Allgemeine Relativitätstheorie

E. Schachinger

8. Oktober 2004

Diese Vorlesungsunterlage ist dem Andenken von Herrn Univ. Prof. Dr. Ernst Ledinegg gewidmet, welcher über viele Jahre diese Vorlesung an der Technischen Universität Graz betreut hat. Er hat in mir die Liebe zu dieser großartigen Theorie geweckt und mich dazu angeregt diese Vorlesung zu übernehmen. Ihm gilt mein ganzer Dank!

E. Schachinger

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Rotverschiebung und die Ausdehnung des Weltalls

In den Jahren zwischen 1910 und 1930 wurde es sehr bald klar, daß das Weltall aus einer gewaltigen Anzahl von Galaxien besteht, welche durchaus unserer eigenen ähnlich sind. Man hat auch die Bewegung der Galaxien untersucht und in ihren Spektren nach Dopplerverschiebungen gesucht. Eine solche Untersuchung erlaubt es, die Bewegung solcher Objekte entlang der Sichtlinie zu untersuchen. Ist nun λ_e die Wellenlänge einer Spektrallinie im Ruhesystem der Quelle und λ_0 die Wellenlänge, welche der Beobachter mißt, der sich mit v relativ zur Quelle entlang der Sichtlinie bewegt, dann ist die *relative Wellenlängenänderung* Z durch

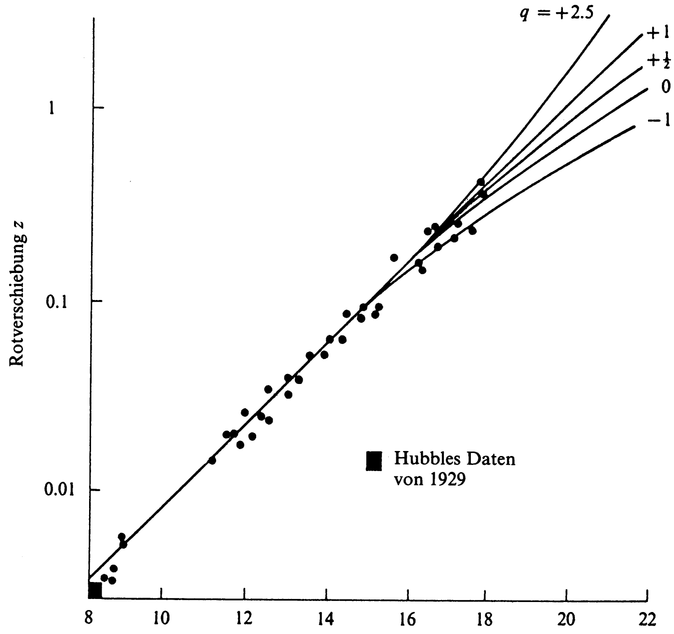
$$Z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \tag{1.1}$$

definiert. ($Z > 0$ ist eine Rotverschiebung, $Z < 0$ eine Blauverschiebung.) Für kleine Z folgt nun aus der Formel für die Dopplerverschiebung

$$v = cZ \tag{1.2}$$

mit $v > 0$ als Entfernung von uns und $v < 0$ als Annäherung an uns.

Die Erwartung war, daß Z von Galaxis zu Galaxis verschieden sein wird und Z im Mittel genauso oft positiv wie negativ sein wird. Innerhalb der *Lokalen Gruppe* traf dies auch zu. (Dies ist der Galaxienhaufen, welcher auch die Milchstraße enthält. $\approx 7.5 \times 10^5$ pc, 1 pc $= 3.26$ Lichtjahre. 'pc' steht für *Parsec* oder "Parallaxen–Sekunde; es ist dies die Entfernung eines Objektes, dessen Parallaxe eine Bogensekunde beträgt.) Außerhalb der lokalen Gruppe aber ist Z *stets positiv*. Dies bedeutet, daß sich alle anderen Galaxien von



m (korrigierte relative Helligkeit)

Abbildung 1.1: Hubble – Diagramm zum Nachweis von Gleichung (1.3).

uns entfernen! Hubble hat 1929 seine Beobachtungen in folgendem Ergebnis zusammengefaßt:

$$v = HD; \tag{1.3}$$

also: die Galaxien entfernen sich von uns mit einer Geschwindigkeit, welche proportional ihrer Entfernung D von uns ist. Die Proportionalitätskonstante ist die *Hubble – Konstante* H:

$$\begin{aligned} H &= 55 \pm 7 \text{ km}\,\text{s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \\ &= \frac{1 \pm 0.1}{1.8 \times 10^{10}} \text{ Jahre}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Man stimmt in diesem Wert weitgehend überein, es gibt aber Gruppen, welche einen sogar noch höheren Wert für möglich halten. Diese Unsicherheit rührt von den Daten für Objekte großer Entfernung her. Abb. 1.1 zeigt das Hubble – Diagramm, welches die Gültigkeit von (1.3) beweist. Die *korrigierte relative Helligkeit* m ist dabei über

$$m = M + 5 \log \left(\frac{D}{10} \right) \tag{1.5}$$

definiert. M ist dabei die Größe des Objektes. Was bedeutet nun Gleichung

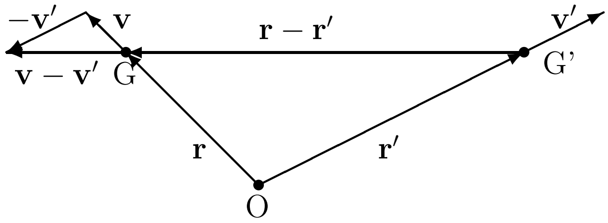


Abbildung 1.2: Skizze zu Gleichung (1.7).

(1.3)? Das Hubble Gesetz sagt nun aus, daß die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ einer Galaxis an einem Ort $\mathbf{r}$, von unserer Galaxis als Ursprung gemessen, durch

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r} \tag{1.6}$$

gegeben ist. Wir betrachten nun die Galaxis G aus der Sicht einer dritten Galaxie G', welche von uns $\mathbf{r}'$ entfernt ist. Sie entfernt sich von uns daher mit $\mathbf{v}' = H\mathbf{r}'$. Wir erhalten dann die Geschwindigkeit von G relativ zu G' über

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{1.7}$$

also entfernt sich G auch von G'! Es entsteht somit für jede Galaxie der Eindruck, daß sich alle Galaxien außerhalb der lokalen Gruppe von ihr entfernen.

Wenn wir nun, so wie bisher, annehmen, daß wir die euklidische Geometrie verwenden können, so ist eine weitere Folge von (1.3), daß sich Galaxien in einer Entfernung von

$$\begin{aligned} D_{\max} = \frac{c}{H} &\sim 2 \times 10^{10} \text{ Lichtjahre} \\ &\sim 6 \times 10^{9} \text{ pc} \end{aligned}$$

mit Lichtgeschwindigkeit voneinander entfernen. Licht von solchen Galaxien kann uns somit nicht erreichen. $D_{\max}$ … *Grenze des beobachtbaren Universums.*

Es ist aber die grundsätzliche Frage zu stellen, ob die Anwendung der euklidischen Geometrie überhaupt noch zulässig ist.

1.2 Die Notwendigkeit relativistischer Begriffe

Wenn von einer fernen Galaxis elektromagnetische Strahlung ausgesandt wird, so ist dies ein *Ereignis*; wenn wir dieses Signal empfangen, so ist dies ein anderes Ereignis. In der Physik untersuchen wir solche Ereignisse und versuchen Beziehungen zwischen ihnen aufzustellen. Dies ist nur mit Hilfe eines *Bezugssystemes* möglich, innerhalb welchen wir mit Hilfe eines *Koordinatensystemes* Lokalisierungen vornehmen können. Wir beschreiben jedes Ereignis unter Verwendung von vier Zahlen, den drei Ortskoordinaten $\mathbf{r}$ und der Zeitkoordinate t.

Das einfachste Bezugssystem für die Beschreibung kosmologischer Ereignisse (Empfang des Lichtes) ist ein System, welches relativ zur eigenen Achse, oder zum Massenmittelpunkt der lokalen Gruppe von Galaxien ruht.

Das einfachste Bezugssystem für die Beschreibung eines Ereignisses, wie der Aussendung von Licht einer entfernten Galaxis G ist jedoch nicht nur unser lokales Bezugssystem , sondern auch das lokale System von G. In diesem habe das Ereignis der Lichtaussendung die Koordinaten $\mathbf{r}_G$, t_G. Welche Koordinaten $\mathbf{r}$, t hat dieses Ereignis nun in unserem System?

Es ist dies die zentrale Frage der *Relativitätstheorie*: wie können wir die Koordinaten eines Ereignisses in einem Bezugssystem in die Koordinaten eines anderen Bezugssystems *transformieren*?

Im Rahmen der *Newtonschen Mechanik* erfordert die Transformation eines Systems in ein anderes nur die Kenntnis der Ortskoordinaten $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_G$ und der Relativgeschwindigkeit und –beschleunigung. Die Zeitkoordinaten werden nicht transformiert, da $t = t_G$ zu setzen ist. Im Spezialfall zweier Inertialsysteme muß in der Newtonschen Mechanik die *Galilei Transformation* benutzt werden. Dies gilt aber nur für Objektgeschwindigkeiten, welche klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind.

Für beliebige Relativgeschwindigkeiten gilt die *spezielle Relativitätstheorie*, welche zwei Koordinatensysteme über die *Lorentz Transformation* zueinander in Beziehung setzt. Dies verlangt die Aufgabe des Begriffes der *absoluten Zeit*. (Die Konsequenzen dieser Theorie sind inzwischen sehr gut experimentell bestätigt.)

Betrachten wir nun wieder unsere zwei lokalen Bezugssysteme, und nehmen wir nun an, daß die Entfernung von G mit der Hubbledistanz H^{-1} vergleichbar ist. Damit ist die Fluchtgeschwindigkeit mit der des Lichts vergleichbar. Die Transformationen der Newtonschen Mechanik sind sicher nicht mehr anwendbar. Man kann aber auch die Lorentztransformation nicht mehr einsetzen, weil unsere Galaxis und die Galaxis G unter dem Einfluß der Schwerkraft *relativ zueinander beschleunigt* sein können. In einem solchen Fall gilt aber die spezielle Relativitätstheorie nicht mehr.

Wir brauchen also eine Erweiterung der Newtonschen Mechanik über die spezielle Relativitätstheorie hinaus, wenn wir Ereignisse im kosmischen Maßstab beschreiben wollen – die *allgemeine Relativitätstheorie.* Sie soll es zum Beispiel erlauben die Übermittlung von Lichtsignalen und die Beziehung zwischen den Koordinaten von Bezugssystemen untersuchen zu können, welche zueinander beliebig beschleunigt sind. Wir brauchen also eine physikalische Theorie, die die Konfiguration und Bewegung des Systems der Galaxien *erklärt*, wir brauchen also zu einer vollständigen Mechanik nicht nur eine Kinematik, sondern auch eine Dynamik. Quanteneffekte kann man wohl zunächst ignorieren, weil sie nur im Bereich kleiner Massen und im mikroskopischen Bereich wesentlich sind.

In der Newtonschen Mechanik werden "Wechselwirkungen" und "Einflüsse" durch *Kräfte* beschrieben. Welche Kräfte wirken auf eine Galaxie? Kaum solche, welche ihren Ursprung außerhalb des Systems der anderen Galaxien haben, da – nach derzeitigem Wissen – das Weltall keine größeren Bestandteile als Galaxien hat. Galaxien wirken aber aufeinander durch *Gravitation*, alle anderen Kräfte sind vernachlässigbar.

Die Gravitation ist die *schwächste* physikalische Kraft, wie ein Vergleich mit der elektrostatischen Kraft zeigt: das Verhältnis Schwerkraft zur elektrostatischen Kraft zwischen einem Elektron und einem Proton ist 4×10^{-40}. Die Schwerkraft ist somit in diesem Bereich unwesentlich. Die Schwerkraft hat aber zwei Eigenschaften, welche sie im astronomischen Maßstab alle anderen Kräfte übertreffen läßt. Sie hat eine *große Reichweite*, weil sie nur mit $1/r^2$ abfällt und sie ist auch nicht *abgeschirmt*, da es nur positive Massen gibt.

1.3 Die Gravitation in der Newtonschen Mechanik

Wir haben zunächst das zweite Newtonsche Gesetz

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{1.8}$$

welches besagt, daß die Beschleunigung $\mathbf{a}$ eines Körpers der Masse m durch die gesamte auf ihn wirkende Kraft $\mathbf{F}$ bestimmt ist. $\mathbf{F}$ kann seine Ursache natürlich auch in der Gravitation haben. Für diesen Fall ist $\mathbf{F}$ durch das Gravitationsgesetz bestimmt:

$$\mathbf{F} = -Gm \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \tag{1.9}$$

wenn die Masse m im Punkte $\mathbf{r}$ der Schwerkraftwirkung von N Massen m_i in den Punkten $\mathbf{r}_i$ ausgesetzt ist. G ist die Gravitationskonstante:

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}. \tag{1.10}$$

Die Masse m, die den Widerstand eines Körpers gegenüber Kräften beschreibt (Gl. (1.8)) – die *Trägheit* – ist also auch die Masse, welche die

Größe der auf diese Masse wirkenden Schwerkraft beschreibt – also die *passive schwere Masse.*

Aus dieser Doppelrolle von m folgt unmittelbar

$$\mathbf{a} = -G \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}; \tag{1.11}$$

die Beschleunigung eines Teilchens im Gravitationsfeld ist somit von seiner Masse unabhängig. (Dieses Ergebnis war schon Galilei bekannt.)

Wir definieren nun die verschiedenen Arten von Massen genauer: die *träge Masse* kommt in (1.8) vor und soll mit m_I bezeichnet werden. Die *schwere Masse* m_G kommt in (1.9) in zwei Rollen vor: *passiv* (m_G^P), indem sie die Kraft bestimmt, die andere Körper auf diesen Körper ausüben, und *aktiv* (m_G^A), indem sie die Kraft bestimmt, mit der der Körper andere Körper anzieht. Das Experiment legt nahe:

$$m_I = m_G^P. \tag{1.12}$$

Die genaueste experimentelle Überprüfung erfolgte 1964. Es wurde gezeigt, daß Aluminium und Gold mit Beschleunigungen zur Sonne hin fallen, welche bis auf 10^{-11} übereinstimmen. Wir können daher (1.12) als ein *Naturgesetz* ansehen.

Die Gleichheit von m_G^P und m_G^A ist hingegen kein unabhängiges Naturgesetz; sie folgt aus dem dritten Newtonschen Gesetz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{2\to1} &= -Gm_{G1}^P m_{G2}^A \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\
\mathbf{F}_{1\to2} &= -Gm_{G2}^P m_{G1}^A \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\
|\mathbf{F}_{2\to1}| &= |\mathbf{F}_{1\to2}| \quad \text{3. Gesetz} \\
Gm_{G1}^P m_{G2}^A \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} &= Gm_{G2}^P m_{G1}^A \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\
m_{G1}^P m_{G2}^A &= m_{G2}^P m_{G1}^A \\
\frac{m_{G1}^P}{m_{G2}^P} &= \frac{m_{G1}^A}{m_{G2}^A}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

und es gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$m_G^P = m_G^A. \tag{1.14}$$

Wir sehen also, daß die Gravitationskraft im Rahmen der Newtonschen Mechanik eine besondere Rolle spielt. Die Beschleunigung eines Körpers im Gravitationsfeld hängt *nicht* von seiner trägen Masse ab, seine Masse tritt

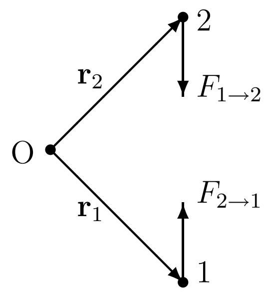


Abbildung 1.3: Zum Beweis der Gleichung (1.14).

aber bestimmend für das Gravitationsfeld auf. Warum ist die Gravitation so ungewöhnlich? Ist es möglich eine Theorie der Gravitation zu gewinnen, aus der folgt, daß alle Massen im Gravitationsfeld gleich beschleunigt werden? (Dies würde (1.12) als Naturgesetz überflüssig machen.)

Schließlich ist noch anzumerken, daß gewisse Beobachtungen der Planetenkinematik mit den Vorhersagen der Newtonschen Mechanik nicht in Einklang zu bringen sind. Besonders sei hier auf die Präzession des Merkur-

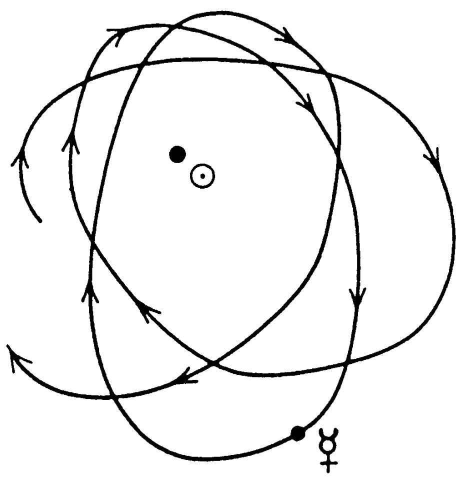


Abbildung 1.4: Die Perihelpräzession des Merkur (stark übertrieben).

perihels hingewiesen. Sie sollte in 100 Jahren den Wert

$$\Delta\phi_N^{100} = (5557.62 \pm 0.20)''$$

betragen; tatsächlich wird aber

$$\Delta\phi_{\mathrm{obs}}^{100} = (5600.73 \pm 0.40)''$$

beobachtet. Diese Abweichung ist zu groß um tolerierbar zu sein. (Der Fehler beträgt $(43.11 \pm 0.45)''$.)

1.4 Inertialsysteme in der Newtonschen Mechanik

Man sieht leicht, daß Newtons zweites Gesetz (1.8) nicht in allen Bezugssystemen gelten kann. Die rechte Seite von (1.8) beschreibt mit $\mathbf{F}$ die Wirkungen, die alle Körper in der Welt auf den Probekörper ausüben; $\mathbf{F}$ ist dabei *invariant*, also unabhängig vom gewählten Koordinatensystem. Die linke Seite hingegen enthält mit $m\,\mathbf{a}$ die Beschleunigung des Probekörpers relativ zu einem bestimmten Koordinatensystem und ändert sich somit von einem System zu einem anderen. Wir haben nun ein System gefunden, in welchem $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ gilt, wir wählen nun einfach ein anderes Bezugssystem, welches sich mit einer Beschleunigung $\mathbf{A}$ relativ zum ersten bewegt. In diesem erfährt unser Probekörper dann eine Beschleunigung $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{A}$; es gilt aber nicht mehr $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}'$, sondern $\mathbf{F} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{A})$; nachdem aber $\mathbf{F}$ eine Invariante ist, ist dies nicht mehr Newtons Gesetz.

Die speziellen Bezugssysteme, in denen die Newtonsche Mechanik gilt, sind die *Inertialsysteme*. (Es sind also Systeme, in denen das erste Gesetz – das Trägheitsgesetz gilt.) In der Nähe jedes Raumzeitpunktes (Ereignisses) gibt es unendlich viele Inertialsysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, weil die Beschleunigung eines Probekörpers bezüglich eines Systems f dieselbe ist, wie die Beschleunigung mit Bezug auf ein zweites System f', das sich relativ zu f mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wenn das Newtonsche Gesetz in f gilt, so gilt es auch in f'. $\Longrightarrow$ *Physikalische Gesetze in verschiedenen Inertialsystemen sind gleich.*

Es stellt sich die Frage: warum zeichnet die Natur ein solches "bevorzugtes" Bezugssystem aus? Was bestimmt, daß ein System ein Inertialsystem ist? Inertialsysteme drehen sich nicht, sie beschleunigen nicht – aber relativ zu was? Newton sagte: der *absolute Raum.*

Drei Einwände:

- Wie soll man erkennen, *welches* Bezugssystem relativ zum absoluten Raum in Ruhe ist?
- Der absolute Raum ist eine physikalische Größe, er wirkt auf die Materie, aber die Materie wirkt nicht auf ihn. Einstein: "Es widerstrebt dem wissenschaftlichen Verstand ein Ding zu setzen, welches zwar wirkt, auf welches aber nicht gewirkt werden kann."

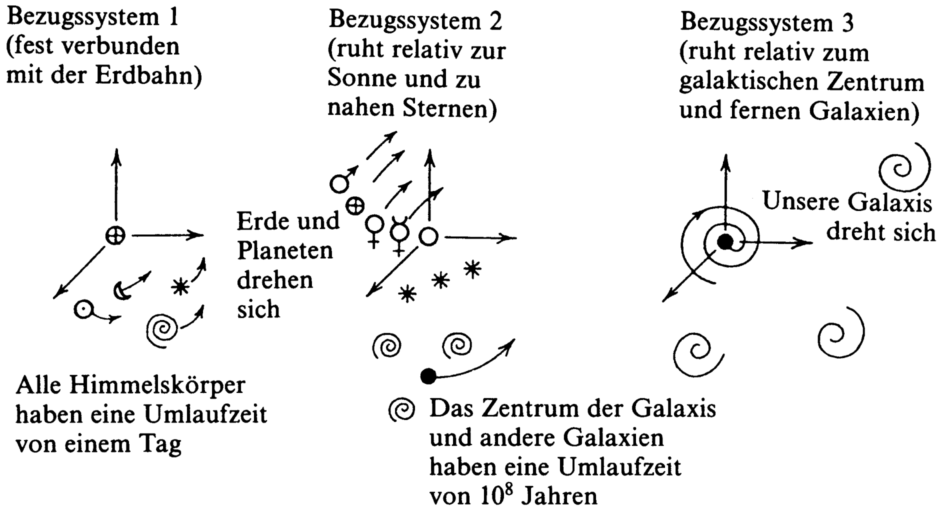


Abbildung 1.5: Sukzessive Näherungen an Newtons Inertialsystem.

- Aus der Beobachtung folgt:
  Die starre Erde ist für viele Zwecke eine gute Näherung für ein Inertialsystem – die Newtonschen Gesetze lassen sich im Labor bestätigen. Die Erde dreht sich aber, und die Sonne ist sicher ein besseres System, da sie relativ zur mittleren Bewegung der nahen Sterne in Ruhe ist. Die Sonne dreht sich aber um das Zentrum der Galaxis. Ein System, in welchem der Mittelpunkt der Galaxis relativ zur mittleren Bewegung der anderen Galaxien ruht, ist deshalb ein noch besseres Inertialsystem. In diesem System läßt sich die Dynamik unserer Galaxis im Rahmen der Newtonschen Mechanik verstehen.

Die Erde rotiert um die Sonne mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega_{12} = \frac{2\pi}{24}\ \mathrm{h}^{-1},$$

die Sonne um das Zentrum der Milchstraße mit

$$\omega_{23} = \frac{2\pi\, 10^{-8}}{24 \cdot 365} \sim 3 \cdot 10^{-11} \omega_{12}.$$

Dies sieht wie eine rasch konvergierende Reihe von Näherungen an ein ideales Newtonsches Inertialsystem aus. Dieses System ist *relativ zur mittleren Bewegung der Materie in Ruhe.* Da sich das Weltall ausdehnt, kann man dieses “beste System” äquivalent dadurch beschreiben, daß diese Expansion von ihm aus isotrop erscheint. Damit ergibt sich der dritte Einwand gegen

Newtons absoluten Raum: alle Beobachtungshinweise lassen sich durch ihn nicht erklären. Der Raum scheint nicht absolut zu sein, er scheint irgendwie an die Materieverteilung im Großen gebunden.

1.5 Warum genügt die spezielle Relativitätstheorie nicht?

Aufgrund der bereits aus Maxwells Theorie bekannten Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

mit ε_0 und μ_0 voneinander unabhängigen elektrischen und magnetischen Größen, wurde die Lichtgeschwindigkeit als elektromagnetisches Phänomen identifiziert. Damit gelang auch eine Verbindung zwischen Optik und Elektromagnetismus. Auf welches System bezieht sich aber c? Die Antwort war im neunzehnten Jahrhundert: der *Äther*. Dieser Äther wurde mit Newtons absolutem Raum gleichgesetzt, wodurch dann eine Vereinheitlichung von Elektromagnetismus und Mechanik gelang. Es war dann notwendig die Geschwindigkeit der Erde durch den Äther zu bestimmen. Das Experiment von Michelson und Morley (1887) zeigte aber, daß, innerhalb des kleinen Meßfehlers, die Lichtgeschwindigkeit auf der Erde in jede Richtung gleich groß ist. Die Erde "schleppt" also den Äther mit sich!?

Die Frage, warum eine Bewegung relativ zum Äther nicht entdeckt werden konnte, wurde 1905 von Einstein beantwortet: Er ging von Galileis Relativitätsprinzip aus, welches behauptete, daß in allen Inertialsystemen dieselben physikalischen Gesetze gelten müßten. Er übernahm aber nicht die Galilei–Transformation:

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t, \tag{1.15}$$

welche zwei Systeme f und f' zueinander in Beziehung setzen. f' bewegt sich dabei mit einer Geschwindigkeit v entlang der positiven x–Achse von f. Einstein setzte voraus:

$$\boxed{\text{Die Lichtgeschwindigkeit } c \text{ ist in allen Inertialsystemen gleich.}}$$

Dieses Postulat ergibt zusammen mit Galileis Relativitätsprinzip jene Transformation, welche bereits zuvor von Lorentz aus der Maxwellschen Theorie abgeleitet werden konnte:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' &=& y \\ z' &=& z \\ t' &=& \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{array}\right\} \tag{1.16}$$

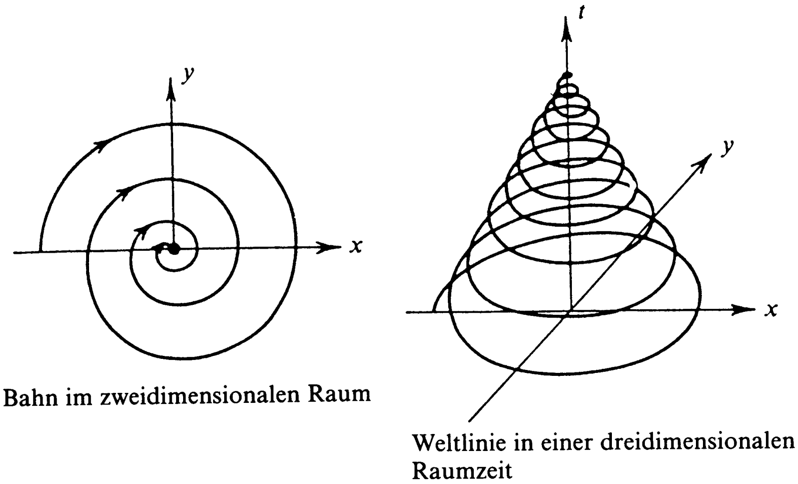


Abbildung 1.6: Der Unterschied zwischen Raum und Raumzeit.

Diese Beziehungen stehen am Beginn der *speziellen Relativitätstheorie,* deren Gültigkeit täglich in allen Teilchenbeschleunigern aufs Neue bestätigt wird. Sie vereinigt die Mechanik mit dem Elektromagnetismus, sie zeigt aber auch, daß der absolute Raum – soferne er überhaupt existiert – nicht mit dem Äther gleichgesetzt werden kann. Sie ist aber nicht in der Lage die Probleme mit der Gravitation (Abschnitt 1.3) bzw. das Problem absoluter Raum (Abschnitt 1.4) zu lösen. Man weiß zwar wie Inertialsysteme ineinander transformieren, man weiß aber nicht, was bestimmt, daß ein bestimmtes System ein Inertialsystem ist, oder warum das System, welches relativ zur mittleren Materieverteilung des Weltalls ruht, ein Inertialsystem ist. Man kann der speziellen Relativitätstheorie sogar auch noch die Gravitation aufpfropfen, es bleibt aber das Problem der Gleichheit von m_I und m_G^P und auch der größte Teil der anormalen Präzession des Merkur ungeklärt.

Eine erfolgreiche *allgemeine Relativitätstheorie,* welche diese Probleme löst, muß aber offensichtlich mit der speziellen Relativitätstheorie verträglich sein; sie muß sich also in Grenzfällen, welche noch zu definieren sind, auf diese reduzieren. Dies bedeutet, daß wir, so wie in der speziellen Relativitätstheorie, Ereignisse in der *Raumzeit* beschreiben. Die *Geschichte* eines Körpers, der sich im Raum auf einer Bahn bewegt, wird durch eine Gerade in der Raumzeit beschrieben. Dies ist eine *Weltlinie* des Körpers.

Diese Raumzeit ist *vierdimensional.* (Der Begriff Raumzeit wurde von Minkovski 1908 in die spezielle Relativitätstheorie eingeführt.) Dies ist nicht nur eine triviale Erweiterung der Nomenklatur – wir können ein Ereignis durch irgendwelche vier Zahlen beschreiben, welche keine Ähnlichkeit mit Orts– und Zeitkoordinaten zu haben brauchen, und wir wissen aus der speziellen Relativitätstheorie, daß Zeitintervalle zwischen Ereignissen nicht invariant sind, sondern sich in relativ zueinander bewegten Systemen unterscheiden. So sehen wir, daß ein weiterer Bestandteil einer allgemeinen Relativitätstheorie die *Geometrie* ist, welche es uns erlaubt, in der vierdimensionalen Raumzeit Kurven zu untersuchen.

1.6 Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip

Wir untersuchen einen Bereich der Raumzeit, in dem in einem Bezugssystem f ein konstantes Gravitationsfeld $\mathbf{g}$ wirkt. Auf ein Teilchen der Masse m wirkt damit eine Schwerkraft von $m\mathbf{g}$. Ein solcher Bereich ist nun zum Beispiel die Umgebung eines jeden Punktes auf der Erdoberfläche. Wäre die Schwerkraft die einzige wirkende Kraft, so würden alle Körper des Bereiches mit derselben Beschleunigung $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ fallen. Wir können nun die Wirkung der Schwerkraft ausschalten, wenn wir von einem System f auf ein System f' übergehen, welches relativ zu f die Beschleunigung $\mathbf{g}$ hat. Wenn nicht eine Kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{ng}}$ wirkt, welche keine Schwerkraft ist, scheint sich dann in f' jeder Körper ohne Beschleunigung zu bewegen. In f ergibt sich dann:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\mathrm{ng}}.$$

in f' ist dann die Beschleunigung $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{g}$ und deshalb gilt

$$m(\mathbf{a}' + \mathbf{g}) = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\mathrm{ng}}$$

oder

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\mathrm{ng}}. \qquad (1.17)$$

In (1.17) treten keine Gravitationskräfte auf, das System f' befindet sich im *freien Fall.* Aus der Gleichheit von schwerer und träger Masse folgt dann:

> In einem kleinen Labor, das in einem Schwerefeld frei fällt, sind die mechanischen Phänomene dieselben wie jene, die in Abwesenheit eines Schwerefeldes in einem Newtonschen Inertialsystem beobachtet werden.

1907 erweiterte Einstein diese Beobachtung zum Äquivalenzprinzip, indem er “mechanische Phänomene” durch “Gesetze der Physik” ersetzte.

Wann ist nun ein Labor “klein”? Nachdem $\mathbf{g}$ zum Massenschwerpunkt zeigt, so ist das Gravitationsfeld anisotrop: in jedem Punkt hat $\mathbf{g}$ eine andere Richtung und zudem ändert sich $\mathbf{g}$ mit dem Abstand vom Schwerpunkt, wie in Abb. 1.7 dargestellt ist.

Ein Bezugssystem stellt aber eine *starre* Anordnung von Koordinatenachsen dar; es kann deshalb nur mit einer einzigen Beschleunigung fallen. (In

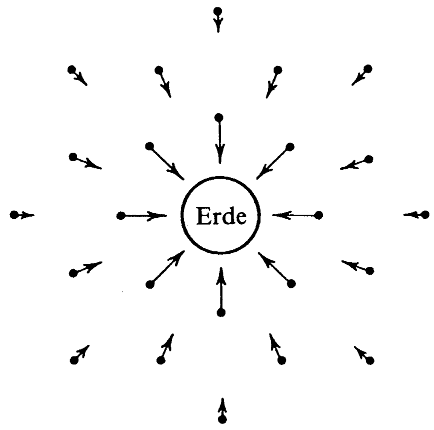


Abbildung 1.7: Anisotropes (inhomogenes) Gravitationsfeld.

einem "großen" Labor fällt daher nur der Massenmittelpunkt frei.) Man kann dies leicht über folgendes Experiment beobachten: wir betrachten ein Labor, welches zwei Teilchen enthält, welche gleich weit von der Erde entfernt sind. (Siehe Abb. 1.8.) Das Labor und die Teilchen fallen zum Erdmittelpunkt hin, und, da sich die Teilchen entlang der Radien bewegen, kommen sie einander näher. (Der Beobachter befindet sich dabei im Labor!)

Haben die beiden Teilchen den Abstand d, ist weiters R ihre Entfernung vom Erdmittelpunkt und h die Fallhöhe, so ist die Relativgeschwindigkeit durch

$$u = \frac{d}{R}\sqrt{2gh} \tag{1.18}$$

gegeben. (Für $d = 10$ m, $h = 10$ km ergibt sich $u \sim 10^{-3}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$.) Nach (1.18) ist u proportional d, und somit ist für kleine d (also kleine Labors) die Anisotropie von $\mathbf{g}$ nicht mehr relevant.

Diese frei fallenden Bezugssysteme in der Umgebung eines Ereignisses werden *lokale Inertialsysteme* genannt und sind für die Relativitätstheorie wichtig. In ihnen kann die Existenz der Schwerkraft nicht nachgewiesen werden, und sie kommen daher dem Begriff des Newtonschen Inertialsystemes schon sehr nahe. In der Nähe jedes Ereignisses gibt es nun unendlich viele lokale Inertialsysteme, welche sich alle mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Innerhalb dieser Systeme gilt dann die spezielle Relativitätstheorie streng und wir können unter Verwendung der Lorentztransformation die Koordinaten des Ereignisses von einem System in das nächste transformieren.

Diese lokalen Inertialsysteme sind eine Einschränkung *und* eine Erweiterung des Newtonschen Inertialsystems: eine Einschränkung, weil wegen der

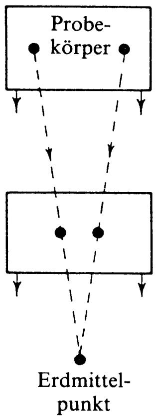


Abbildung 1.8: Zur “Kleinheit” des Einstein – Labors.

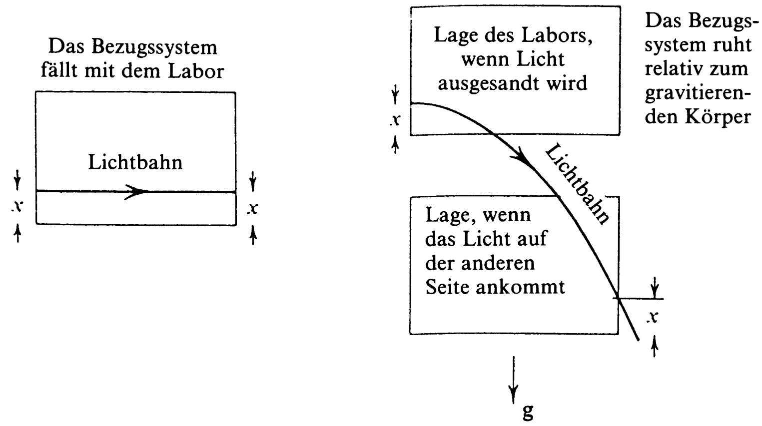


Abbildung 1.9: Ablenkung des Lichtes im Schwerefeld.

Inhomogenität der Gravitationsfelder diese nur lokal anwendbar sind und nicht (homogen) unendlich weit reichen, eine Erweiterung, weil *jedes* frei fallende Labor ein lokales Inertialsystem ist – es kann relativ zum “absoluten” Raum oder zu den Galaxien beschleunigt werden.

Wir müssen also die Raumzeit mit lauter lokalen Inertialsystemen überdecken, die Verknüpfung dieser einzelnen Systeme ist dann die Aufgabe der allgemeinen Realtivitätstheorie.

Das Äquivalenzprinzip führt zu zwei überprüfbaren Aussagen über die Lichtausbreitung:

(a) Das Licht wird in einem Schwerefeld abgelenkt.

Wir betrachten ein frei fallendes Labor. Von einer Seite wird ein Lichtstrahl ausgesandt. Für einen Beobachter im Inneren des Labors breitet sich das Licht geradlinig mit Lichtgeschwindigkeit aus und trifft die gegenüberliegende Wand im selben Abstand vom Boden. Für einen Beobachter von außen fällt das Labor aber – es wird mit **g** beschleunigt! Somit wird für diesen Beobachter das Licht ebenfalls nach unten beschleunigt, es pflanzt sich also längs einer gekrümmten Bahn fort. (Siehe auch entsprechende Darstellung in Abb. 1.9.) Beobachtbar sollte die Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne sein.

(b) Gravitationsverschiebung der Spektrallinien.
Es wird dabei wieder ein Labor aus der Höhe h_0 aus der Ruhe fallen gelassen, während Licht der Frequenz ν_e vom Boden des Labors nach oben geschickt wird. Nach dem Äquivalenzprinzip kommt es nach der Zeit $t = h_0/c$ an der Decke an und hat für den dortigen Beobachter wieder die Frequenz ν_e. Ein Beobachter außerhalb des fallenden Labors bewegt sich nun relativ zum Labor mit der Geschwindigkeit $u = gt = gh_0/c$ nach oben – und damit vom Licht weg. Daher sieht dieser Beobachter das Licht rotverschoben:

$$Z = \frac{u}{c} = \frac{gh_0}{c^2}.$$

Für Licht, welches fällt, ergibt sich eine Blauverschiebung desselben Ausmaßes. Dies konnte von Pound und Rebeka 1960 experimentell beobachtet werden. Sie ließen die beim radioaktiven Zerfall von ^{57}Fe entstehende Gammastrahlung von 14.4 keV in einem Turm von 22.6 m "fallen". Das experimentelle Ergebnis ist der theoretischen Erwartung in der dieser Tabelle gegenübergestellt:

Theorie	Experiment
$Z = -2.47 \cdot 10^{-15}$	$Z = -2.57 \cdot 10^{-15}$

Die Übereinstimmung ist exzellent und das Äquivalenzprinzip wurde damit eindrucksvoll bestätigt.