.50}$$

Gesamtenergie = Ruhenergie + kinetische Energie + potentielle Energie.

B.8 Die relativistische Kepler-Bewegung

Die Kraft und das Potential sind dieselben wie im nichtrelativistischen Fall (Abschnitt 2.7.2):

$$\mathbf{F} = C\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\mathrm{grad} V, \quad V = \frac{C}{r}, \quad C = -\gamma\, m_1\, m_2.$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F} = C\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{B.51}$$

Daraus folgt durch vektorielle Multiplikation mit dem Ortsvektor **r** die Drehimpulserhaltung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = 0; \tag{B.52}$$

$$\mathbf{L} = \frac{m_0\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right). \tag{B.53}$$

Damit ist auch hier die Bahn eben. Ebenso gilt der relativistische Energiesatz:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V = \text{konst.} \tag{B.54}$$

In beiden Erhaltungssätzen werden Polarkoordinaten eingeführt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}; \\
\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das gibt für den Drehimpulssatz:

$$\mathbf{L} = m_0\gamma(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = L\mathbf{e}_3, \quad L = \frac{m_0\, r^2\dot{\phi}}{1-\beta^2}; \qquad \dot{\phi} = \frac{L}{m_0 r^2}(1-\beta^2).$$

Statt der Zeit wird wieder das Azimuth ϕ als unabhängige Variable eingeführt:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = r'\dot{\phi}, \quad r' = \frac{dr}{d\phi}.$$

Damit werden auch $\mathbf{v}^2$ und β^2 umgeschrieben. $\dot{\phi}^2$ wird durch den Drehimpuls ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^2 &= (\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = (r'^2 + r^2)\dot{\phi}^2, \\
\beta^2 &= \frac{v^2}{c^2} = \frac{\dot{\phi}^2(r'^2+r^2)}{c^2} = \left(\frac{L}{m_0 c}\right)^2 (1-\beta^2)\left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

Statt r wird wieder die neue abhängige Variable s eingeführt:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{r}, \quad s' = \frac{ds}{d\phi} = \frac{ds}{dr}\frac{dr}{d\phi} = -\frac{r'}{r^2}, \\
\beta^2 &= \left(\frac{L}{m_0 c}\right)^2 (s'^2 + s^2)(1-\beta^2) = D(1-\beta^2), \\
D &= \left(\frac{L}{m_0 c}\right)^2 (s'^2 + s^2), \quad \beta^2 = D - D\beta^2, \quad \beta^2 = \frac{D}{1+D}.
\end{aligned}$$

Das gibt letztlich:

$$\frac{1}{1-\beta^2} = 1 + D.$$

Die neue Variable s wird auch im Energiesatz eingeführt, der resultierende Ausdruck wird quadriert und dann die vorstehende Beziehung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} &= E - V = E - Cs, \\
(E - Cs)^2 &= \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} = m_0^2 c^4 \left[1 + \left(\frac{L}{m_0 c}\right)^2 (s'^2 + s^2)\right], \\
E^2 - 2ECs + C^2 s^2 &= m_0^2 c^4 + L^2 c^2 s'^2 + L^2 c^2 s^2.
\end{aligned}$$

Der obige Ausdruck wird nach s'^2 aufgelöst und dann zum Quadrat ergänzt. Dazu werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\delta^2 = 1 - \left(\frac{C}{Lc}\right)^2, \qquad A = \frac{E^2 - m_0^2 c^4 \delta^2}{\delta^2 c^2 L^2}.$$

Dabei ist zu zeigen, daß $A^2 \geq 0$, d.h. $E^2 - m_0^2 c^4 \delta^2 \geq 0$ ist. Dazu wird die Definition des relativistischen Drehimpulses herangezogen:

$$\begin{aligned}
L^2 &= \frac{(m_0 r v \sin\alpha)^2}{1-\beta^2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \\
E^2 - m_0^2 c^4 \delta^2 &= \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} + \frac{2 m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{C}{r} + \frac{C}{r^2} - m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^4 C^2}{c^2 L^2}, \\
&= \cdots + \frac{m_0^2 c^4 C^2 (1-\beta^2)}{c^2 m_0^2 r^2 v^2 \sin^2\alpha}, \\
&= \frac{m_0^2 c^4 \beta^2}{1-\beta^2} + \frac{2 m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} x + x^2 \frac{1 - \beta^2 \cos^2\alpha}{\beta^2 \sin^2\alpha} \\
&= d + 2bx + ax^2, \quad x = C/r.
\end{aligned}$$

Nach der Theorie der quadratischen Gleichungen ist dieser Ausdruck in x dann größer Null, wenn die damit gebildete quadratische Gleichung keine reelle Nullstelle aufweist. Dies trifft aber zu, weil die Diskriminante

$$-b^2 + ad = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2}\left[1 - \frac{1 - \beta^2 \cos^2\alpha}{\beta^2 \sin^2\alpha}\right] = m_0^2 c^4 \cot^2\alpha \geq 0.$$

größer 0 ist. Es folgt weiters:

$$
\begin{aligned}
L^2c^2s'^2 &= E^2 - m_0c^4 - L^2c^2s^2 + C^2s^2 - 2ECs, \\
s'^2 &= \left(\frac{E}{Lc}\right)^2 - \left(\frac{m_0c}{L}\right)^2 - s^2\left[1 - \left(\frac{C}{Lc}\right)^2\right] - \frac{2ECs}{L^2c^2}, \\
&= \left(\frac{E}{Lc}\right)^2 - \left(\frac{m_0c}{L}\right)^2 - s^2\delta^2 - \frac{2ECs}{L^2c^2}, \\
&= \left(\frac{E}{Lc}\right)^2 - \left(\frac{m_0c}{L}\right)^2 - \delta^2\left[\left(s + \frac{EC}{\delta^2c^2L^2}\right)^2 - \delta^2\left(\frac{EC}{(\delta cL)^2}\right)^2\right], \\
&= \left(\frac{E}{Lc}\right)^2 - \left(\frac{m_0c}{L}\right)^2 + \left[\frac{EC}{\delta^2c^2L^2}\right]^2 - \delta^2\left[s + \frac{EC}{(\delta cL)^2}\right]^2, \\
&= A^2 - \delta^2\left[s + \frac{EC}{(\delta cL)^2}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Beim Übergang zur letzten Zeile wurde noch folgende Umformung durchgeführt:

$$
\begin{aligned}
\frac{E^2}{L^2c^2} - \frac{m_0^2c^2}{L^2} + \frac{E^2C^2}{\delta^2c^4L^4} &= \frac{(E\delta Lc)^2 - (m_0c^3\delta L)^2 + E^2C^2}{\delta^2c^4L^4} \\
&= \frac{E^2(\delta^2L^2c^2 + C^2) - (m_0c^3\delta L)^2}{\delta^2c^4L^4} \\
&= \frac{E^2(L^2c^2 - C^2 + C^2) - (m_0c^3\delta L)^2}{\delta^2c^4L^4} \\
&= \frac{E^2 - m_0^2c^4\delta^2}{\delta^2c^2L^2} = A^2.
\end{aligned}
$$

Die obige Differentialgleichung für $s(\phi)$ wird durch folgende Substitution

$$
u(\phi) = s(\phi) + \frac{EC}{(\delta cL)^2}, \quad u' = s'
$$

in eine solche für u verwandelt. Letztere wird durch Ziehen der Wurzel und Trennung der Variablen gelöst:

$$
\begin{aligned}
u'^2 &= A^2 - \delta^2\,u^2, \quad \frac{du}{d\phi} = \sqrt{A^2 - \delta^2u^2} = A\sqrt{1 - (\delta u/A)^2}, \\
d\phi &= \frac{du}{A\sqrt{1 - (\delta/uA)^2}} = \delta^{-1}\frac{d(\delta u/A)}{A\sqrt{1 - (\delta u/A)^2}}, \\
\phi - \phi_0 &= \delta^{-1}\arcsin(\delta u/A), \quad \delta\,u = A\sin[\delta(\phi - \phi_0)].
\end{aligned}
$$

Geeignete Wahl von ϕ_0 gibt:

$$u = \frac{A}{\delta}\cos(\delta\phi) = s + \frac{EC}{(\delta cL)^2} = \frac{1}{r} + \frac{EC}{(\delta cL)^2}.$$

Damit ergibt sich die endgültige Form der Bahngleichung:

$$\boxed{r = \frac{-\delta^2 c^2 L^2/EC}{1-(A\delta c^2 L^2)\cos(\delta\phi)} = \frac{p}{1-\varepsilon\cos(\delta\phi)},} \tag{B.55}$$

mit den Parametern

$$p = -\frac{\delta^2 c^2 L^2}{EC} = C\frac{1-\left(\frac{cL}{C}\right)^2}{E}, \tag{B.56}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{A\delta c^2 L^2}{EC} = \frac{cL}{EC}\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4 \delta^2} \\ &= \left[\frac{1-\frac{\delta^2 m_0^2 c^4}{E^2}}{1-\delta^2}\right]^{1/2} = \sqrt{1+\delta^2\left(1-\frac{m_0^2 c^4}{E^2}\right)(1-\delta^2)}. \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{\delta Lc}{EC}\right)^2 (E^2 - m_0^2 c^4)}.\end{aligned} \tag{B.57}$$

Aus der Form der Bahngleichung sieht man, daß für $\varepsilon < 1$ der Radius r immer endlich bleibt, während er für $\varepsilon \geq 1$ gegen Unendlich strebt. Aus dem Ausdruck für ε in der letzten Zeile ergibt sich, daß diese Unterscheidung zwischen den verschiedenen Bahnformen wieder vom Wert der Gesamtenergie E abhängt. Wegen des Zusatzterms der Ruhenergie m_0c^2 liegt die Grenze zwischen gebundenen und freien Zuständen nicht mehr bei $E = 0$ wie bei der nichtrelativistischen Lösung, sondern bei $E = m_0c^2$:

$-m_0c^2 < E < m_0c^2$	$\Rightarrow$	$\varepsilon < 1$	Rosettenbahnen, gebundener Zustand,
$m_0c^2 \leq E$	$\Rightarrow$	$\varepsilon \geq 1$	offene Bahnen, freie Zustände, Streuung.

Die relativistische Massenveränderlichkeit bewirkt, daß die Bahnen der gebundenen Zustände nicht mehr geschlossen sind, es erfolgt eine *Periheldrehung*; deshalb bezeichnet man diese Bahnen als *Rosettenbahnen*. Mathematisch wird die Periheldrehung durch den Faktor δ im Argument der cos-

Funktion der obigen Bahngleichung verursacht:

$$\text{1. Perihel:} \quad t_1 = t_0: \quad r = r_{\min}: \quad \delta\phi_{P_1} = \pi, \quad \phi_{P_1} = \pi/\delta.$$

Nach einem vollen Umlauf (um 2π)

des Radiusvektors: $\quad t_2 = t_0 + T: \qquad \phi_2 = \pi/\delta + 2\pi.$

$$\text{2. Perihel:} \quad t_3: \quad r = r_{\min}: \quad \delta\phi_{P_2} = 3\pi, \quad \phi_{P_2} = 3\pi/\delta.$$

Für $\delta \neq 1$ ist $\phi_{P_1} \neq \phi_{P_2}$, dies entspricht einer Drehung des Perihels um den Winkel

$$\Delta\phi = \phi_{P_2} - \phi_2 = \frac{3\pi}{\delta} - \frac{\pi}{\delta} - 2\pi = -2\pi\left(1 - \frac{1}{\delta}\right). \tag{B.58}$$

Aus der nichtrelativistischen Behandlung des KEPLER-Problems folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{F_{ell}}{\pi} &= ab = a\sqrt{-\frac{L^2}{mC}}, \\
a^2b^2 &= a^4(1-\varepsilon^2) = -\frac{a^3L^2}{m_0C} = \frac{a^3L^2}{\gamma m_0 M}, \\
\frac{1}{L^2} &= \left[a\left(1-\varepsilon^2\right)\gamma m_0^2 M\right]^{-1}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}.
\end{aligned}$$

Diese Formeln werden in die obige Formel für die Periheldrehung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \phi_{P_2} - \phi_2 = 2\pi\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) = 2\pi\left\{\left[1 - \left(\frac{C}{cL}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - 1\right\} \\
&= 2\pi\left(\left[1 + \frac{1}{2}(C/cL)^2 + \cdots\right] - 1\right) \approx \frac{\pi C}{c^2L^2}, \\
&\approx \frac{\pi m_0^2 M^2 \gamma^2}{c^2 a\left(1-\varepsilon^2\right)\gamma m_0^2 M} = \frac{\pi\gamma M}{c^2 a\left(1-\varepsilon^2\right)}.
\end{aligned} \tag{B.59}$$

Die Periheldrehung ist umso größer, je kleiner a (Merkur) und je näher ε bei 1 liegt (Mars).

Die Präzession des Perihels des Planeten Merkur beträgt $5599.7''$/Jahrhundert. Aus den bekannten Störungen (vor allem die Wechselwirkung der Planeten untereinander und über die Sonne) wurde eine Periheldrehung von $5557.0''$/Jahrhundert berechnet.[4] Die Differenz von $47.7''$/Jahrhundert war

[4]siehe CL. M. WILL *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press 1993).

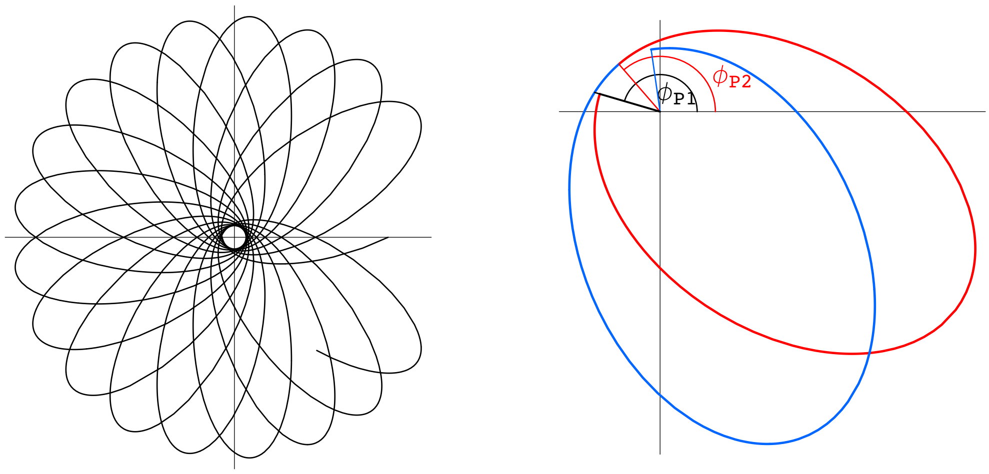


Abbildung B.8: Die Periheldrehung der relativistischen KEPLER-Bewegung, Links: Die Bahn über mehrere Perioden betrachtet. Rechts: Rote Bahn: Start im Perihel bis zum nächsten; blau: Verlauf vom 2. bis zum 3. Perihel.

schon um 1900 bekannt und es wurde nach einer Erklärung gesucht. Gl. (B.59) liefert nur 1/6 dieser Differenz. Aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgt ein Effekt der richtigen Größenordnung.