Übungen Analytische Mechanik WS 2004: 1. Übungsblatt Vektoranalysis, Kinematik und Dynamik des Massenpunktes

1. Beweisen Sie unter Verwendung der Definition des Nabla Operators nach (A.10) die Beziehungen (A.15) des Anhangs A der Vorlesungsunterlage durch Ausrechnen.

2. Die Gleichung eines Kreises ist durch

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2, \quad r > 0$$

gegeben.

   (a) Geben Sie diese Gleichung in Parameterform (Parameter: Zeit t) an. Ersetzen Sie den Parameter t durch die Bogenlänge s. Bestimmen Sie schließlich die Krümmung κ und daraus den Krümmungsradius R.

   (b) Berechnen Sie die Beschleunigung eines Punktes, welcher sich auf diesem Kreis mit konstanter Tangentialgeschwindigkeit $|\mathbf{v}_0|$ bewegt.

3. Ein Massenpunkt unterliegt der Federkraft $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ mit der Federkonstanten k. Der Massenpunkt werde von $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bewegt, wodurch die Feder gespannt wird. Berechnen Sie die Arbeit W, wenn der Weg $\mathcal{C}$ von $\mathbf{r}_1$ nach $\mathbf{r}_2$

   (a) über eine Gerade,

   (b) über einen Halbkreis mit dem Radius $a/2$ führt.

   Diskutieren Sie das Ergebnis.

4. Eine Masse m befindet sich in einem Schwerefeld und dadurch wirkt auf sie die Kraft

$$\mathbf{F} = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie die Bewegungsgleichung der Masse und deren Lösung an, wobei anzunehmen ist, dass der Massenpunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist und sich auf der Position $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ befindet. Nach welcher Zeit trifft die Masse am

Boden $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf? Welche Geschwindigkeit hat sie? Wie verändert sich das Ergebnis, wenn wir zusätzlich eine Reibungskraft entsprechend

$$\mathbf{F} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}$$

annehmen, mit γ einer Konstanten. Welches Vorzeichen muß γ haben, damit die Masse sicher zu Boden fällt? Diskutieren Sie das Ergebnis!