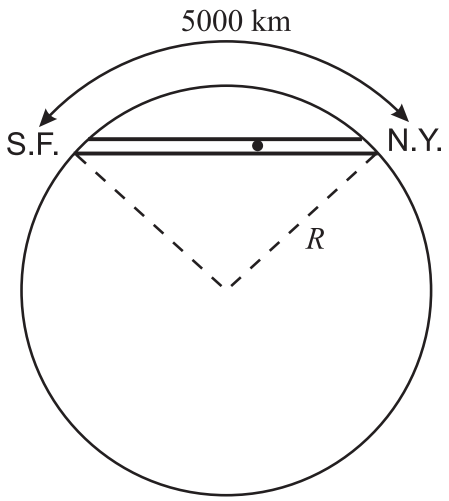
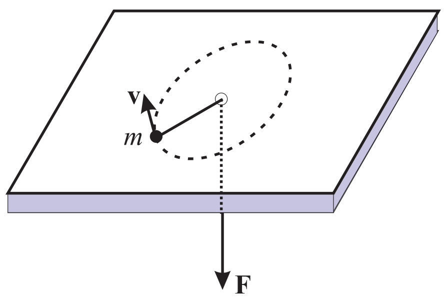
Übungen Analytische Mechanik WS 2005: 3. Übungsblatt
Dynamik des Massenpunktes

1. Ein Gravitationsproblem:



Es wird von New York (N.Y.) ein gerader Tunnel nach San Francisco (S.F.) gegraben. Darin soll sich ein Wagen der Masse m reibungsfrei bewegen können. Dieser Wagen wird in N.Y. zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ freigegeben. Wie lange wird der Wagen brauchen bis er S.F. erreicht? (Die Massenverteilung in der Erdkugel wird dabei als homogen angesehen, $|\mathbf{g}| = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, Erdradius $R = 6400\,\mathrm{km}$.)

2. Ein Zentralkraftproblem:



Eine Masse m ist an einem Strick befestigt. Die Masse bewegt sich auf einer reibungsfreien Platte; der Strick geht durch ein Loch in der Platte und es wird dafür gesorgt, daß der Strich straff gespannt bleibt. Die Masse bewegt sich daher anfangs auf einer Kreisbahn mit Radius R und einer konstanten kinetischen Energie E_0. Es wird dann $(t > 0)$ langsam am Strick mit einer Kraft **F** gezogen bis sich der Radius der Bahnkurve halbiert hat. Welche Arbeit wurde von der Kraft **F** geleistet?

3. Ein Zentralkraftproblem:

   Die Bahn eines Teilchens der Masse m, welches sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft bewegt, ist in Polarkoordinaten durch $r\varphi = c$, mit c einer Konstanten, gegeben. Bestimmen Sie die potentielle Energie als Funktion von r. (Wählen Sie bitte für das Potential $U(\infty) = 0$.) Hinweis: die sich für das Teilchen ergebende Bewegungsgleichung wird auch BINETsche Gleichung genannt.

4. Keplerbewegung:

   Wir betrachten ein Kraftfeld der Form

$$\mathbf{F} = C\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{1}$$

und es ist zunächst zu zeigen, daß neben dem Drehimpuls $\boldsymbol{\ell}$ und der Gesamtenergie E (was ja bereits aus der Vorlesung bekannt ist) auch der LAPLACE-LENZsche Vektor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{C}\,(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\ell}) + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{2}$$

ein Integral der Bewegung des Kraftfelds (1) ist. In einem dreidimensionalen System sind maximal fünf von einander unabhängige zeitfreie Integrale der Bewegung möglich, also müssen zwei der sieben Größen $\boldsymbol{\ell}$, E und $\mathbf{A}$ voneinander abhängig sein. Wie lauten die gesuchten zwei Relationen?

Hinweis: Die erste Beziehung findet man leicht, wenn man die Definitionen von $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{\ell}$ berücksichtigt, die zweite durch Berechnen von $\mathbf{A}^2$ und Verwendung von

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 &= \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{b})^2 \\
\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}.
\end{aligned}$$