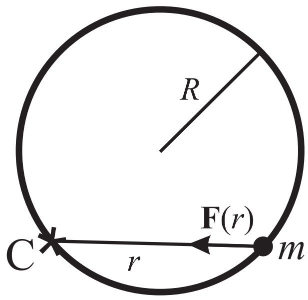
Übungen Analytische Mechanik WS 2005: 4. Übungsblatt Zentralkraftproblem, Kraftgesetz, mehrere Massenpunkte, Lagrange I

1. Ein Zentralkraftproblem:

   Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichung für die Radialkomponente der Bahnkurve eines Massenpunktes der Masse m unter Einfluß einer Zentralkraft in die Form
   $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{dU(u)}{du}$$
   umgeformt werden kann. $u = 1/r$, $r = |\mathbf{r}|$, φ ist der Polarwinkel und $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$ ist der Betrag des Drehimpulses.

   Hinweis: Benutzen Sie zur Umformung den Flächensatz.

2. Kraftgesetz:

   Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf einer Kreisbahn vom Radius R unter dem Einfluß einer Zentralkraft $\mathbf{F}(r)$. Das Zentrum C dieser Kraft liegt in einem Punkt dieser Kreisbahn. Wie lautet das Kraftgesetz? (Benützen Sie das Ergebnis von Aufgabe 1!)

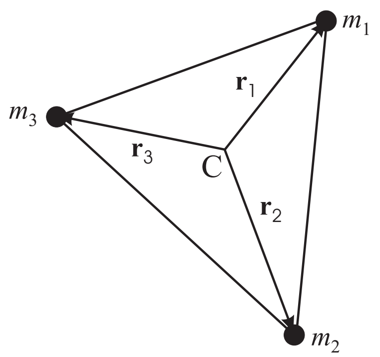
3. Stoß:

   Zwei übereinender angeordente Stahlkugeln (obere Kugel: Radius a, Masse m, untere Kugel: Radius $2a$, Masse $8m$) werden von einer Höhe h gegen eine horizontale, unverrückbare Stahlplatte fallen gelassen. Die Höhe h wird vom Zentrum der unteren Kugel gemessen. Die Bewegung findet im Vakuum statt, die Graviationsbeschleunigung $\mathbf{g}$ wirkt entlang der vertikalen Fallrichtung und es wird angenommen, dass sich die beide Kugelzentren entlang der Vertikalen auf di Stahlplatte zubewegen. Es wird angenommen, dass die größere Kugel zuerst mit der Stahlplatte kollidiert und von ihr refelktiert wird. Erst dann kollidiert die obere Kugel mit der reflektierten größeren. Welche Maximalhöhe erreicht die kleinere Kugel unter der Annahme, dass alle Stöße elastisch erfolgen?

4. Mathematisches Pendel, Lagrange I

   Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels (Länge ℓ, Masse m) für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage φ unter Verwendung des Lagrange I Formalismus. Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Annahme, dass das Pendel zur Zeit $t = 0$ in Ruhelage ist, und dass es zur Zeit $t = 0$ durch einen Stoß mit dem Impuls $|\mathbf{p}| = p_0$ aus der Ruhelage ausgelenkt wird.

5. Mehrere Massenpunkte:



Wir wählen den Schwerpunkt C dreier Massen m_1, m_2 und m_3 als Koordinatenursprung und die Positionsvektoren $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ zeigen zu diesen Massen. Die Massen wechselwirken untereinander über die Schwerkraft.

(a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen?

(b) Sind die Massen in einem gleichseitigen Dreieck angeordnet, so kann das System in seiner Ebene rotieren. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, wenn die Kantenlänge des gleichseitigen Dreiecks mit d angenommen wird.