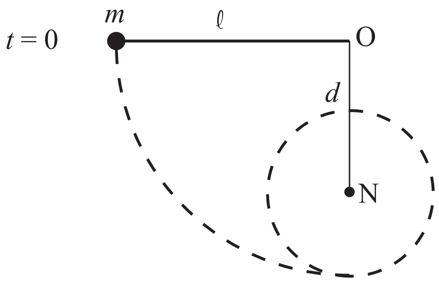
Übungen Analytische Mechanik WS 2004: 5. Übungsblatt
Erhaltungssätze, Kepler Problem, der Stoß, Lagrange II

1. Erhaltungssätze:

   Ein Pendel der Masse m, Länge ℓ, wird aus seiner horizontalen Ruheposition entlassen. Im Abstand d vom Aufhängungspunkt O ist der Nagel N eingeschlagen, dessen Durchmesser gegenüber ℓ und d vernachlässigbar ist. Dadurch wird die Masse gezwungen den strichliert dargestellten Weg zurückzulegen. Bestimmen Sie den minimalen Abstand d in Einheiten von ℓ aus der Forderung, daß die Masse m gerade einen Kreis um N vervollständigt. (Benützen Sie Ergebnisse, welche bereits aus früheren Übungen bekannt sind.)

2. 'Kepler'-Problem:

   Ein Massenpunkt m wird aus dem Unendlichen mit der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}_0| = v_0$ so entlassen, daß er ein im Raum feststehendes Zentrum Z einer abstoßenden Kraft $|\mathbf{F}| = k/r^2$, mit $|\mathbf{r}| = r$ und k einer Konstanten, im Abstand b passieren würde, wenn er nicht von dieser Kraft abgelenkt würde. Bestimmen Sie:

   (a) den Abstand der kürzesten Annäherung von m an Z,

   (b) die Winkelablenkung, welche der Massenpunkt erfährt.

3. Inelastischer Stoß:

   Wir nehmen an, daß während des Stoßes zweier Massen m_1 und m_2 ein (unbekannter) Energieverlust Q auftritt. Wie lauten in diesem Fall die Bilanzgleichungen der zwei stoßenden Teilchen, wenn die beiden Massen vor dem Stoß die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ hatten? Wir spezialisieren nun auf den zentralen Stoß. Ist in diesem Fall der Endzustand vollständig bestimmt? Untersuchen Sie nun den Fall des zentralen Stoßes mit $m_1 = m_2 = m$ und $\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$. Wie groß kann Q maximal sein damit das Ergebnis noch physikalisch sinnvoll ist?

4. Lagrange II, Virialsatz:

   Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich auf einer festen Bahn bewegt, welche durch das Potential $U = -k/r$ bestimmt ist. Mit Hilfe von Polarkoordinaten in der Bewegungsebene bestimmen Sie:

   (a) die Komponenten des verallgemeinerten Impulses p_r und p_φ als Funktionen von r, φ, $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$. Gehen Sie dabei von der Lagrangefunktion des

Systems aus. Ist eine der beiden Impulskomonenten eine Konstante der Bewegung?

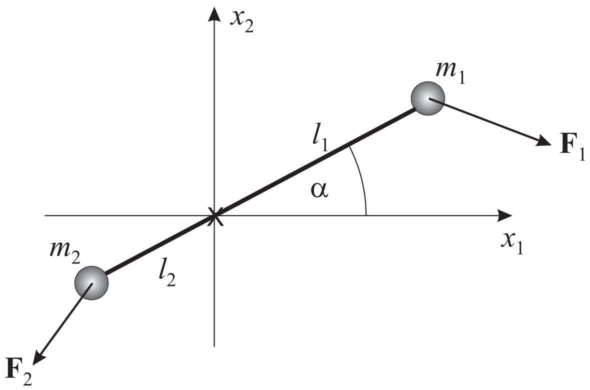
(b) Zeigen Sie unter Benützung des Virialtheorems, daß

$$J_r + J_\varphi = \oint dt\, \frac{k}{r}$$

ist, mit

$$J_r = \oint dr\, p_r, \qquad J_\varphi = \oint d\varphi\, p_\varphi .$$

5. Hebelgesetz:



Wir untersuchen ein ebenes System bestehend aus zwei Massen m_1 und m_2, welche über eine masselose Stange miteinander verbunden sind. Diese Stange is drehbar gelagert und die beiden Massen haben die Abstände ℓ_1 und ℓ_2 vom gemeinsamen Drehpunkt. Die beiden Massen stehen unter dem Einfluß zweier Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$.

(a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen, welchen die Bewegung der beiden Massen unterworfen ist, unter Verwendung virtueller Verrückungen.

(b) Zeigen Sie, daß die Lagrange I Bewegungsgleichungen in das Hebelgesetz umgeformt werden können.