Übungen Analytische Mechanik WS 2005: 10. Übungsblatt

1. Federgekoppeltes Doppelpendel:

   Zwei Pendel gleicher Länge ℓ und gleicher Masse m sind miteinander über eine masselose Feder mit der Federkonstanten k verbunden. Die ungestreckte Länge der Feder ist gleich dem Abstand d der Pendelaufhängungen.

   (a) Geben Sie die Lagrangefunktion in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten an.

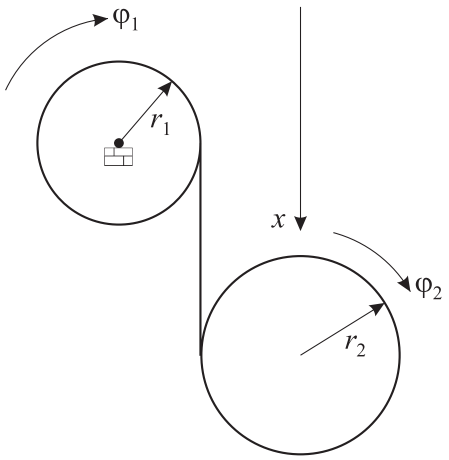
   (b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Voraussetzung, daß die Auslenkung der Pendel klein ist, und daß Terme höherer Ordnung in den Auslenkungen vernachlässigbar sind. Formen Sie die Gleichung unter Verwendung von

   $$\eta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad \xi = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$$

   um, wenn θ_1 und θ_2 die Auslenkungen der beiden Pendel sind.

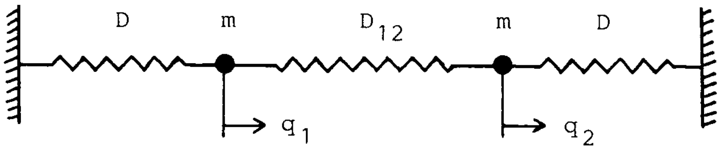
   (c) Lösen Sie die unter (b) bestimmten Differentialgleichungen unter der Annahme, daß anfangs beide Pendel in Ruhelage sind. Ein Stoß gibt dann der linken Masse eine waagrechte Geschwindigkeit v nach rechts. Bestimmen Sie die Bewegung des Systems und stellen Sie die Bewegung graphisch dar.

2. Starre Körper:



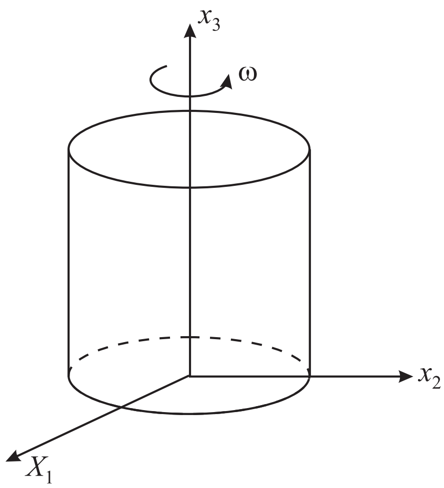
Zwei homogene Zylinder mit den Massen m_1 und m_2, den Radien r_1 und r_2 und den Trägheitsmomenten I_1 und I_2, mit $I_i = m_i r_i^2/2$, sind mit einem Faden umwickelt. Die Achse des Zylinders 1 ist reibungsfrei gelagert. Der Zylinder 2 fällt im Schwerefeld senkrecht nach unten. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie daraus die Fadenspannung. Es gibt zumindest zwei Lösungswege. Führen Sie einen davon aus und diskutieren Sie den anderen.

3. Gekoppelte Oszillatoren:



Wir betrachten zwei idente harmonische Oszillatoren, welche durch eine Feder mit Federkonstante D_{12} mit einander verbunden sind, und welche sich nur auf der horizontalen Geraden bewegen können. Die beiden Oszillatormassen m sind über Federn der Federkonstante D verankert. q_1 und q_2 seien die Auslenkungen der Massen aus ihren Gleichgewichtslagen. Geben Sie die allgemeine Lösung für die Randbedingungen $q_1(0) = A$, $\dot{q}_1 = q_2(0) = \dot{q}_2 = 0$ an. Diskutieren Sie das Ergebnis unter der Voraussetzung $D_{12} \ll D$.

4. Fluiddynamik:



In einem zylindrischen Eimer befindet sich Wasser, welches wir als inkompressibles Fluid behandeln wollen. Auf dieses Fluid wirkt das Schwerefeld $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_3$. Die Symmetrieachse des Eimers ist die x_3-Achse. Der Eimer rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um die Symmetrieachse. Nach einiger Zeit stellt sich das stationäre Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ein, welches zu berechnen ist.
Welche geometrische Form hat die Oberfläche des Fluids im Eimer? Wodurch ist die auftretende Integrationskonstante bestimmt?