Kapitel 3

Differentialgeometrie

3.1 Definition eines metrischen Raumes

Metrischer Raum: Ein metrischer Raum ist eine Menge M und eine reellwertige Funktion $d(x, y)$ auf $M \times M$. Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

1. $d(x, y) \geq 0, \qquad x \in M, y \in M$
2. $d(x, y) = 0$ nur wenn $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \qquad z \in M$

Diese Funktion d wird auch die *Metrik* von M genannt. Elemente metrischer Räume werden als *Punkte* bezeichnet. Ganz allgemein kann die Menge M auf unterschiedliche Weise zu einem metrischen Raum gemacht werden. Man bezeichnet den metrischen Raum auch oft mit $\langle M, d \rangle$, wobei die Metrik nicht explizit angegeben wird.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{R}^n \\ x &= (x^1, \ldots, x^n) \\ y &= (y^1, \ldots, y^n) \\ d(x, y) &= \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Es sei nun, entsprechend Abb. 3.1, M der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$, also die Menge aller Paare von reellen Zahlen $\langle \alpha, \beta \rangle$, für welche $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ist. Es besteht nun die Möglichkeit für die Metrik durch

$$d_1(\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha', \beta' \rangle) = d_1(p, p') = \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}$$

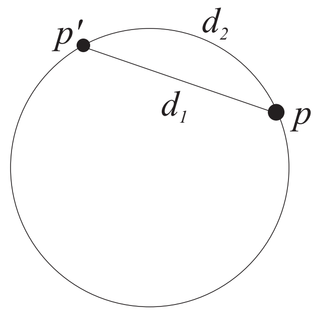


Abbildung 3.1: Metrische Räume am Einheitskreis.

oder durch
$$d_2(p, p') = \text{Bogenlänge von } p \text{ nach } p'.$$
definiert zu werden.

Konvergenz: Eine Folge von Elementen $\{x_n, n = 1, \ldots, \infty\}$ des metrischen Raumes $\langle M, d\rangle$ *konvergiert* zum Element $x \in M$, wenn $d(x, x_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Dies wird häufig mit $x_n \xrightarrow{d} x$ oder mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bezeichnet.

Im Beispiel 2 gilt etwa:
$$d_1(p, p') \leq d_2(p, p') \leq \pi d_1(p, p').$$

Daraus ersehen wir, daß $p_n \xrightarrow{d_1} p$ nur möglich ist, wenn auch $p_n \xrightarrow{d_2} p$ gilt.

Cauchy Menge: Man nennt eine Menge von Elementen $\{x_n\}$ des metrischen Raumes $\langle M, d\rangle$ eine *Cauchysche Menge*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein N derart existiert, daß für $n, m \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ wird. Eine konvergente Menge ist eine Cauchysche Menge. Ein metrischer Raum, in welchem alle Cauchy – Mengen konvergieren, ist *vollständig*.

Weitere Definitionen: Wir definieren noch für den metrischen Raum $\langle X, d\rangle$:

1. Die Menge $\{x\}$ mit $x \in X$ und $d(x, y) < r$ wird *offene Kugel* $B(y; r)$ vom Radius r um den Punkt $y \in X$ genannt.
2. Die Teilmenge O von X ($O \subset X$) ist *offen*, wenn für alle $y \in O$ ein $r > 0$ derart existiert, daß $B(y; r)$ eine Teilmenge von O ist.
3. Eine Teilmenge N von X ist eine *Umgebung* von $y \in N$, wenn die offene Kugel $B(y; r)$ eine Teilmenge von N für irgendein r ist.

4. Es ist E eine Teilmenge von X. Ein Punkt x wird dann *Endpunkt* von E genannt, wenn für alle $r > 0$ der Durchschnitt der offenen Kugel $B(x;r)$ mit $(E \setminus \{x\})$ nicht die Nullmenge ist, also E andere Punkte als x beliebig nahe zu x enthält.
5. Die Teilmenge F von X ist *endlich*, wenn sie alle Endpunkte enthält.
6. Ist G eine Teilmenge von X, so ist $x \in G$ ein innerer Punkt von G, wenn G eine Umgebung von x ist.

3.2 Topologische Räume, der Hausdorff Raum

Topologischer Raum: Ein *topologischer Raum* ist eine Menge S mit einem System von Teilmengen T, welche offene Mengen sind und folgende Eigenschaften haben:

1. Endliche Durchschnitte von Mengen aus T gehören wieder zu T:
$$A, B \in T, \qquad A \cap B \in T$$
2. Beliebige Vereinigungen von Mengen aus T gehören wieder zu T:
$$A_\alpha \in T; \qquad \alpha \in I; \qquad \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in T,$$
wobei I die Indexmenge ist.
3. Die Nullmenge ist in T enthalten und $S \in T$.

Die so eingeführten Mengen T nennt man *Topologie*.

Das beste Beispiel für einen topologischen Raum ist ein metrischer Raum.

Homöomorphie: Zwei topologische Räume S_1 und S_2 heißen *homöomorph*, wenn es eine eindeutige Abbildung der Punkte von S_1 auf die Punkte von S_2 gibt, bei der jede offene Menge von S_1 in eine offene Menge von S_2 übergeht und umgekehrt.

Hausdorff Raum: Es ist dies ein topologischer Raum, in welchem für alle x und y, $x \neq y$, offene Mengen O_1 und O_2 existieren, mit $x \in O_1$ und $y \in O_2$, wobei der Durchschnitt der beiden Mengen die Nullmenge ergibt, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Der Raum ist also so reichhaltig, daß man mit seiner Hilfe Punkte aus der dem Raum zugeordneten Menge S trennen kann.

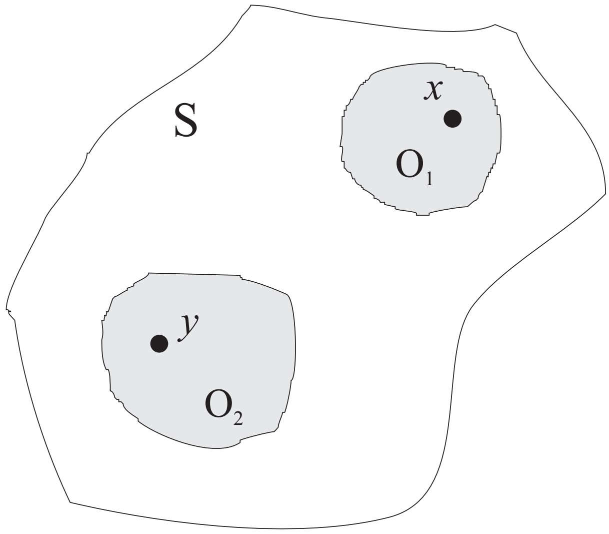


Abbildung 3.2: Der Hausdorff Raum

Umgebung eines Punktes: Jede Teilmenge des topologischen Raumes S, die eine den Punkt x enthaltende offene Teilmenge enthält, heißt die *Umgebung* von x.

3.3 Problemorientierte Einführung von Mannigfaltigkeiten

Für unser Modell der Raumzeit benötigen wir einen topologischen Raum, welcher lokal wie der $\mathbb{R}^4$ aussieht – ein euklidischer vierdimensionaler Raum. Auf diesem einzuführenden Raum sollen die bekannten Infinitesimal–Operationen anwendbar sein. Dies verlangt schließlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche wir nun in allgemeiner Form n–dimensional einführen wollen.

Eine n–dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff Raum M, welcher für jeden Punkt in M eine offene Umgebung besitzt, welche homöomorph einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$ ist.

Es ist also M mit einer Klasse von offenen Mengen U_i in einer Weise bedeckt, daß zwischen jeder offene Menge von M und einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus existiert. Dieser Homöomorphismus wird *Karte* von M genannt. U_i ist dann das *Kartengebiet*, oder der *Bereich* der Karte. Wenn wir nun einen Punkt $p \in M$ betrachten, welcher einer bestimmten offenen Menge, etwa U_1, angehört (Abb. 3.3), dann ist seine Abbildung im $\mathbb{R}^n$ unter der Karte $U_1 \xrightarrow{x^a} \mathbb{R}^n$ eine Menge von Zahlen $x^a[p]$, welche wir die *Koordinaten* von p (relativ zum Bereich U_i) nennen.

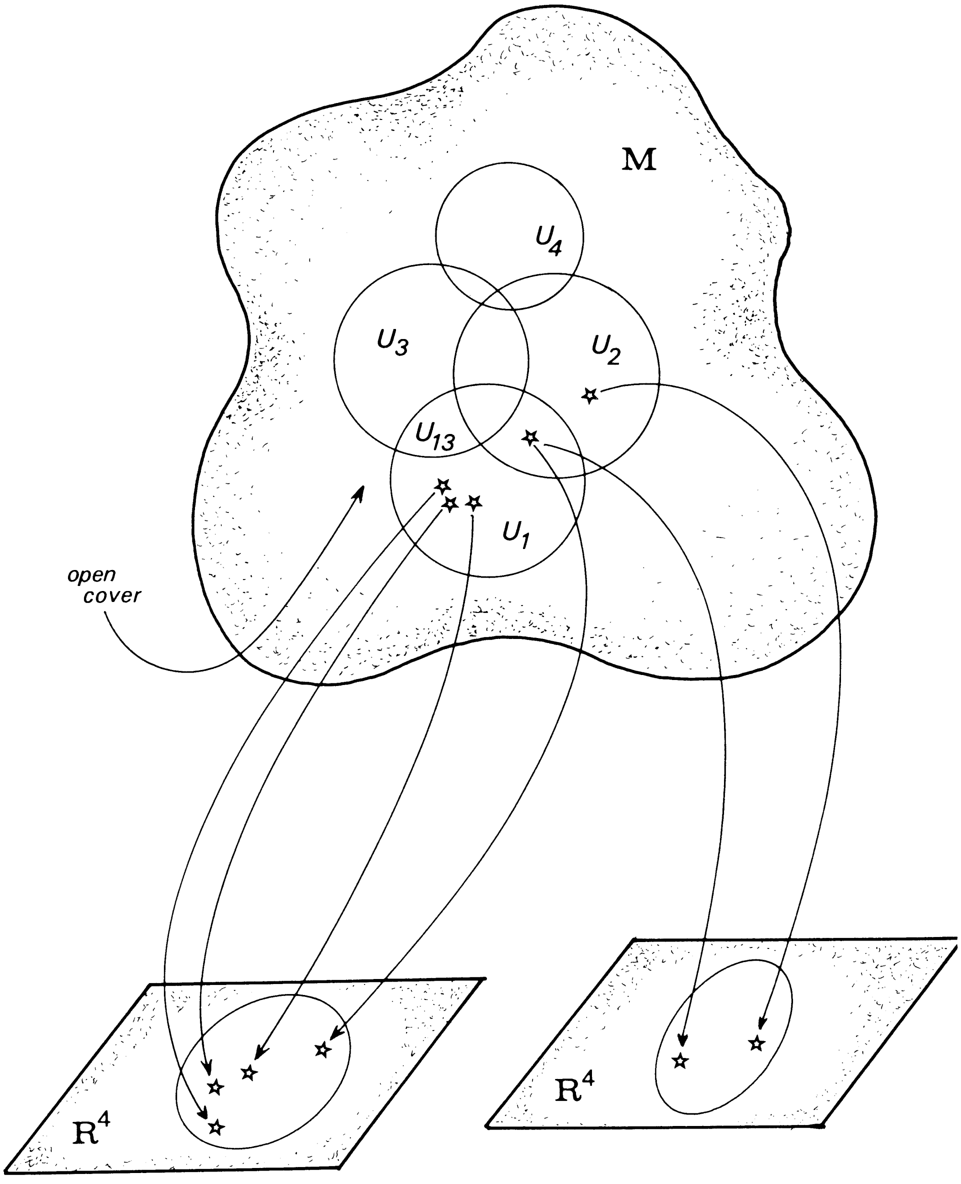


Abbildung 3.3: Zuordnung zwischen offenen Mengen und Karten

Es sei nun $U_{ij} = U_i \cap U_j$ die Bezeichnung für die verschiedenen Durchschnitte von Kartenbereichen. Offensichtlich können wir für Punkte, welche in einem solchen Durchschnitt liegen, mehr als einen Satz von Koordinaten angeben. Es ist somit notwendig, daß ein Satz von Funktionen existiert, welcher den Kartenwechsel in den Überlappungsbereichen definiert.

Wir nehmen nun an, daß der Punkt p im Überlappungsbereich U_{12} liegt. Er habe die Karten $U_1 \xrightarrow{x^a} \mathbb{R}^n$ und $U_2 \xrightarrow{y^a} \mathbb{R}^n$. Wir haben somit $p \to x^a[p]$, wenn man p als in U_1 liegend annimmt, und $p \to y^a[p]$, wenn man p als in U_2 liegend annimmt. Wir benötigen also für $p \in U_{12}$ die Existenz einer Menge von Funktionen $x^a(y^b)$, in einer Weise, daß $x^a[p] = x^a(y^b[p])$ ist. Die Koordinaten $x^a[p]$ werden also durch die Koordinaten $y^b[p]$ ausgedrückt, was ein *Transformationsgesetz* etabliert.

Im Bereich des Durchschnitts dreier offener Mengen benötigen wir die folgenden Transformationsgesetze:

$$\begin{aligned} x^a[p] &= x^a(y^b[p]) \text{ in } U_{12} \\ y^a[p] &= y^a(z^b[p]) \text{ in } U_{23} \\ x^a[p] &= x^a(z^b[p]) \text{ in } U_{13} \end{aligned}$$

und es muß noch

$$x^a(y^b(z^c[p])) = x^a(z^c[p]) \text{ in } U_{123} = U_1 \cap U_2 \cap U_3$$

gelten.

Soll die Mannigfaltigkeit differenzierbar sein, so muß gefordert werden, daß die Übergangsfunktionen $x^a(y^b[p])$ differenzierbar sind. Sind diese Übergangsfunktionen in allen Ordnungen differenzierbar, so ist die Mannigfaltigkeit *glatt*.

3.4 Skalare Felder

Es sei nun $\phi(x^a)$ ein skalares Feld auf U_1 und $\psi(y^a)$ ein skalares Feld auf U_2. Stimmen sie auf U_{12} überein, dann beschreiben sie zusammen ein skalares Feld auf der Vereinigung $U_1 \cup U_2$. Übereinstimmung bedeutet dabei:

$$\phi(x^a[p]) = \psi(y^a[p]) \tag{3.1}$$

für alle $p \in U_{12} = U_1 \cap U_2$. Haben wir nun weiter einen Satz von skalaren Feldern, mit einem Feld für jede offene Menge aus M, welche in den Überlappungsbereichen entsprechend (3.1) übereinstimmen, dann haben wir ein skalares Feld, welches global auf der gesamten Mannigfaltigkeit definiert ist.

Wir wollen nun die Notation etwas kompakter gestalten, indem wir für (3.1)

$$\phi(x^a[p]) = \phi'(x'^a[p]) \quad \text{auf } U \cap U'$$

verkürzt

$$\phi(x^a) = \phi'(x'^b(x^a)) \tag{3.2}$$

schreiben. Wir verwenden hier, daß die Koordinaten $x'^b[p]$ aufgrund der Übergangsfunktionen durch $x^a[p]$ ausgedrückt werden können. Der spezielle Hinweis auf den Punkt p durch $[p]$ wird also fallen gelassen.

3.5 Kontra– und kovariante Vektorfelder

3.5.1 Kontravariante Vektorfelder

Solche Vektorfelder sind in der Analysis differenzierbarer Mannigfaltigkeiten durch die Untersuchung linearer Differentialoperatoren, welche auf Skalarfelder wirken, definiert. Intuitiv beschreibt die "Richtung", welche mit der Ableitung in jedem Punkt verbunden ist, die Richtungseigenschaften des zugehörigen Vektorfeldes.

Wir untersuchen ein Paar von Differentialoperatoren, welche auf den Mengen U und U' definiert sind:

$$\begin{aligned} V^a(x)\partial_a \quad &\text{auf} \quad U \\ V'^a(x')\partial'_a \quad &\text{auf} \quad U' \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit $\partial'_a = \partial/\partial x'^a$. Unter welchen Voraussetzungen stimmen sie überein? $\phi(x)$ ist nun ein Skalarfeld auf U und $\phi'(x')$ eines auf U' und es gelte $\phi(x) = \phi'(x')$ auf $U \cap U'$. Es muß dann für jedes solche Skalarfeld gelten:

$$V^a(x)\partial_a\phi(x) = V'^a\partial'_a\phi'(x') \quad \text{auf } U \cap U'.$$

Nun finden wir weiter:

$$\begin{aligned} V^a(x)\partial_a\phi(x) &= V^a(x)\partial_a x'^b\partial'_b\phi(x(x')) \\ &= (3.1) = V^a(x)\partial_a x'^b\partial'_b\phi'(x') \\ &= V^b(x)\partial_b x'^a\partial'_a\phi'(x') \\ &= V'^a(x')\partial'_a\phi'(x') \end{aligned}$$

oder

$$V'^a(x') = V^b(x)\partial_b x'^a \text{ in } U \cap U'. \tag{3.4}$$

Dies ist das *Transformationsgesetz* für ein kontravariantes Vektorfeld. Es vereinbart die Transformation in allen Komponenten eines kovarianten Vektorfeldes beim Kartenwechsel.

3.5.2 Kovariante Vektorfelder

Diese formen ein spezielles System von Vektorfeldern auf der Mannigfaltigkeit. Sie sind natürlich 'dual' zu den kontravarianten Vektorfeldern. Das Transformationsgesetz für kovariante Vektorfelder ist durch

$$A'_a(x') = A_b(x)\partial'_a x^b \text{ in } U \cap U' \tag{3.5}$$

gegeben, wobei $\partial'_a x^b$ üblicherweise als *Jacobi–Matrix* bezeichnet wird.

Wodurch entstehen nun solche Felder? Wir betrachten wieder ein skalares Feld $\phi(x)$ mit $\phi(x) = \phi'(x')$ auf $U \cap U'$. Nun wird für jeden Kartenbereich der Gradient gebildet:

$$\begin{aligned} A_a(x) &= \partial_a \phi(x) \\ A'_a(x') &= \partial'_a \phi'(x'), \end{aligned} \tag{3.6}$$

und so weiter. Wie transformiert nun dieses System? Es gilt:

$$\begin{aligned} A_b(x) &= \partial_b \phi(x) \\ &= \partial_b x'^c \partial'_c \phi(x(x')) \text{ in } U \cap U' \\ &= (3.2) = \partial_b x'^c \partial'_c \phi'(x') \\ &= (3.6) = \partial_b x'^c A'_c(x') \quad | \cdot \partial'_a x^b \end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$A_b(x)\partial'_a x^b = \partial'_a x^b \partial_b x'^c A'_c(x').$$

Nun gilt aber:

$$\partial'_a x^b \, \partial_b x'^c = \delta^c{}_a$$

und es folgt das bereits in (3.5) eingeführte Transformationsgesetz

$$A_b(x)\partial'_a x^b = A'_a(x').$$

Wir sehen daraus, daß der Gradient eines Skalarfeldes wie ein kovariantes Vektorfeld transformiert.

Theorem 3.1 *Das Produkt $P = A_a(x)\, V^a(x)$ gebildet zwischen einem ko– und einem kontravarianten Vektor ist eine skalare Invariante.*

Beweis. Wir untersuchen den transformierten Ausdruck:

$$\begin{aligned} P' &= A'_a(x') V'^a(x') \\ &= A_b(x)\partial'_a x^b \, V^c(x)\partial_c x'^a \\ &= A_b(x) V^c(x) \underbrace{\partial'_a x^b \, \partial_c x'^a}_{=\delta^b{}_c} \\ &= A_b(x) V^b(x) \\ &= P. \end{aligned} \tag{3.7}$$

P ist somit ein Skalar und wir nennen P das *innere Produkt* zwischen einem ko- und einem kontravarianten Vektor.

3.6 Tensoren

3.6.1 Intrinsische Definition

Wir haben bereits die Transformationsgesetze für Vektoren in der Form (3.4) und (3.5) abgeleitet. Wir betrachten nun eine multilineare Form P:

$$P = T^{i_1,i_2,\ldots,i_a}_{j_1,j_2,\ldots,j_b} \left(x^{j_1}_{(1)}\, x^{j_2}_{(2)} \cdots x^{j_b}_{(b)}\right) \left(y^{(1)}_{i_1}\, y^{(2)}_{i_2} \cdots y^{(a)}_{i_a}\right) \tag{3.8}$$

wobei $x^{j_1}_{(1)}$ die j_1–te Komponente irgendeines kontravarianten Vektors $x_{(1)}$ ist, und $y^{(1)}_{i_1}$ ist die i_1–te Komponente irgendeines kovarianten Vektors $y_{(1)}$. Schließlich ist $T^{i_1,\ldots,i_a}_{j_1,\ldots,j_b}$ eine Menge von n^{a+b} Elementen mit a oberen und b unteren Indizes, welche kontra– und kovariante Indizes genannt werden.

Definitionsgemäß sagen wir, daß die Werte $T^{i_1,\ldots,i_a}_{j_1,\ldots,j_b}$ die Komponenten eines *Tensors* bilden, wenn für eine beliebige Änderung der Koordinaten, unter welcher die Vektoren x und y entsprechend (3.4) und (3.5) transformieren, die Tensorkomponenten so transformieren, daß P aus (3.8) unverändert bleibt. $T^{i_1,\ldots,i_a}_{j_1,\ldots,j_b}$ ist dann ein Tensor $(a+b)$–ter Stufe.

Ein Tensor nullter Stufe ist dann ein Skalar, eine Zahl, welche bei einem Kartenwechsel (Änderung der Koordinaten) unverändert bleibt. (Siehe Diskussion in Abschnitt 3.4.) Ein Tensor erster Stufe kann entweder kontravariant (T^i) oder kovariant (T_i) sein. Wir nehmen nun einen Tensor T^i und nach unserer Definition (3.8) können wir einen beliebigen Vektor y_i nehmen und $P = T^i y_i$ bilden. P muß dann ein Skalar sein, wie aus (3.7) folgt. Somit ist ein Tensor erster Stufe ein Vektor (ko– oder kontravariant).

Wir betrachten schließlich die g_{ik}, welche die Metrik in einem Raum definieren. Wir hatten für den Ereignisabstand:

$$\Delta\tau^2 = g_{ik}\Delta x^i \Delta x^k = \text{Invariante}$$

oder

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k = \text{Invariante}. \tag{3.9}$$

Unsere intrinsische Definition würde es nahe legen, daß die g_{ik} Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe sind. Aber aus unserer intrinsischen Definition folgt eigentlich:

$$P = T_{ik} x^i_{(1)} x^k_{(2)}$$

mit $x_{(1)}$ und $x_{(2)}$ zwei *beliebigen* Vektoren. Aus (3.9) sind aber $\mathrm{d}x^i$ und $\mathrm{d}x^k$ verschiedene Komponenten ein und desselben Vektors $\mathrm{d}x$. Wir können aber dx als einen beliebigen Vektor ansehen, welcher seinerseits als Summe zweier beliebiger anderer Vektoren geschrieben werden kann. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{ik}\left(\mathrm{d}x^i_{(1)} + \mathrm{d}x^i_{(2)}\right)\left(\mathrm{d}x^k_{(1)} + \mathrm{d}x^k_{(2)}\right) \\ &= g_{ik}\mathrm{d}x^i_{(1)}\mathrm{d}x^k_{(1)} + g_{ik}\mathrm{d}x^i_{(2)}\mathrm{d}x^k_{(2)} + 2g_{ik}\mathrm{d}x^i_{(1)}\mathrm{d}x^k_{(2)} \end{aligned}$$

und nachdem der dritte Term der Summe ein Skalar ist, müssen auch die ersten zwei Terme Skalare sein, womit gezeigt wurde, daß die g_{ik} kovariante Tensoren zweiter Stufe sind.

3.6.2 Das Transformationsgesetz

Wir gehen wieder so wie im Fall des Vektors vor, und schreiben nun die Invarianzforderung für P gegenüber beliebigem Kartenwechsel als

$$\begin{aligned} &T'^{i_1,i_2,\ldots,i_a}_{j_1,j_2,\ldots,j_b}\left(x'^{j_1}_{(1)}\, x'^{j_2}_{(2)} \cdots x'^{j_b}_{(b)}\right)\left(y'^{(1)}_{i_1}\, y'^{(2)}_{i_2} \cdots y'^{(a)}_{i_a}\right) \\ &\quad = T^{i_1,i_2,\ldots,i_a}_{j_1,j_2,\ldots,j_b}\left(x^{j_1}_{(1)}\, x^{j_2}_{(2)} \cdots x^{j_b}_{(b)}\right)\left(y^{(1)}_{i_1}\, y^{(2)}_{i_2} \cdots y^{(a)}_{i_a}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die gestrichenen Vektorkomponenten werden wieder als Funktionen der ungestrichenen ausgedrückt, und wir erhalten nach zu Abschnitt 3.5.1 analoger Rechnung:

$$T'^{i_1,i_2,\ldots,i_a}_{j_1,j_2,\ldots,j_b}\left(\partial_{\beta_1}x'^{j_1} \cdots \partial_{\beta_b}x'^{j_b}\right)\left(\partial'_{i_1}x^{\alpha_1} \cdots \partial'_{i_a}x^{\alpha_a}\right) = T^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_a}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_b}. \tag{3.11}$$

Wir wollen diese Beziehung invertieren, um T' durch T ausdrücken zu können. Dazu multipliziert man beide Seiten von (3.11) mit

$$\left(\partial'_{l_1}x^{\beta_1} \cdots \partial'_{l_b}x^{\beta_b}\right)\left(\partial_{\alpha_1}x'^{k_1} \cdots \partial_{\alpha_a}x'^{k_a}\right).$$

Man erhält dann:

$$T'^{k_1,k_2,\ldots,k_a}_{l_1,l_2,\ldots,l_b} = T^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_a}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_b}\left(\partial_{\alpha_1}x'^{k_1} \cdots \partial_{\alpha_a}x'^{k_a}\right)\left(\partial'_{l_1}x^{\beta_1} \cdots \partial'_{l_b}x^{\beta_b}\right). \tag{3.12}$$

Dieses Transformationsgesetz wird auch häufig als *axiomatische Definition* des Tensors verwendet. Ein Vergleich mit (3.4) und (3.5) zeigt, daß die kovarianten Indizes wie kovariante Vektoren, die kontravarianten Indizes wie kontravariante Vektoren transformieren. So gilt etwa für einen dreistufigen Tensor:

$$T'^{ij}_{k} = \partial_u x'^i \partial_v x'^j \partial'_k x^w\, T^{uv}_{w} \tag{3.13}$$

3.6.3 Tensoralgebra

Gleichheit und Summe von Tensoren

Zwei Tensoren A und B sind gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind

$$A^{ij}_{k} = B^{ij}_{k} \tag{3.14}$$

für alle Werte, welche ihre Indizes annehmen können. Es ist dabei nicht notwendig anzugeben, daß die Komponenten der beiden Tensoren in allen Koordinatensystemen gleich sind. Es genügt, wenn man weiß, daß A und B Tensoren sind, und daß ihre Komponenten in einem speziellen Koordinatensystem gleich sind; ihre Komponenten sind dann in jedem Koordinatensystem gleich. Dies folgt aus dem Transformationsverhalten (3.12) der Tensoren.

Die axiomatische Definition des Tensors nach (3.12) ist linear und homogen in den Tensorkomponenten $T^{i_1,\ldots,i_a}_{j_1,\ldots,j_b}$ und daraus folgt:

(a) Die Summe zweier Tensoren mit der selben Zahl von von ko– und kontravarianten Indizes kann als die Summe ihrer Komponenten definiert werden, und dies ist wieder ein Tensor:

$$A^{ij}_{k} + B^{ij}_{k} = C^{ij}_{k}. \tag{3.15}$$

(b) Das Produkt eines Tensors mit einem Skalar (Multiplikation jeder Komponente mit diesem Skalar) ist wieder ein Tensor.

Tensormultiplikation

Wir untersuchen hier der Einfachheit halber einen speziellen Fall, der aber - mit entsprechendem Aufwand - sofort zu verallgemeinern ist. Es sind $T^{\alpha\beta}_{\gamma}$ und $S^{\mu\nu}$ zwei Tensoren und wir untersuchen die Werte

$$G^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma} = T^{\alpha\beta}_{\gamma} S^{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

Das Produkt der Tensoren T und S soll also ein vierfach kontra– und einfach kovarianter Tensor G sein. Um dies zu zeigen, untersuchen wir in einem anderen Koordinatensystem:

$$G'^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma} = T'^{\alpha\beta}_{\gamma} S'^{\mu\nu}$$

und verwenden die Transformationsgesetze:

$$\begin{aligned}
T'^{\alpha\beta}_{\gamma} S'^{\mu\nu} &= \partial_i x'^{\alpha} \partial_j x'^{\beta} \partial'_{\gamma} x^k T^{ij}_{k}\, \partial_l x'^{\mu} \partial_m x'^{\nu} S^{lm} \\
&= \partial_i x'^{\alpha} \partial_j x'^{\beta} \partial_l x'^{\mu} \partial_m x'^{\nu} \partial'_{\gamma} x^k T^{ij}_{k} S^{lm} \\
&\overset{(3.16)}{=} \partial_i x'^{\alpha} \partial_j x'^{\beta} \partial_l x'^{\mu} \partial_m x'^{\nu} \partial'_{\gamma} x^k G^{ijlm}_{k} \\
&\overset{(3.12)}{=} G'^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma}.
\end{aligned}$$

Das Tensorprodukt (3.16) wird häufig das *äußere Produkt* genannt.

Zerlegung eines Tensors in eine Summe von Vektorprodukten

Theorem 3.2 *In einem n–dimensionalen Raum kann jeder Tensor der Stufe $q > 1$ als die Summe von Tensorprodukten von Vektoren mit q Faktoren geschrieben werden. n^{q-1} ist im allgemeinen die kleinste Zahl von Vektorprodukten, in welche ein Tensor zerlegt werden kann.*

Es wird also behauptet, daß ein Tensor in Raumzeit ($T^{\mu\nu}; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) als Summe von $4^{2-1} = 4$ Tensorprodukten von Vektoren geschrieben werden kann:

$$T^{\mu\nu} = A^{\mu}_{(1)} B^{\nu}_{(1)} + A^{\mu}_{(2)} B^{\nu}_{(2)} + A^{\mu}_{(3)} B^{\nu}_{(3)} + A^{\mu}_{(4)} B^{\nu}_{(4)}, \tag{3.17}$$

wobei die (i)–Indizes unterschiedliche Vektoren kennzeichnen.

Es ist a priori offensichtlich, daß man eine solche Dekomposition mit n^q Vektorprodukten erreichen kann, da dies die Zahl der unabhängigen Komponenten eines Tensors der Stufe q im n–dimensionalen Raum ist. Es muß also noch die Minimalzahl n^{q-1} bewiesen werden.

Es genügt, das Theorem in einem Koordinatensystem zu beweisen, da über die axiomatische Definition jederzeit in andere Karten transformiert werden kann. Wir gehen dabei von (3.17) aus und untersuchen die Terme mit $\mu = 0$. (3.17) wird dann korrekt sein, wenn wir das System

$$\begin{aligned}
T^{00} &= A^{0}_{(1)} B^{0}_{(1)} + A^{0}_{(2)} B^{0}_{(2)} + A^{0}_{(3)} B^{0}_{(3)} + A^{0}_{(4)} B^{0}_{(4)} \\
\ldots & \\
\ldots & \\
T^{03} &= A^{0}_{(1)} B^{3}_{(1)} + A^{0}_{(2)} B^{3}_{(2)} + A^{0}_{(3)} B^{3}_{(3)} + A^{0}_{(4)} B^{3}_{(4)}
\end{aligned}$$

auflösen können. Wenn wir die $A^0_{(i)}$ als vier Unbekannte auffassen, so ist dies ein System von vier linearen Gleichungen für vier Unbekannte. Wenn wir also vier Vektoren $B_{(i)}$ wählen, kann man dieses System nach den 0–Komponenten der Vektoren $A_{(i)}$ auflösen. (Die B–Vektoren sollten dabei so gewählt werden, daß nicht vier von ihnen in einer Dreierebene liegen. Dies verhindert eine verschwindende Determinante.) Wenn wir nun die anderen Werte von $\mu(= 1, 2, 3)$ untersuchen, und die Wahl der $B_{(i)}$–Vektoren unverändert lassen, können wir alle weiteren Komponenten der Vektoren $A_{(i)}$ bestimmen. Damit ist das Theorem für $q = 2$ bewiesen. Es muß nun noch gezeigt werden, daß bei der Gültigkeit des Theorems für $q - 1$, es auch für q gilt.

Wir untersuchen also einen Tensor der Stufe q in einem speziellen Koordinatensystem und wir greifen den q–ten Index heraus und schreiben $T^{[\alpha\ldots\delta]\gamma}$. Die Indizes innerhalb der eckigen Klammer seien fest und wir haben dann die Gleichungen

$$T^{[\alpha\ldots\delta]0} = S^{[\alpha\ldots\delta]}_{(1)} C^{0}_{(1)} + \cdots + S^{[\alpha\ldots\delta]}_{(4)} C^{0}_{(4)}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\\
&\cdots\\
T^{[\alpha\ldots\delta]3} &= S^{[\alpha\ldots\delta]}_{(1)}C^3_{(1)}+\cdots+S^{[\alpha\ldots\delta]}_{(4)}C^3_{(4)},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

wobei die vier Koeffizienten $S^{[\alpha\ldots\delta]}_{(i)}$ unbekannt sind. Wählt man die Werte $C^\gamma_{(i)}$ beliebig (aber so, daß nur nicht verschwindende Determinanten auftreten), so sind die vier Unbekannten eindeutig bestimmt. Jede der vier Größen $S^{[\alpha\ldots\delta]}_{(i)}$ besitzt $q-1$ Indizes und kann daher, aufgrund unserer induktiven Schlußfolgerungen, in eine Summe von $4^{(q-1)-1}=4^{q-2}$ Terme zerlegt werden, welche jeweils aus $q-1$ Vektorprodukten bestehen. Um das System (3.18) lösen zu können um dann die Stufe q zu erhalten, haben wir vier neue Vektoren $C_{(i)}$ eingeführt. Somit ist die Zahl der Terme in der Zerlegung eines Tensors der Stufe q durch $4\times 4^{q-2}=4^{q-1}$ gegeben, womit der erste Teil des Theorems bewiesen ist.

Daß n^{q-1} die minimale Anzahl ist, ist eher von mathematischem Interesse, und soll daher hier nicht bewiesen werden.

Verjüngen von Indizes

Theorem 3.3 *Der Tensor $T^{i_1,\ldots,i_{a-1},\sigma}_{j_1,\ldots,j_{b-1},\sigma}$ ist ein Tensor der Stufe $a+b-2$ und kann auch $R^{i_1,\ldots,i_{a-1}}_{j_1,\ldots,j_{b-1}}$ geschrieben werden.*

Wir schreiben das Transformationsgesetz für den Tensor $T^{i_1,\ldots,i_a}_{j_1,\ldots,j_b}$ an und setzen dann $i_a=j_b=\sigma$. Dies ergibt:

$$
\begin{aligned}
T'^{i_1,\ldots,i_{a-1},\sigma}_{j_1,\ldots,j_{b-1},\sigma} &= \partial_{\alpha_1}x'^{i_1}\cdots\partial_{\alpha_{a-1}}x'^{i_{a-1}}\left(\partial_{\alpha_a}x'^{\sigma}\right)\times\\
&\quad \partial'_{j_1}x^{\beta_1}\cdots\partial'_{j_{b-1}}x^{\beta_{b-1}}\left(\partial'_{\sigma}x^{\beta_b}\right)T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_a}_{\beta_1,\ldots,\beta_b}.
\end{aligned}
$$

Nun gilt aber:

$$
\partial_{\alpha_a}x'^{\sigma}\,\partial'_{\sigma}x^{\beta_b}=\partial_{\alpha_a}x^{\beta_b}=\delta^{\beta_b}{}_{\alpha_a}
$$

und damit folgt:

$$
\begin{aligned}
T'^{i_1,\ldots,i_{a-1},\sigma}_{j_1,\ldots,j_{b-1},\sigma} &= \partial_{\alpha_1}x'^{i_1}\cdots\partial_{\alpha_{a-1}}x'^{i_{a-1}}\times\\
&\quad \partial'_{j_1}x^{\beta_1}\cdots\partial'_{j_{b-1}}x^{\beta_{b-1}}T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_a,\tau}_{\beta_1,\ldots,\beta_b,\tau},
\end{aligned}
$$

und dies zeigt, daß das Ergebnis tatsächlich ein Tensor der Stufe $(a-1)+(b-1)=a+b-2$ ist.

Herauf– und Herunterziehen von Indizes

Wir betrachten den zweifach kontravarianten Tensor T^{ij} und bilden das Tensorprodukt mit einem symmetrischen kovarianten Tensor zweiter Stufe g_{ik}, wobei wir gleichzeitig den Index j verjüngen:

$$T^i{}_k = g_{kj}T^{ij}. \tag{3.19}$$

Das Ergebnis ist ein Tensor zweiter Stufe, welcher mit dem Tensor T^{ij} assoziiert ist. g_{kj} hat den ursprünglichen Index j *heruntergezogen* und die Schreibweise erhält die Ordnung der Indizes. Würde man dies nicht tun, so könnte man bei nicht symmetrischen Tensoren Probleme bekommen:

$$\begin{aligned} T_1^3 &= g_{1\beta}T^{3\beta} \qquad \text{richtig: } T^3{}_1 \\ T_1^3 &= g_{1\beta}T^{\beta 3} \qquad \text{richtig: } T_1{}^3, \end{aligned}$$

mit $T_1^3 \neq T_1^3$ für $T^{\alpha\beta} \neq T^{\beta\alpha}$!! Führen wir die Operation (3.19) nochmals durch, so finden wir:

$$T_{kl} = g_{ik}T^i{}_l,$$

mit T_{kl} als zweifach kovariantem Tensor, welcher mit T^{ij} assoziiert ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} T^i{}_k &= g_{kj}T^{ij} \\ T_{kl} &= g_{ik}T^i{}_l = g_{ik}g_{jl}T^{ij}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Der Tensor g_{ik} ist dabei ein beliebiger symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Wurde dieser Tensor aber einmal gewählt, so spielt er eine zentrale Rolle in der Tensorrechnung, da er die Beziehung zwischen den ko– und kontravarianten Tensoren herstellt. g_{ik} wird daher auch *Fundamentaltensor* genannt. In einem metrischen Raum – wie es unsere Raumzeit ist – ist es ganz natürlich, den metrischen Tensor selbst als Fundamentaltensor zu verwenden.

Wir wollen nun nach Möglichkeiten suchen, welche es erlauben auch Indizes *hinaufzuziehen*. Dazu müssen wir einen kontravarianten Tensor definieren, welcher die Rolle von g_{ik} übernimmt. Dazu untersuchen wir in einem bestimmten Koordinatensystem die inverse Matrix, welche aus der Matrix der Elemente des g_{ik} Tensors gebildet wird. Bezeichnen wir mit Δ^{ik} die Kofaktoren von g_{ik} und mit g die Determinante der g_{ik} Matrix, so finden wir die Koeffizienten der inversen Matrix mit

$$g^{ik} = \frac{\Delta^{ik}}{g}.$$

Sie sind durch die Eigenschaft

$$g^{ik}g_{jk} = \delta^i{}_j \tag{3.21}$$

eindeutig charakterisiert. Wir definieren nun einen Tensor g^{ik}, indem wir auf die Matrix g^{ik}, welche in einem bestimmten Koordinatensystem bekannt ist, das Transformationsgesetz für Tensoren anwenden. Wenn wir also von x nach x' übergehen, erhalten wir:

$$g'^{\alpha\beta} = \partial_i x'^{\alpha} \partial_k x'^{\beta} g^{ik}.$$

Da g_{ik} ein Tensor ist, wird die Definition von g^{ik} als Tensor mit der Originaldefinition (3.21) kompatibel sein, wenn diese Definition selbst unter Koordinatentransformationen invariant ist. Aus den Eigenschaften von Tensorprodukten muß die rechte Seite von (3.21) ein Tensor sein. Man muß daher nur nachweisen, daß die Matrix von Kroneckersymbolen ein Tensor ist. Um diesen Beweis antreten zu können, benötigen wir das *Quotienten Theorem.*

Theorem 3.4 *Ist* $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_r}$ *eine gegebene Matrix, und* $A^{j_l,\ldots,j_r}_{i_k,\ldots,i_p}$ *ein beliebiger Tensor, und ist dann ebenfalls bekannt, daß*

$$S^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{l-1}} = T^{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{l-1},j_l,\ldots,j_r} A^{j_k,\ldots,j_r}_{i_l,\ldots,i_p} \tag{3.22}$$

ein Tensor ist, so ist auch $T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_p}$ *ein Tensor.*

Den Beweis beginnt man am besten mit einem Sonderfall: wir nehmen an, daß $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_r}$ eine Matrix ist, welche ein bestimmtes Transformationsgesetz hat, um sie in unterschiedlichen Koordinatensystemen darstellen zu können, und weiters, daß x^{j_r} ein beliebiger Vektor ist. Wir nehmen nun an, daß wir wissen, daß

$$S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{r-1}} = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_r} x^{j_r} \tag{3.23}$$

ein Tensor ist, dann ist auch $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_r}$ ein Tensor.

Um dies zu zeigen, multiplizieren wir (3.23) mit p kovarianten Vektoren $y^{(1)}_{i_1} \ldots y^{(p)}_{i_p}$ und $(r-1)$ beliebigen kontravarianten Vektoren $x^{j_1}_{(1)} \ldots x^{j_{r-1}}_{(r-1)}$:

$$S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{r-1}} y^{(1)}_{i_1} \ldots y^{(p)}_{i_p} x^{j_1}_{(1)} \ldots x^{j_{r-1}}_{(r-1)} = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_r} x^{j_r} x^{j_{r-1}}_{(r-1)} \ldots x^{j_1}_{(1)} y^{(1)}_{i_1} \ldots y^{(p)}_{i_p}. \tag{3.24}$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks ist nach der intrinsischen Definition von Tensoren (3.8) ein Skalar, und daher muß auch die rechte Seite ein Skalar sein. Dann muß aber auch T ein Tensor sein, wiederum aufgrund der intrinsischen Definition von Tensoren, da ja x^{j_r} beliebig angenommen wurde. Somit ist zunächst einmal der Sonderfall bewiesen.

Zum Beweis des allgemeinen Falls können wir den Tensor A stets als Summe von Vektorprodukten $x^{j_l}_{(l)} \ldots x^{j_r}_{(r)} y^{(k)}_{i_k} \ldots y^{(p)}_{i_p}$ anschreiben. Wir multiplizieren dann mit $x^{j_1}_{(1)} \ldots x^{j_{l-1}}_{(l-1)}$ und $y^{(1)}_{i_1} \ldots y^{(k-1)}_{i_{k-1}}$ und unter Verwendung der früheren Argumentation ist das Quotiententheorem auch für den allgemeinen Fall bewiesen. Wir können daher zu unserer eigentlichen Problemstellung zurückkehren.

Man kann nun sehr leicht zeigen, daß die Kroneckermatrix ein Tensor ist: man untersucht hierzu das Skalarprodukt zweier Vektoren x^i und y_i:

$$x^i y_i = \left(\delta^i{}_j x^j\right) y_i = P,$$

mit P einem Skalar. Nachdem y_i ein beliebiger Vektor ist, ist aufgrund des Quotiententheorems $\delta^i{}_j x^j$ ein Vektor; nachdem aber auch x^j ein beliebiger Vektor ist, zeigt die erneute Anwendung des Quotiententheorems, daß $\delta^i{}_j$ ein Tensor zweiter Stufe ist.

Aus der Eigenschaft (3.21) folgt zusammen mit (3.20)

$$g^j{}_i = \delta^j{}_i.$$

Also ist der metrische Tensor mit gemischten Indizes der Einheitstensor.

Wie bereits angedeutet wird der metrische Tensor dazu verwendet, um Indizes herauf– oder herunterzuziehen $\Longrightarrow$ *metrischer Fundamentaltensor:*

$$\begin{aligned} T_\gamma{}^\alpha &= g^{\alpha\delta} T_{\gamma\delta} \\ T^{\beta\alpha} &= g^{\gamma\beta} T_\gamma{}^\alpha = g^{\gamma\beta} g^{\alpha\delta} T_{\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Wir sollten Tensoren, welche über Verjüngungsmultiplikationen mit dem metrischen Fundamentaltensor assoziiert werden, als unterschiedliche mathematische Formen (Darstellungen) einer gegebenen geometrischen oder physikalischen Größe verstehen.

Aufgrund von Einsteins Axiom der Kovarianz müssen alle physikalischen Gleichungen Tensorgleichungen sein. Durch wiederholte Anwendung der Verjüngungsoperation auf den Fundamentaltensor erhält man idente Gleichungen zwischen den Komponenten des untersuchten Tensors in den verschiedenen Darstellungen; diese Gleichungen stellen aber immer denselben geometrischen oder physikalischen Zusammenhang dar.

3.6.4 Zusammenhang mit der Vektorrechnung im euklidischen Raum

Es soll hier eine geometrische Veranschaulichung der ko– und kontravarianten Formen eines Vektors gegeben werden. Wir untersuchen zunächst einen Vektor $\mathbf{v}$ im zweidimensionalen euklidischen Vektorraum. Das Koordinatensystem sei durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ gegeben (Abb. 3.4). Es ist dann

$$\mathbf{v} = \lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2.$$

λ^1 und λ^2 werden die *kontravarianten Komponenten* von $\mathbf{v}$ genannt.

Projizieren wir aber $\mathbf{v}$ orthogonal auf die Richtungen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, so erhalten wir:

$$\lambda_1 = \mathbf{v}\mathbf{e}_1, \qquad \lambda_2 = \mathbf{v}\mathbf{e}_2.$$

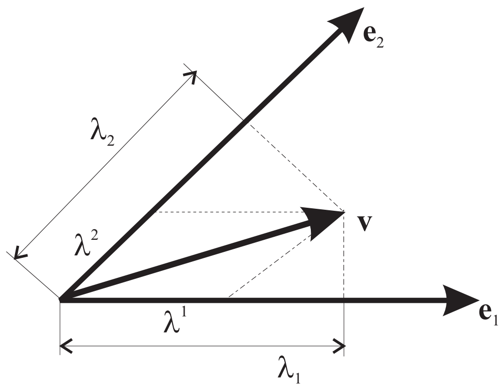


Abbildung 3.4: Die Komponenten eines Vektors $\mathbf{v}$ im zweidimensionalen euklidischen Raum.

Durch diese Größen ist der Vektor $\mathbf{v}$ ebenso vollständig bestimmt. Die λ_i werden die *kovarianten Komponenten* von $\mathbf{v}$ genannt.

Wir untersuchen nun das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ in diesem Raum:

$$\begin{array}{rl} \mathbf{u} = \mu^1\mathbf{e}_1 + \mu^2\mathbf{e}_2 & \qquad \text{(kontravariant)} \\ \mu_1 = \mathbf{u}\mathbf{e}_1, \quad \mu_2 = \mathbf{u}\mathbf{e}_2 & \qquad \text{(kovariant)} \end{array}$$

und weiters:

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= \left(\mu^1\mathbf{e}_1 + \mu^2\mathbf{e}_2\right)\left(\lambda^1\mathbf{e}_1 + \lambda^2\mathbf{e}_2\right) \\ &= \mu^1\lambda^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mu^1\lambda^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mu^2\lambda^1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mu^2\lambda^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

(Es wurden dabei die assoziativen und distributiven Eigenschaften des Skalarprodukts verwendet.) Bezeichnen wir nun mit g_{ij} die Skalarprodukte $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, so gilt:

$$\mathbf{uv} = g_{ij}\lambda^i\mu^j, \qquad g_{ij} = g_{ji}, \qquad [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = 0, \quad i \neq j.$$

Wir könnten aber auch schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= \mathbf{u}\left(\lambda^1\mathbf{e}_1 + \lambda^2\mathbf{e}_2\right) \\ &= \lambda^1\mathbf{u}\mathbf{e}_1 + \lambda^2\mathbf{u}\mathbf{e}_2 \\ &= \lambda^1\mu_1 + \lambda^2\mu_2 \end{aligned}$$

oder

$$\mathbf{uv} = \lambda^i\mu_i.$$

Da $\mathbf{v}$ völlig willkürlich gewählt werden kann, implizieren die beiden Ergebnisse:

$$\mu_i = g_{ij}\mu^j$$

und wir haben wieder unsere frühere Tensorbeziehung aufgefunden, wie die Anwendung der Transformationsgesetze für den euklidischen Raum sofort zeigt.

Betrachten wir einen infinitesimalen Vektor $\mathbf{u}$ der Länge $\mathrm{d}s$ mit den kontravarianten Komponenten $\mathrm{d}x^i$, so finden wir sofort die Metrik des euklidischen Raumes:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

mit der geometrischen Interpretation der Koeffizienten g_{ij}

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

In der Differentialgeometrie eines metrischen Raumes, etwa auf einer Fläche, auf welcher

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

gilt, und $\mathrm{d}x^i$ sowie $\mathrm{d}x^j$ die Koordinateninkremente auf der Fläche sind, kann man die g_{ij} Koeffizienten lokal als Skalarprodukte der Einheitstangentenvektoren entlang der Koordinatenlinien auffassen. Solche Basisvektoren definieren *lokal* einen euklidischen Tangentialraum.

3.7 Tensorfelder

Unter einem Tensorfeld versteht man die Zuordnung eines Tensors zu jedem Punkt im Raum; die Komponenten des Tensors sind Funktionen des zugeordneten Punktes, welcher durch die Koordinaten x^i charakterisiert ist. Wir wollen annehmen, daß die Komponenten des Tensorfeldes zweifach differenzierbare Funktionen der Koordinaten sind.

3.7.1 Vektorverschiebung

Wir untersuchen zunächst einstufige Tensoren – also Vektoren. In der euklidischen Geometrie und bei Verwendung rechtwinkliger Koordinatensysteme wissen wir, daß die Gleichheit zweier Vektoren in zwei unterschiedlichen Punkten durch die Gleichheit der Komponenten der Vektoren in diesen Punkten definiert ist. Dabei ist es gleichgültig, wie weit diese Punkte voneinander entfernt sind. Im besonderen sprechen wir von einem *konstanten* Vektorfeld, wenn die Vektorkomponenten im ganzen Raum konstant sind. In unserem allgemeineren Raum, wo im allgemeinen unterschiedlichen Punkten auch unterschiedliche Karten zugeordnet sind, ist es nicht mehr möglich, obige Definition unverändert zu übertragen – die Konstanz eines Tensorfeldes muß erst definiert werden.

Wir versuchen zunächst auf intuitivem Weg ein konstantes Vektorfeld zu definieren, wobei wir die Konstanz der Komponenten benützen wollen. Dazu wird die Frage zu beantworten sein, welche Eigenschaft der Raum haben muß, damit eine solche, elementare Definition gilt. Wir betrachten dazu ein spezifisches Vektorfeld:

$$x^{(1)}(P) = \Big(\mathrm{d}x^1, 0, \ldots, 0\Big)$$

mit der selben - konstanten - ersten Komponente $\mathrm{d}x^1$ in jedem Punkt des Raumes. An einem Punkt P ist das Quadrat der Länge des Vektors gleich $g_{11}(P)(\mathrm{d}x^1)^2$, an einem anderen Punkt Q ist es gleich $g_{11}(Q)(\mathrm{d}x^1)^2$. Diese zwei Quadrate sind dann und nur dann gleich, wenn $g_{11}(P) = g_{11}(Q)$ ist, also wenn g_{11} im Gesamtraum konstant ist.

Wenn wir einen zweiten Vektor

$$x^{(i)}(P) = \Big(0, 0, \ldots, \mathrm{d}x^i, \ldots, 0\Big)$$

mit der selben Komponente $\mathrm{d}x^i$ im ganzen Raum haben, so muß dafür g_{ii} im ganzen Raum konstant sein. Wenn wir dann unser Feld aus $x^{(1)} + x^{(i)}$ bilden, so folgt, daß auch die g_{1i} im Gesamtraum konstant sein müssen.

Theorem 3.5 *Die Definition eines konstanten Vektorfeldes über die Konstanz der Komponenten im gesamten Raum erfordert ein Koordinatensystem, für welches die g_{ik} im ganzen Raum konstant sind. Dies ist ein* pseudo–euklidischer Raum.

Aus diesem Theorem folgt, daß die oben gewählte Definition der Konstanz des Vektorfeldes für unsere Zwecke nicht geeignet ist, da sie offensichtlich nicht koordinatenunabhängig ist.

Wir müssen also die kovarianten Erfordernisse für die Definition eines konstanten Vektorfelds untersuchen. Wir wollen die Konstanz des Vektorfelds intrinsisch und unabhängig vom Koordinatensystem angeben; sie soll aber auch die euklidische Definition enthalten. Wenn wir von einem Vektorfeld ξ^i ausgehen, welches in einem gegebenen Koordinatensystem (x^a) konstante Komponenten hat, und dann auf ein beliebiges anderes Koordinatensystem (x'^a) übergehen, so erhalten wir:

$$\xi'^i = \partial_k x'^i \, \xi^k, \tag{3.26}$$

und ξ'^i ist sicher nicht im gesamten Raum konstant.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Komponenten ξ'^i variieren, wenn wir von einem Punkt zu einem Nachbarpunkt übergehen. Dies soll längs einer Kurve geschehen, welche mit p parametrisiert wird. Wir differenzieren also (3.26) nach p, und erinnern uns, daß die ξ^k konstant im ganzen Raum sind, also auch entlang dieser Kurve. Daraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\xi'^i}{\mathrm{d}p} = \partial_k\partial_l x'^i \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}p}\,\xi^k.$$

Da wir aber auf der Suche nach einer intrinsischen Definition sind, müssen wir die Inkremente $\mathrm{d}\xi'^i$ mit ξ'^i in Verbindung bringen. Zunächst gilt in Umkehrung von (3.26):

$$\xi^k = \partial'_j x^k\,\xi'^j$$

und

$$\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}p} = \partial'_m x^l \frac{\mathrm{d}x'^m}{\mathrm{d}p},$$

woraus dann

$$\frac{\mathrm{d}\xi'^i}{\mathrm{d}p} = \left(\partial_k\partial_l x'^i \partial'_m x^l \partial'_j x^k \frac{\mathrm{d}x'^m}{\mathrm{d}p}\right)\xi'^j$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi'^i}{\mathrm{d}p} = -\Gamma'^i_{mj}\frac{\mathrm{d}x'^m}{\mathrm{d}p}\,\xi'^j \tag{3.27}$$

mit

$$\Gamma'^i_{mj} = -\partial_k\partial_l x'^i \partial'_m x^l \partial'_j x^k \tag{3.28}$$

folgt. (Das hier eingeführte Minuszeichen ist Konvention.) Somit sehen wir, daß die Forderung der Konstanz eines Vektorfeldes in einem Raum zu einem viel allgemeineren Gesetz (3.27) in einem beliebigen anderen Raum führt. Insbesonders sehen wir, daß das Inkrement der Vektorkomponenten eine Bilinearform der Komponenten ξ^i des Vektors mit der Verschiebung $\mathrm{d}x^m$ in Tangentenrichtung zur Kurve, entlang der die Verschiebung stattfindet, ist.

3.7.2 Die affine Vernetzung

Aus all unseren bisherigen Betrachtungen wurde offensichtlich, daß Differenzieren eine wohldefinierte Operation auf Mannigfaltigkeiten ist, sofern die Übergangs–(Vernetzungs–)Funktionen für die Mannigfaltigkeit selbst auch differenzierbar sind. (Siehe auch Abb. 3.3.) Durch die *affine Vernetzung* wird nun die zusätzliche Struktur geschaffen, welche auch für Tensoren eine wohldefinierte Bedeutung der Differentiation zuläßt.

Wir gehen dazu von der Differentialform

$$\mathrm{d}\xi^i = -\Gamma^i_{mj}\mathrm{d}x^m\,\xi^j \tag{3.29}$$

aus, welche unmittelbar aus (3.27) folgt. Wir erweitern sie aber dahingehend, daß die Γ^i_{mj} nicht länger auf (3.28) eingeschränkt sein sollen. Diese Gleichung wurde ja aus der Tatsache abgeleitet, daß das untersuchte Vektorfeld im Ursprungskoordinatensystem konstante Komponenten hat. Wir nehmen jetzt hingegen an, daß das Vektorfeld ξ^i aus seinem Wert in einem gegebenen Punkt durch das Verschiebungsgesetz (3.29) generiert wurde.

Theorem 3.6 *Die Gleichung (3.29) stellt somit ein allgemeines Gesetz dar, welches die Verschiebung des Vektors ξ^i im Punkte x zu den Werten $\xi^i + \mathrm{d}\xi^i$ im Punkte $x + \mathrm{d}x$ beschreibt. Dieses Gesetz hat affinen Charakter: es hat eine, unter linearen Transformationen der Koordinaten, invariante Struktur.*

Wenn wir nun versuchen, dieses Verschiebungsgesetz koordinateninvariant zu formulieren, und weiters fordern, daß $\xi^i + \mathrm{d}\xi^i$ immer noch ein Vektor im Punkte $x + \mathrm{d}x$ ist, so werden wir gezwungen, für die Γ^i_{mj}–Koeffizienten bestimmte Forderungen über ihre Eigenschaften aufzustellen. Diese Forderungen werden als Transformationsgesetz für die Γ^i_{mj}–Koeffizienten zu formulieren sein; sie werden es schließlich erlauben, einen Vektor um infinitesimale Beträge zu verschieben.

Beweis: Im ungestrichenen Koordinatensystem gelte das Verschiebungsgesetz:

$$\xi^i(x + \mathrm{d}x) = \xi^i + \mathrm{d}\xi^i = \xi^i - \Gamma^i_{mj}\mathrm{d}x^m\, \xi^j \tag{3.30}$$

und wir fordern, daß im gestrichenen Koordinatensystem das selbe Gesetz gelte. (Das Gesetz ist dann kovariant.) Wir müssen weiters fordern, daß $\xi^i(x+\mathrm{d}x)$ ein Vektor ist, und damit folgt nach dem Transformationsgesetz:

$$\xi'^i(x + \mathrm{d}x) = \xi^i(x + \mathrm{d}x)\, \partial_i x'^j\Big|_{x+\mathrm{d}x}$$

oder

$$\xi'^j - \Gamma'^j_{ms}\mathrm{d}x'^m\xi'^s = \left(\xi^i - \Gamma^i_{ml}\mathrm{d}x^m\xi^l\right)\partial_i x'^j\Big|_{x+\mathrm{d}x}.$$

Wir entwickeln in eine Taylorreihe

$$\partial_i x'^j\Big|_{x+\mathrm{d}x} = \partial_i x'^j\Big|_x + \partial_i\partial_k x'^j\mathrm{d}x^k + \cdots$$

und es folgt:

$$\begin{aligned}
\xi'^j - \Gamma'^j_{ms}\mathrm{d}x'^m\xi'^s &= \underbrace{\xi^i\partial_i x'^j}_{=\,\xi'^j} + \xi^i\partial_i\partial_k x'^j\mathrm{d}x^k - \Gamma^i_{ml}\mathrm{d}x^m\xi^l\partial_i x'^j + \ldots \\
-\Gamma'^j_{ms}\mathrm{d}x'^m\xi'^s &= -\Gamma^i_{ml}\partial_i x'^j\xi^l\mathrm{d}x^m + \partial_i\partial_k x'^j\xi^i\mathrm{d}x^k \\
&= \left(-\Gamma^i_{\alpha\beta}\partial_i x'^j + \partial_\alpha\partial_\beta x'^j\right)\xi^\beta\mathrm{d}x^\alpha.
\end{aligned}$$

Wir können nun aber wieder $\xi^\beta\mathrm{d}x^\alpha$ durch gestrichene Größen ausdrücken:

$$\xi^\beta\mathrm{d}x^\alpha = \partial'_m x^\alpha\mathrm{d}x'^m\partial'_s x^\beta\xi'^s,$$

und daraus folgt weiter

$$-\Gamma'^j_{ms}\mathrm{d}x'^m\xi'^s = \left(-\Gamma^i_{\alpha\beta}\partial_i x'^j + \partial_\alpha\partial_\beta x'^j\right)\partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \xi'^s \mathrm{d}x'^m,$$

und schließlich:

$$\Gamma'^j_{ms} = \partial_i x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta. \tag{3.31}$$

Dies definiert das Transformationsgesetz für die Koeffizienten $\Gamma^i_{\alpha\beta}$, welches aus der Forderung der Kovarianz folgt. Diese Koeffizienten sind die *Koeffizienten der affinen Vernetzung* oder einfach die *Vernetzung.* (3.31) ist offensichtlich in den Koeffizienten $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ inhomogen und stellt somit *kein* Transformationsgesetz für Tensoren dar. Die Vernetzungen sind also keine Tensoren.

Es folgt nun wegen

$$\partial_p x'^a \partial'_b x^p = \delta^a{}_b$$

für (3.31):

$$\begin{aligned}
\partial'_c \delta^a{}_b &= 0 = \partial'_c \left(\partial_p x'^a \partial'_b x^p\right) \\
&= \left(\partial'_c \partial_p x'^a\right) \partial'_b x^p + \partial_p x'^a \left(\partial'_c \partial'_b x^p\right) \\
&= \partial'_c x^q \partial_q \partial_p x'^a \partial'_b x^p + \partial'_c \partial'_b x^p \partial_p x'^a
\end{aligned}$$

oder

$$\partial_p x'^a \partial'_c \partial'_b x^p = -\partial_q \partial_p x'^a \partial'_b x^p \partial'_c x^q$$

und damit folgt auch

$$\Gamma'^j_{ms} = \partial_i x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta} + \partial_d x'^j \partial'_m \partial'_s x^d. \tag{3.32}$$

Wir wollen uns nun weiters die Frage stellen, was in den dreifach überlappenden Bereichen von Abb. 3.3 geschieht. Wir haben dort die drei Kartenbereiche U, U', U'' mit den zugeordneten Koordinaten x^a, x'^a und x''^a. Im dreifach überlappenden Bereich $U \cap U' \cap U''$ wollen wir annehmen, daß Γ^a_{bc} zu Γ'^a_{bc} transformiert, und daß dann Γ'^a_{bc} zu Γ''^a_{bc} transformiert. Es gilt nun nach (3.32):

$$\Gamma'^a_{bc} = \partial_d x'^a \partial'_b x^e \partial'_c x^f \Gamma^d_{ef} + \partial_d x'^a \partial'_b \partial'_c x^d$$

und

$$\Gamma''^a_{bc} = \partial'_d x''^a \partial''_b x'^e \partial''_c x'^f \Gamma'^d_{ef} + \partial'_d x''^a \partial''_b \partial''_c x'^d.$$

Es soll dann auch

$$\Gamma''^a_{bc} = \partial_d x''^a \partial''_b x^e \partial''_c x^f \Gamma^d_{ef} + \partial_d x''^a \partial''_b \partial''_c x^d$$

gelten, was nun zu zeigen ist:

$$
\begin{aligned}
\Gamma''^{a}_{bc} &= \partial'_d x''^a \partial''_b x'^e \partial''_c x'^f \Gamma'^d_{ef} + \partial'_d x''^a \partial''_b \partial''_c x'^d \\
&= \partial'_d x''^a \partial''_b x'^e \partial''_c x'^f \left(\partial_r x'^d \partial'_e x^s \partial'_f x^t \Gamma^r_{st} + \partial_r x'^d \partial'_e \partial'_f x^r \right) + \\
&\quad \partial'_d x''^a \partial''_b \partial''_c x'^d \\
&= \left[\partial'_d x''^a \partial_r x'^d = \partial_r x''^a; \quad \partial''_b x'^e \partial'_e x^s = \partial''_b x^s; \ldots \right] \\
&= \partial_r x''^a \partial''_b x^s \partial''_c x^t \Gamma^r_{st} + \partial'_d x''^a \partial''_b x'^e \partial''_c x'^f \partial_r x'^d \partial'_e \partial'_f x^r + \\
&\quad \partial'_d x''^a \partial''_b \partial''_c x'^d \\
&= \Big[\partial'_d x''^a \partial''_b x'^e \partial''_c x'^f \partial_r x'^d \partial'_e \partial'_f x^r = \partial'_d x''^a \partial_r x'^d \partial''_c x'^f \partial''_b x'^e \partial'_e \partial'_f x^r; \\
&\qquad \partial_r x''^a \partial''_c x'^f \partial''_b \partial'_f x^r = \partial_r x''^a \tfrac{\partial x'^f}{\partial x''^c} \tfrac{\partial^2 x^r}{\partial x'^f \partial x''^b} \\
&\qquad = \partial_r x''^a \partial''_c \partial''_b x'^d \Big] \\
&= \partial_r x''^a \partial''_b x^s \partial''_c x^t \Gamma^r_{st} + \partial_r x''^a \underbrace{\left[\partial''_c x'^f \partial''_b \partial'_f x^r + \partial'_f x^r \partial''_b \partial''_c x'^f \right]}_{= \partial''_b \partial''_c x'^f \partial'_f x^r \;=\; \partial''_b \partial''_c x^r} \\
&= \partial_r x''^a \partial''_b x^s \partial''_c x^t \Gamma^r_{st} + \partial_r x''^a \partial''_b \partial''_c x^r. \quad \textbf{w.z.b.w.}
\end{aligned}
$$

Wir sehen, daß die Vernetzungsbedingungen auch in einem Bereich dreifacher Überlappung gelten.

Wir wollen nun untersuchen, ob die Vernetzungsbedingung ausreichend ist. Wir nehmen dazu an, daß ein Feld von Vernetzungen $\Gamma^i_{kl}(x^m)$ existiert; es ist also jedem Punkt des endlichen Raumbereichs ein Vernetzungskoeffizient zugeordnet, welcher dem Gesetz (3.31) gehorcht. Wir haben dann ein System von Differentialgleichungen für ein mit p parametrisiertes Vektorfeld (3.27):

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}p} = -\Gamma^i_{kl} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}p} \xi^l(p).$$

Dies erlaubt nun die Vektoren $\xi^i(p)$ entlang einer bestimmten Kurve $x^i(p)$ aus dem Anfangswert $\xi^i(0)$ im Ursprung $p = 0$ zu bestimmen. Es ist aber noch zu zeigen, daß die n–Tupel $\xi^i(p)$, die auf diese Weise erhalten werden, tatsächlich wie Vektoren transformieren.

Wir betrachten daher gestrichene Koordinaten $x'^i(p)$ und die Größen $\xi'^i(p)$, welche durch (3.27), aber im gestrichenen System, bestimmt werden. Weiters gelte:

$$\xi'^i(p) - \partial_m x'^i \xi^m(p) = 0, \quad \text{für } p = 0,$$

da $\xi^m(0)$ per definitionem ein Vektor sein muß. Wir berechnen nun für alle p:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \left[\xi'^i(p) - \partial_m x'^i \xi^m(p) \right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}\xi'^i(p)}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\partial_m x'^i \xi^m(p)\right] \\
&= -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi'^l(p) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\partial_m x'^i\right)\xi^m(p) - \partial_m x'^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\xi^m(p) \\
&= -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi'^l(p) - \partial_s\partial_r x'^i \frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}p}\xi^s(p) + \partial_m x'^i \Gamma^m_{rs}\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}p}\xi^s(p) \\
&= -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi'^l(p) - \left(\partial_s\partial_r x'^i - \partial_m x'^i \Gamma^m_{rs}\right)\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}p}\xi^s(p) \\
&= \left[\begin{array}{lcl} \Gamma'^i_{kl} = (3.31) & = & \partial_m x'^i \partial'_k x^r \partial'_l x^s \Gamma^m_{rs} - \partial_r\partial_s x'^i \partial'_k x^r \partial'_l x^s \\ & = & \left(\partial_m x'^i \Gamma^m_{rs} - \partial_r\partial_s x'^i\right)\partial'_k x^r \partial'_l x^s \end{array}\right] \\
&= -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi'^l + \underbrace{\left(\partial_m x'^i \Gamma^m_{rs} - \partial_s\partial_r x'^i\right)\partial'_k x^r}_{=\,\Gamma'^i_{kl}\partial_s x'^l}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi^s(p) \\
&= -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi'^l + \Gamma'^i_{kl}\partial_s x'^l \frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\xi^s(p) \\
&= -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\left(\xi'^l - \partial_s x'^l \xi^s\right).
\end{aligned}
$$

Es gilt also:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\xi'^i(p) - \partial_m x'^i \xi^m(p)\right] = -\Gamma'^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}p}\left(\xi'^l - \partial_s x'^l \xi^s\right).
$$

Die Gültigkeit des Vektortransformationsgesetzes für die $\xi^i(p)$ entlang der gesamten Kurve folgt aus dem Eindeutigkeitstheorem für dieses lineare homogene Differentialsystem, welches die Lösung

$$
\xi'^i(p) - \partial_m x'^i \xi^m(p) = 0
$$

als Anfangswert für $p = 0$ zuläßt.

Das Transformationsgesetz (3.31) hat einige interessante Konsequenzen:

- Beschränken wir uns auf lineare Transformationen, so verschwindet der Term $\partial_\alpha\partial_\beta x'^j$ und die Γ^i_{mj} transformieren wie Tensoren. Hat nun ein transformiertes Vektorfeld ξ^i konstante Komponenten in einem bestimmten Koordinatensystem, so wird in diesem System $\Gamma^i_{mj}\xi^j$ Null sein (wegen (3.29)). Da aber Γ wie ein Tensor transformiert, und ξ^i ein Vektor ist, werden diese Terme in allen Koordinatensystemen, die vom Ursprungssystem ausgehend über lineare Transformationen gefunden werden, auch Null sein. Somit hat dann ξ^i konstante Komponenten in allen solchen Systemen.

- Wenn wir zwei Felder von Vernetzungen, etwa Γ^i_{kl} und $\tilde{\Gamma}^i_{kl}$ gegeben haben, so ist ihre Differenz ein Tensor. Aus dem Transformationsgesetz (3.31) ersieht man, daß der inhomogene Term von den speziellen Vernetzungen unabhängig ist und daher bei der Differenzbildung gekürzt wird:
$$T^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \tilde{\Gamma}^i_{kl}$$
mit dem Tensor T^i_{kl}.

- Sind die Γ^i_{kl} einer speziellen Vernetzung in den unteren Indizes unsymmetrisch, also $\Gamma^i_{kl} \neq \Gamma^i_{lk}$, so nennt man den Tensor
$$T^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$$
den *Torsionstensor*. Verschwindet dieser, so ist die Vernetzung symmetrisch.

Die klassische Form der allgemeinen Relativitätstheorie hat nur symmetrische Vernetzungen benutzt. (Die Einstein–Cartanschen Erweiterungen benützen dann unsymmetrische Formen.) In diesem Fall kann man dann das Transformationsgesetz (3.29) mit der intuitiven Vorstellung der Verschiebung im euklidischen Raum verknüpfen. In einem solchen Raum (Riemann–Raum) wird es dann möglich sein, diese Verschiebungen zumindest *lokal* (in der Umgebung des Punktes) ausführen zu können.

Theorem 3.7 *(Weyl, 1950) Die notwendige und ausreichende Bedingung für die Existenz eines speziellen lokalen Koordinatensystemes, in welchem die Komponenten eines Vektors durch eine infinitesimale Verschiebung aufgrund von (3.29) nicht verändert werden, besteht darin, daß die Koeffizienten der affinen Vernetzungen in ihren unteren Indizes symmetrisch sind.*

Beweis der Notwendigkeit:

Wir nehmen nun an, daß in einem spezifischen Koordinatensystem x'^i die Komponenten eines beliebigen Vektors ξ'^a unter infinitesimalen Verschiebungen aus einem gegebenen Punkt unverändert bleiben. Dies bedeutet, daß $\mathrm{d}\xi'^a = 0$ in diesem Koordinatensystem gelten muß. Damit gilt aber auch
$$\Gamma'^j_{ms}\mathrm{d}x'^m\xi'^s = 0.$$
Das Produkt $\mathrm{d}x'^m\xi'^s$ ist beliebig, damit muß $\Gamma'^j_{ms} = 0$ erfüllt sein. Wir verwenden nun (3.31):
$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \\ &= \left(\partial_i x'^j \Gamma^i_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta x'^j\right) \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \end{aligned}$$

oder

$$\partial_i x'^j \Gamma^i_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta x'^j.$$

Da

$$\partial_\alpha \partial_\beta x'^j = \partial_\beta \partial_\alpha x'^j$$

gilt, folgt sofort, daß $\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha}$ sein muß.

Beweis der ausreichenden Bedingung:

Wir verwenden den Punkt P als den Ursprung des Koordinatensystems mit $x^i = 0$ und suchen ein spezielles Koordinatensystem x'^i unter Verwendung der Transformation:

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2} A^i_{jk} x^j x^k \tag{3.33}$$

mit

$$\partial_j x'^i \Big|_{x=0} = \delta^i{}_j.$$

Die Koeffizienten A^i_{jk} müssen noch definiert werden. Aus (3.31) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma'^j_{ms} &= \partial_i x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta \\
&= \Gamma^i_{\alpha\beta} \delta^j{}_i \delta^\alpha{}_m \delta^\beta{}_s - \underbrace{\partial_\alpha \partial_\beta \left(x^j + \frac{1}{2} A^j_{kl} x^k x^l \right)}_{=\partial_\alpha \left(\underbrace{\partial_\beta x^j}_{\delta^j{}_\beta} + \frac{1}{2} A^j_{kl} \underbrace{\partial_\beta x^k}_{\delta^k{}_\beta} x^l + \frac{1}{2} A^j_{kl} x^k \underbrace{\partial_\beta x^l}_{\delta^l{}_\beta} \right)} \delta^\alpha{}_m \delta^\beta{}_s \\
&= \Gamma^i_{\alpha\beta} \delta^j{}_i \delta^\alpha{}_m \delta^\beta{}_s - \frac{1}{2} \left(A^j_{\alpha\beta} + A^j_{\beta\alpha} \right) \delta^\alpha{}_m \delta^\beta{}_s \\
&= \Gamma^j_{ms} - \frac{1}{2} \left(A^j_{sm} + A^j_{ms} \right).
\end{aligned}$$

Nun ist $(A^j_{ms} + A^j_{sm})$ symmetrisch in s und m. Mit der Hypothese, daß auch Γ^j_{ms} symmetrisch ist, können wir

$$\frac{1}{2} \left(A^j_{ms} + A^j_{sm} \right) = \Gamma^j_{ms}$$

wählen, und erhalten $\Gamma'^j_{ms} = 0$ und damit $\mathrm{d}\xi'^i = 0$. Somit bestimmen die Koeffizienten A^j_{ms} ein Koordinatensystem, in welchem der intuitive Begriff der Verschiebung bei Konstanz der Komponenten *lokal* anwendbar ist.

3.7.3 Das geodätische Koordinatensystem

Das Koordinatensystem (3.33) wird ein *geodätisches Koordinatensystem* in Bezug auf die Vernetzung Γ genannt; es ist ganz offensichtlich nur lokal definiert. Es ist zudem nur bis auf eine lineare Transformation eindeutig definiert. Aus (3.31) folgt, daß zwei Koordinatensysteme x^i und x'^i, für welche $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ und $\Gamma'^i_{\alpha\beta}$ Null sind, über

$$\partial_\alpha \partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha \partial'_s x^\beta = 0$$

zueinander in Beziehung zu setzen sind. Wir können diese Gleichung, etwa in unserer Raumzeit, als ein System von vier homogenen Gleichungen ansehen, welche mit s indiziert sind:

$$\left(\partial_\alpha \partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha\right) \partial'_s x^\beta = 0, \qquad s = 0, \ldots, 3.$$

Hierbei sind die $(\partial_\alpha \partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha)$ die Unbekannten; ihre Determinante ist die Jakobische der Koordinatentransformation, welche ja stets von Null verschieden sein soll. Somit gibt es nur eine Lösung des Systems:

$$\left(\partial_\alpha \partial_\beta x'^j \partial'_m x^\alpha\right) = 0,$$

und mit dem bereits benützten Argument folgt:

$$\partial_\alpha \partial_\beta x'^j = 0.$$

Dies zeigt, daß x^i und x'^i tatsächlich lokal über eine lineare Transformation in Beziehung stehen. Eine lineare Eins–zu–Eins–Transformation nennt man eine *affine Transformation* und die $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ sind die *affinen Vernetzungen.*

3.7.4 Parallelverschiebung von Vektoren

Wir haben in den bisherigen Untersuchungen keinerlei metrische Eigenschaften verwendet. Nunmehr wollen wir uns auf *Riemannsche Räume* konzentrieren und das Verschiebungsgesetz der metrischen Bedingung unterwerfen, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren unter einer Verschiebung unverändert bleiben soll. Im speziellen wird die Länge des Vektors unverändert bleiben, so wie im euklidischen Raum.

Wir betrachten die infinitesimale Verschiebung entlang einer Kurve und drücken die Tatsache aus, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren ξ^i und η^k konstant bleibt, wenn sie entlang der Kurve verschoben werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ik}\xi^i\eta^k\right) \stackrel{!}{=} 0,$$

wobei ds das Bogenelement entlang der Verschiebungskurve ist. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_l g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^k + g_{ik}\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}s}\eta^k + g_{ik}\xi^i\frac{\mathrm{d}\eta^k}{\mathrm{d}s} \\
& \left[\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}s} = -\Gamma^i_{mj}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\xi^j\right] \\
&= \partial_l g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^k - g_{ik}\Gamma^i_{ml}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\xi^l\eta^k - g_{ik}\xi^i\Gamma^k_{ml}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\eta^l \\
&= \partial_l g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^k - g_{rk}\Gamma^r_{li}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^k - g_{ir}\xi^i\Gamma^r_{lk}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\eta^k \\
&= \left(\partial_l g_{ik} - g_{rk}\Gamma^r_{li} - g_{ir}\Gamma^r_{lk}\right)\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^k
\end{aligned}
$$

oder

$$\partial_l g_{ik} - g_{rk}\Gamma^r_{li} - g_{ir}\Gamma^r_{lk} = 0 \tag{3.34}$$

und weiters durch zyklische Vertauschung:

$$\partial_i g_{kl} - g_{rl}\Gamma^r_{ki} - g_{kr}\Gamma^r_{il} = 0 \tag{3.35}$$

$$\partial_k g_{li} - g_{ri}\Gamma^r_{lk} - g_{lr}\Gamma^r_{ki} = 0 \tag{3.36}$$

Wir fassen diese drei Ergebnisse geeignet zusammen:

$$
\begin{aligned}
\partial_k g_{li} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ik} - g_{ri}\Gamma^r_{lk} - g_{lr}\Gamma^r_{ki} - g_{rl}\Gamma^r_{ki} - & \\
g_{rk}\Gamma^r_{il} + g_{rk}\Gamma^r_{li} + g_{ir}\Gamma^r_{lk} &= 0 \\
\partial_k g_{li} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ik} - 2g_{lr}\Gamma^r_{ki} &= 0.
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit g^{lr} führt dann schließlich zu

$$\Gamma^r_{ki} = \frac{1}{2}g^{lr}\left(\partial_k g_{li} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ik}\right). \tag{3.37}$$

Wir führen das *Christoffelsche Symbol erster Art* ein:

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{il} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ik}\right), \tag{3.38}$$

und das *Christoffelsche Symbol zweiter Art:*

$$\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix} = g^{jl}\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Somit folgt für die Vernetzung:

$$\Gamma^r_{ki} = \begin{Bmatrix} r \\ ki \end{Bmatrix}. \tag{3.40}$$

Nachdem wir nun die Vernetzungskoeffizienten in eindeutiger Weise über das Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmt haben, finden wir das Gesetz für die Parallelverschiebung im metrischen Raum:

$$\mathrm{d}\xi^i = -\left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathrm{d}x^\alpha \xi^\beta \tag{3.41}$$

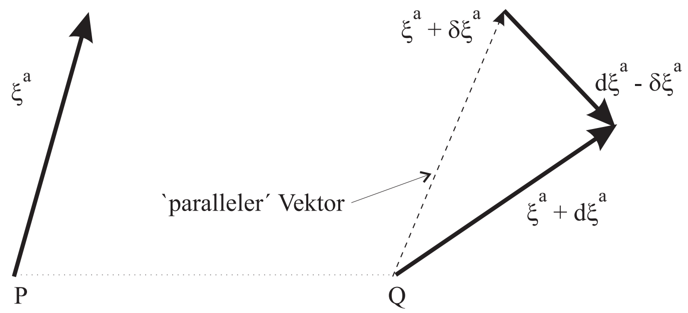


Abbildung 3.5: Zur 'Parallelverschiebung' von Vektoren.

3.7.5 Die geodätische Linie.

Wir haben uns bereits in Abschnitt 2.2 mit dieser Problematik beschäftigt, und dort die geodätische Linie als extremale Verbindung zwischen zwei Punkten definiert. Wir wollen aber zunächst einen anderen Weg verfolgen: wir suchen nach einer Definition der Geraden im affinen Raum. Im euklidischen Raum charakterisiert man eine Gerade mit der Eigenschaft, daß ein beliebiger Tangentenvektor an die Gerade zu sich selbst parallel bleibt, wenn er entlang der Geraden verschoben wird.

Wir können nun das zuvor bewiesene Gesetz der Vektorverschiebung und diese charakteristische Eigenschaft dazu benützen, eine *verallgemeinerte gerade Linie* im affinen Raum zu definieren; eine solche Linie ist dann eine *geodätische Linie.* Wir betrachten dazu die Kurve $x^i(q)$, welche durch q parametrisiert wird. $\xi^i(q)$ sei ein beliebiger Tangentenvektor an die Kurve, und die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}q} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}q}\xi^\beta = 0$$

drückt aus, daß er unverändert entlang der Kurve verschoben wird. Ein spezieller Tangentenvektor ist $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}q$; ein etwas allgemeinerer Vektor hat die Form $\lambda(q)(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}q)$, wobei $\lambda(q)$ eine beliebige Funktion von q ist. Damit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\lambda(q)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}q}\right) = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}q}\lambda(q)\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}q}$$

$$\lambda(q)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\lambda(q)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}q}\right) = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\lambda(q)\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}q}\lambda(q)\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}q}.$$

Mit

$$\mathrm{d}p = \frac{1}{\lambda(q)}\mathrm{d}q$$

folgt schließlich unmittelbar:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}p^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}p} = 0. \tag{3.42}$$

Diese Gleichung ist offensichtlich die Definitionsgleichung einer geodätischen Linie im affinen Raum.

Man muß unbedingt darauf hinweisen, daß (3.42) nicht unabhängig vom Parameter p ist. Um dies zu zeigen, wechseln wir von p auf $\pi(p)$ über, und erhalten aus (3.42):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p}\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\right)\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}p^2}\\
&= \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\pi^2}\left(\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}p^2}
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}p^2} + \left[\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\pi^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\pi}\right]\left(\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p}\right)^2 = 0.$$

Dies entspricht (3.42) nur wenn

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}p^2} = 0$$

erfüllt ist. Da $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\pi}$ stets ungleich Null gewählt werden kann, muß $\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}p^2} = 0$ gelten; die Parameter p und π müssen zueinander proportional sein. Somit ist der Parameter p, welcher die geodätische Linie nach (3.42) parametrisiert, nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmbar.

Die Gleichungen (3.42) sind ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösung des Anfangswertproblemes [$x^a(0)$ und $\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}p}|_{p=0}$ sind gegeben] ist somit eindeutig. Dies bedeutet, daß durch einen

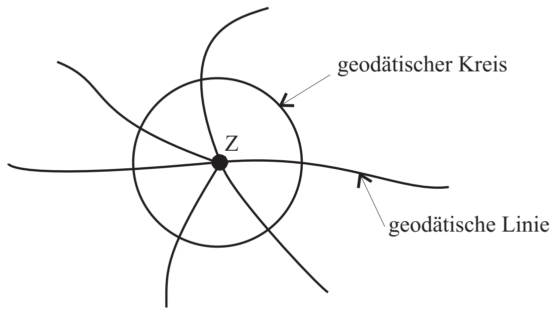


Abbildung 3.6: Das Gaußsche Koordinatensystem.

Punkt mit gegebener Tangente in diesem Punkt, eine und nur eine geodätische Linie gezogen werden kann. Der gesamte Raum kann mit geodätischen Linien erfüllt werden. Diese schneiden sich nicht!

Im Riemannschen Raum verwenden wir das Gesetz der Parallelverschiebung; der Tangentenvektor muß in diesem Fall von konstanter Länge sein und der einzige solche Vektor ist $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$, wobei s die Bogenlänge ist. Es gilt für diesen Tangentenvektor:

$$g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1$$

und wir erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ \alpha\beta \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{3.43}$$

Geodätische Linie und geodätischer Kreis bilden ein besonders einfaches Koordinatensystem, das *Gaußsche Koordinatensystem* (Abb. 3.6).

3.8 Tensoranalysis

3.8.1 Kovariante Differentiation

Die Festlegung einer Vernetzung entspricht einer Vereinbarung für das Differenzieren von Tensorfeldern. Um dies zeigen zu können, zeigt man zuerst, daß für ein kontravariantes Vektorfeld ξ^i der elementare Ausdruck $\partial_j\xi^i$ in Überlappungsbereichen nicht wie ein Tensor transformiert:

$$\begin{aligned}
\xi'^a &= \partial_b x'^a \xi^b \\
\partial'_c \xi'^a &= \partial'_c \left(\partial_b x'^a \xi^b\right) \\
&= \partial'_c x^d \partial_d \left(\partial_b x'^a \xi^b\right) \\
&= \underbrace{\partial'_c x^d \partial_b x'^a \partial_d \xi^b}_{\boxed{1}} + \underbrace{\partial_b \partial_d x'^a \partial'_c x^d \xi^b}_{\boxed{2}}
\end{aligned}$$

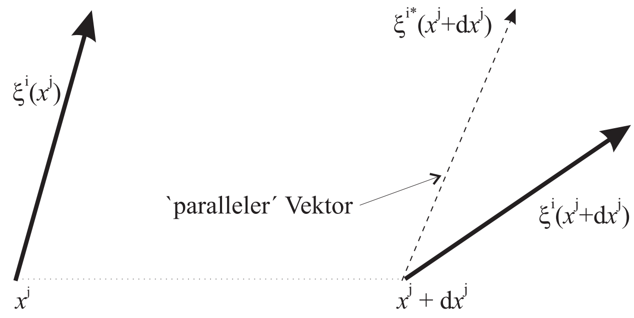


Abbildung 3.7: Zur kovarianten Differentiation von Tensoren.

Wäre nur der Term $\boxed{1}$ gegeben, so hätten wir das übliche Transformationsgesetz für einen Tensor vorliegen. Der fundamentale Grund dafür, daß $\partial_j \xi^i$ im Überlappungsbereich *nicht* wie ein Tensor transformiert, liegt in der Definition der Differentiation, welche den Vergleich einer Größe an zwei benachbarten Punkten enthält, wobei durch einen Parameter dividiert wird, welcher den Abstand dieser beiden Punkte charakterisiert:

$$\lim_{\delta n \to 0} \frac{\xi^a(P) - \xi^a(Q)}{\delta n}.$$

Aus den Transformationsgesetzen folgt aber, daß die Transformationsmatrizen an *verschiedenen* Punkten berechnet werden, womit $\xi^a(P) - \xi^a(Q)$ kein Tensor sein kann. Wir bezeichnen daher $\partial_j \xi^i = \xi^i{}_{|j}$ als die *normale Ableitung* einer Tensorkomponente:

$$\partial_a T^\alpha_{\beta\gamma} = T^\alpha_{\beta\gamma|a} = \frac{\partial T^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^a}. \tag{3.44}$$

Wir wollen aber eine tensorielle Ableitung einführen, also eine Operation, welche als Ergebnis wiederum einen Tensor hat. Dies wird vom Prinzip der Kovarianz physikalischer Gleichungen gefordert, welche ja in tensorieller Form formuliert werden sollen. Wir gehen also wieder auf an Ausgangspunkt zurück.

Wir vergleichen also (Abb. 3.7) im Punkte $x^j + \mathrm{d}x^j$ den Wert $\xi^i(x^j + \mathrm{d}x^j)$ des Vektorfeldes mit dem Wert $\xi^{i\star}(x^j + \mathrm{d}x^j)$, welchen wir nach dem Verschiebungsgesetz erhalten würden, und berechnen die Differenz:

$$\xi^i(x^j + \mathrm{d}x^j) - \xi^{i\star}(x^j + \mathrm{d}x^j).$$

Nun gilt

$$\xi^i(x^j + \mathrm{d}x^j) = \xi^i(x^j) + \partial_k \xi^i \mathrm{d}x^k + \mathcal{O}[(\mathrm{d}x^k)^2]$$

und

$$\xi^{i\star}(x^j + \mathrm{d}x^j) = \xi^i(x^j) - \Gamma^i_{kl} \xi^l \mathrm{d}x^k.$$

Damit erhalten wir:

$$\xi^i(x^j + \mathrm{d}x^j) - \xi^{i\star}(x^j + \mathrm{d}x^j) = \left[\partial_k \xi^i + \Gamma^i_{kl}\xi^l\right] \mathrm{d}x^k + \mathcal{O}[(\mathrm{d}x^k)^2]. \tag{3.45}$$

Dieser Ausdruck hat die Form einer Reihe und man kann daraus $\left[\partial_k \xi^i + \Gamma^i_{kl}\xi^l\right]$ als eine Art 'erste Ableitung' des Feldes interpretieren. Dies ist insbesonders deshalb möglich, weil diese Größe nicht von der Verschiebung $\mathrm{d}x^k$ abhängig ist. Wir **definieren** somit die *kovariante Ableitung* eines Vektorfeldes über:

$$\bigtriangledown_k \xi^i = \xi^i{}_{\|k} \stackrel{!}{=} \partial_k \xi^i + \Gamma^i_{kl}\xi^l \tag{3.46}$$

und beweisen, daß dies wiederum ein Tensor ist, indem wir in ein transformiertes System übergehen und die Transformationseigenschaften von

$$\bigtriangledown'_b \xi'^a = \partial'_b \xi'^a + \Gamma'^a_{bc}\xi'^c$$

untersuchen. Für die einzelnen Elemente erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\xi'^a &= \partial_b x'^a \xi^b \\
\Gamma'^a_{bc} &= \partial_p x'^a \partial'_b x^q \partial'_c x^r \Gamma^p_{qr} - \partial'_k x^q \partial'_c x^r \partial_q \partial_r x'^a \\
\partial'_b \xi'^a &= \partial'_b \partial_p x'^a \xi^p \\
&= \partial'_b \left(\partial_p x'^a\right) \xi^p + \partial_p x'^a \partial'_b \xi^p \\
&= \partial'_b x^q \partial_q \partial_p x'^a \xi^p + \partial_p x'^a \partial'_b x^q \partial_q \xi^p
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\bigtriangledown'_b \xi'^a &= \partial_p x'^a \partial'_b x^q \left(\partial_q \xi^p\right) + \left(\partial'_b x^q \partial_q \partial_p x'^a\right) \xi^p + \Big(\partial_p x'^a \partial'_b x^q \partial'_c x^r \Gamma^p_{qr} - \\
&\quad \partial'_b x^q \partial'_c x^r \partial_q \partial_r x'^a\Big) \partial_s x'^c \xi^s \\
&= \partial_p x'^a \partial'_b x^q \left(\partial_q \xi^p\right) + \partial_p x'^a \partial'_b x^q \left(\underbrace{\partial'_c x^r \partial_s x'^c}_{\delta^r{}_s} \Gamma^p_{qr} \xi^s\right) + \\
&\quad \left(\partial'_b x^q \partial_q \partial_p x'^a\right) \xi^p - \left(\partial'_b x^q \partial_q \partial_r x'^a\right) \left(\underbrace{\partial'_c x^r \partial_s x'^c}_{\delta^r{}_s} \xi^s\right) \\
&= \partial_p x'^a \partial'_b x^q \left(\partial_q \xi^p\right) + \partial_p x'^a \partial'_b x^q \Gamma^p_{qs} \xi^s + \left(\partial'_b x^q \partial_q \partial_p x'^a\right) \xi^p - \\
&\quad \left(\partial'_b x^q \partial_q \partial_r x'^a\right) \xi^r \\
&= \partial_p x'^a \partial'_b x^q \left[\partial_q \xi^p + \Gamma^p_{qs} \xi^s\right] \\
&= \partial_p x'^a \partial'_b x^q \left(\bigtriangledown_q \xi^p\right),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

und wir sehen, daß $\bigtriangledown_b \xi^a$ wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert (einfach ko–, einfach kontravariant). Ganz analog kann man zeigen, daß für kovariante Felder die Beziehung

$$\bigtriangledown_b \xi_a = \xi_{a\|b} = \partial_b \xi_a - \Gamma^c_{ab}\xi_c \tag{3.48}$$

aufgefunden wird. Man kann auch wieder auf analogem Wege verifizieren, daß (3.48) ein Tensor zweiter Stufe ist, welcher zweifach kovariant ist. (3.48) ist auch dadurch motiviert, daß die Kettenregel bei der Wirkung auf Produkte von ko– und kontravarianten Tensoren gelten soll. Wir untersuchen daher $\phi = \xi^b \eta_b$:

$$
\begin{aligned}
\nabla_a \phi &= \nabla_a \left(\xi^b \eta_b\right) \\
&= \left(\nabla_a \xi^b\right) \eta_b + \xi^b \left(\nabla_a \eta_b\right) \quad \text{(Kettenregel)} \\
&= \left(\partial_a \xi^b + \Gamma^b_{ac}\xi^c\right) \eta_b + \xi^b \left(\partial_a \eta_b - \Gamma^c_{ab}\eta_c\right) \\
&= \left(\partial_a \xi^b\right) \eta_b + \xi^b \left(\partial_a \eta_b\right) + \underbrace{\Gamma^b_{ac}\xi^c\eta_b}_{=\Gamma^c_{ab}\xi^b\eta_c} - \Gamma^c_{ab}\xi^b\eta_c \\
&= \left(\partial_a \xi^b\right) \eta_b + \xi^b \left(\partial_a \eta_b\right) \\
&= \partial_a \left(\xi^b \eta_b\right) \\
&= \partial_a \phi.
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

Aus diesem Schema folgt dann allgemeiner:

$$\nabla_a T^{bc}_d = T^{bc}_{d\ \|a} = \partial_a T^{bc}_d + \Gamma^b_{ap} T^{pc}_d + \Gamma^c_{ap} T^{bp}_d - \Gamma^q_{ad} T^{bc}_q. \tag{3.50}$$

In Riemann–Räumen können wir die Beziehung (3.40) dazu benützen, um die Vernetzung durch die Christoffel–Symbole zu ersetzen. Damit ergibt sich aus (3.46):

$$\xi^i{}_{\|k} = \partial_k \xi^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} \xi^l \tag{3.51}$$

und aus (3.48):

$$\xi_{i\|k} = \partial_k \xi_i - \left\{ \begin{matrix} l \\ ki \end{matrix} \right\} \xi_l. \tag{3.52}$$

Schließlich ergibt (3.50):

$$T^{ab}_{c\ \|l} = \partial_l T^{ab}_c + \left\{ \begin{matrix} a \\ sl \end{matrix} \right\} T^{sb}_c + \left\{ \begin{matrix} b \\ sl \end{matrix} \right\} T^{as}_c - \left\{ \begin{matrix} s \\ cl \end{matrix} \right\} T^{ab}_s. \tag{3.53}$$

Wir wenden nun die Regeln der kovarianten Differentiation auf den metrischen Tensor g_{ik} an, und formulieren das *Ricci–Theorem*:

Theorem 3.8 *Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors eines Riemann–Raumes ist Null. Somit ist der metrische Tensor des Riemann–Raumes im absoluten Sinn konstant. Daraus folgt weiters, daß die Operationen des Herauf– und Herunterziehens von Indizes mit der kovarianten Differentiation vertauschen, wenn der metrische Tensor als Fundamentaltensor verwendet wird.*

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\nabla_l g_{ik} &= \underbrace{\partial_l g_{ik} - \left\{ \begin{matrix} r \\ il \end{matrix} \right\} g_{rk}}_{\boxed{1}} - \left\{ \begin{matrix} r \\ kl \end{matrix} \right\} g_{ir} \\
&= \left[\begin{aligned}
\boxed{1} &= \left[\left\{ \begin{matrix} r \\ il \end{matrix} \right\} = g^{rs} \left[\begin{matrix} il \\ s \end{matrix} \right] \right] \\
&= \partial_l g_{ik} - \underbrace{g^{rs} g_{rk}}_{\delta^s{}_k} \left[\begin{matrix} il \\ s \end{matrix} \right] \\
&= \partial_l g_{ik} - \left[\begin{matrix} il \\ k \end{matrix} \right] \\
&= \partial_l g_{ik} - \tfrac{1}{2} \left(\partial_l g_{ik} + \partial_i g_{kl} - \partial_k g_{il} \right) \\
&= \tfrac{1}{2} \partial_l g_{ik} + \tfrac{1}{2} \partial_k g_{il} - \tfrac{1}{2} \partial_i g_{kl} \\
&= \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right]
\end{aligned} \right] \\
&= \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} r \\ kl \end{matrix} \right\} g_{ir} \\
&= \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] - \underbrace{g^{rs} g_{ir}}_{\delta^s{}_i} \left[\begin{matrix} kl \\ s \end{matrix} \right] \\
&= \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] \\
&= 0 \qquad \textbf{w.z.b.w.}
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

3.8.2 Die Divergenz eines Tensors

Es wurde bereits bewiesen, daß $\xi^i{}_{\|l}$ ein Tensor zweiter Stufe ist; dann ist $\xi^i{}_{\|i}$ notwendiger Weise ein Skalar, da es offensichtlich die Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe bezeichnet. Wir nennen dies die *Divergenz* eines Tensors:

$$
\xi^i{}_{\|i} = \mathrm{div}\xi = \partial_i \xi^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ is \end{matrix} \right\} \xi^s . \tag{3.55}
$$

Wir verwenden nun zur weiteren Umformung das Ricci–Theorem 3.8:

$$
\begin{aligned}
\partial_h g_{ij} - \left\{ \begin{matrix} k \\ hi \end{matrix} \right\} g_{kj} - \left\{ \begin{matrix} k \\ hj \end{matrix} \right\} g_{ik} &= 0 \\
g^{ij} \partial_h g_{ij} - \left\{ \begin{matrix} k \\ hi \end{matrix} \right\} \underbrace{g^{ij} g_{kj}}_{g^i{}_k = \delta^i{}_k} - \left\{ \begin{matrix} k \\ hj \end{matrix} \right\} \underbrace{g^{ij} g_{ik}}_{g^j{}_k = \delta^j{}_k} &= 0
\end{aligned}
$$

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} - \left\{ \begin{matrix} i \\ hi \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} j \\ hj \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ ih \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ij}\partial_h g_{ij}. \tag{3.56}$$

Nun sind die g^{ik} die Elemente der inversen Matrix von g_{ik} und deshalb ist $g^{ik} = \Delta^{ik}/g$, mit $g = \det g_{ik}$. Man kann aber die Determinante entlang einer ihrer Zeilen expandieren. Für die dritte Reihe erhält man etwa $g = g_{3k}\Delta^{3k}$. Man kann dann weiter $\partial g/\partial g_{ik} = \Delta^{ik}$ schreiben, da Δ^{ik} eine Unterdeterminante von g ist, die g_{ik} selbst nicht enthält. Somit folgt:

$$g^{ik} = \frac{\Delta^{ik}}{g} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} i \\ ih \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}\partial_h g_{ik} \\ &= \frac{1}{2g}\partial_h g \\ &= \frac{1}{2}\partial_h \log|g| \\ &= \partial_h \log\sqrt{|g|} \\ &= \partial_h \log\sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_h\sqrt{-g} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Somit folgt dann für (3.55):

$$\begin{aligned} \xi^i{}_{\|i} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\partial_i\xi^i\sqrt{-g} + \xi^s\partial_s\sqrt{-g}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\xi^i\sqrt{-g}\right), \end{aligned} \tag{3.58}$$

oder für einen zweistufigen Tensor:

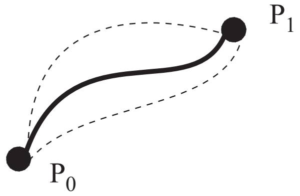
$$(\mathrm{div}T)_i = T_i^k{}_{\|k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\left(\sqrt{-g}T_i^k\right) - \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\} T_s^k$$

usw.

3.8.3 Alternative Ableitung der geodätischen Linie

Wir wollen nun die geodätische Linie aus der Forderung ableiten, daß sie eine extremale Verbindung zwischen zwei Punkten P_0 und P_1 sein soll. Die

Bogenlänge wollen wir mit t parametrisieren. Es gilt:



$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}t^2 &= g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k \\
S(x^i(t)) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \underbrace{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}_{W} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, W \stackrel{!}{=} \text{Extr.}
\end{aligned}
$$

W ist dabei eine rein geometrische Größe. Wir beschreiben nun mögliche Nachbarkurven durch

$$
x'^i = x^i + \varepsilon\hat{x}^i; \qquad \dot{x}'^i = \dot{x}^i + \varepsilon\dot{\hat{x}}^i
$$

und die Extremale soll für $\varepsilon = 0$ gefunden werden. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
S'(x^i(t) + \varepsilon\hat{x}^i(t)) &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, W'; \qquad W' = W'(x'^i, \dot{x}'^i) \\
&= S + \left.\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Die Extremalforderung lautet somit

$$
\delta S = \left.\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0
$$

und wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial W}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}'^i}\frac{\partial \dot{x}'^i}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial W}{\partial x^i}\hat{x}^i + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i}\dot{\hat{x}}^i\right] \\
&= \text{(partielle Integration des zweiten Termes)} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \hat{x}^i \left[\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i}\right] \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Also folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i} = 0. \tag{3.59}$$

Für die einzelnen Terme erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x^l} &= \partial_l \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} \\
&= -\frac{1}{2W}\partial_l\left(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k\right) \\
\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^l} &= -\frac{1}{W} g_{lk}\dot{x}^k \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{lk}\dot{x}^k\right)
\end{aligned}$$

und somit folgt aus (3.59):

$$\frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^k\partial_l g_{ik} - \dot{x}^i\dot{x}^k\partial_i g_{lk} - g_{lk}\ddot{x}^k = 0. \tag{3.60}$$

Aus $g_{ik\|l} = 0$ und $g_{lk\|i} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\partial_l g_{ik} &= \left\{ \begin{array}{c} s \\ il \end{array} \right\} g_{sk} + \left\{ \begin{array}{c} s \\ kl \end{array} \right\} g_{is} \\
\partial_i g_{lk} &= \left\{ \begin{array}{c} s \\ il \end{array} \right\} g_{sk} + \left\{ \begin{array}{c} s \\ ik \end{array} \right\} g_{ls}
\end{aligned}$$

und wir erhalten für (3.60):

$$\begin{aligned}
&\dot{x}^i\dot{x}^k\left(\frac{1}{2}\partial_l g_{ik} - \partial_i g_{lk}\right) = \\
&= \dot{x}^i\dot{x}^k\left(\frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} s \\ il \end{array} \right\} g_{sk} + \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} s \\ kl \end{array} \right\} g_{is} - \left\{ \begin{array}{c} s \\ il \end{array} \right\} g_{sk} - \left\{ \begin{array}{c} s \\ ik \end{array} \right\} g_{ls}\right) \\
&= \dot{x}^i\dot{x}^k\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} s \\ il \end{array} \right\} g_{sk} + \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} s \\ kl \end{array} \right\} g_{is}}_{=\ 0;\ i,k \text{ sind Summationsindizes, } g_{ik} \text{ ist symmetrisch}} - \left\{ \begin{array}{c} s \\ ik \end{array} \right\} g_{ls}\right) \\
&= -\dot{x}^i\dot{x}^k\left\{ \begin{array}{c} s \\ ik \end{array} \right\} g_{ls}.
\end{aligned}$$

Es folgt damit weiter

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^k g_{lk} + \dot{x}^i\dot{x}^k\left\{ \begin{array}{c} s \\ ik \end{array} \right\} g_{ls} &= 0 \\
\ddot{x}^s + \dot{x}^i\dot{x}^k\left\{ \begin{array}{c} s \\ ik \end{array} \right\} &= 0 \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

was der Gleichung (3.43) entspricht.

3.8.4 Der Torsionstensor

Es sei ϕ ein glattes Skalarfeld. Es gilt dann in jedem Kartenbereich $\partial_a\partial_b\phi = \partial_b\partial_a\phi$. Im Gegensatz dazu muß aber $\nabla_a \nabla_b \phi$ nicht notwendigerweise gleich $\nabla_b \nabla_a \phi$ sein. Man kann zeigen, daß stets ein Tensor T^c_{ab}, der *Torsionstensor,* existiert, welcher wie folgt gegeben ist:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\phi = T^c_{ab} \nabla_c \phi. \tag{3.62}$$

Ist $T^c_{ab} = 0$, so ist die Vernetzung torsionsfrei. In Einstein's Theorie der Gravitation ist es eine *Annahme*, daß der Torsionstensor verschwindet. In allgemeineren Theorien – etwa der Einstein–Cartan Theorie – muß T^c_{ab} nicht verschwinden und erhält dadurch eine physikalische Bedeutung.

Wir wollen nun T^c_{ab} durch die Vernetzung Γ^c_{ab} ausdrücken. Es gilt:

$$\nabla_a\xi_b = \partial_a\xi_b - \Gamma^c_{ba}\xi_c.$$

Setzen wir nun $\xi_b = \nabla_b\phi = \partial_b\phi$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \phi &= \partial_a\partial_b\phi - \Gamma^c_{ba}\partial_c\phi \\ \nabla_b \nabla_a \phi &= \partial_b\partial_a\phi - \Gamma^c_{ab}\partial_c\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\phi &= (\Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab})\,\partial_c\phi \\ &= T^c_{ab} \nabla_c \phi \end{aligned}$$

$$T^c_{ab} = -\Gamma^c_{ab} + \Gamma^c_{ba} = -2\Gamma^c_{[ab]} \tag{3.63}$$

mit

$$\Gamma^c_{[ab]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}\right). \tag{3.64}$$

Somit wird offensichtlich $\Gamma^c_{[ab]}$ ein Tensor. Die Bedingung der Torsionsfreiheit zeigt sich wiederum in einer symmetrischen Vernetzung. (Siehe auch Seite 51, wo der Torsionstensor ähnlich eingeführt wurde.)

3.9 Der Riemannsche Tensor

3.9.1 Definition

Wir können nun den fundamentalen Tensor vierter Stufe (einfach kontra– und dreifach kovariant) einführen, welcher für jede Mannigfaltigkeit mit Vernetzung existiert. Wir vereinbaren dabei nur, daß die Vernetzung zumindest einfach differenzierbar ist, daß also $\partial_a\Gamma^b_{cd}$ in jedem Kartengebiet existiert. Wir werden dann später sehen, daß dieser Tensor in der allgemeinen Relativitätstheorie das Gravitationsfeld bestimmen wird.

Dieser Tensor entsteht als Maß für die Nichtvertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes.

Theorem 3.9 *Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit der Vernetzung Γ^c_{ab}, welche zumindest einmal in jedem Kartengebiet differenzierbar ist. Es existiert dann stets ein eindeutiges Tensorfeld ${R_{abc}}^d$ mit der Eigenschaft*

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\xi_c - T^d_{ab}\xi_{c\|d} = -{R_{abc}}^d\xi_d \tag{3.65}$$

für jedes glatte Vektorfeld ξ_c. T^d_{ab} ist dabei der Torsionstensor nach (3.62).

Beweis: Wir benützen (3.48) und (3.50):

$$\begin{aligned}
\nabla_a \nabla_b \xi_c &= \partial_a(\nabla_b\xi_c) - \Gamma^p_{ab}\nabla_p\xi_c - \Gamma^p_{ac}\nabla_b\xi_p \\
\nabla_b \nabla_a \xi_c &= \partial_b(\nabla_a\xi_c) - \Gamma^p_{ba}\nabla_p\xi_c - \Gamma^p_{bc}\nabla_a\xi_p.
\end{aligned}$$

Wir subtrahieren diese beiden Gleichungen voneinander, und finden:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\xi_c + (\Gamma^p_{ab}\nabla_p\xi_c - \Gamma^p_{ba}\nabla_p\xi_c) = \\
&= \partial_a(\nabla_b\xi_c) - \partial_b(\nabla_a\xi_c) - \Gamma^p_{ac}\nabla_b\xi_p + \Gamma^p_{bc}\nabla_a\xi_p
\end{aligned}$$

Wir schreiben weiter:

$$\begin{aligned}
\partial_a \nabla_b \xi_c &= \partial_a\left(\partial_b\xi_c - \Gamma^d_{bc}\xi_d\right) \\
&= \partial_a\partial_b\xi_c - \left(\partial_a\Gamma^d_{bc}\right)\xi_d - \Gamma^d_{bc}\partial_a\xi_d \\
\partial_b \nabla_a \xi_c &= \partial_b\partial_a\xi_c - \left(\partial_b\Gamma^d_{ac}\right)\xi_d - \Gamma^d_{ac}\partial_b\xi_d
\end{aligned}$$

$$(\Gamma^p_{ab} - \Gamma^p_{ba})\nabla_p\xi_c = \;(3.63)\; = -T^p_{ab}\nabla_p\xi_c$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^p_{ac}\nabla_b\xi_p &= \Gamma^p_{ac}\left(\partial_b\xi_p - \Gamma^d_{bp}\xi_d\right) \\
&= \Gamma^p_{ac}\partial_b\xi_p - \Gamma^p_{ac}\Gamma^d_{bp}\xi_d \\
\Gamma^p_{bc}\nabla_a\xi_p &= \Gamma^p_{bc}\left(\partial_a\xi_p - \Gamma^d_{ap}\xi_d\right) \\
&= \Gamma^p_{bc}\partial_a\xi_p - \Gamma^p_{bc}\Gamma^d_{ap}\xi_d
\end{aligned}$$

und fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\xi_c - T^d_{ab}\nabla_d\xi_c = \\
&= \partial_a\partial_b\xi_c - \left(\partial_a\Gamma^d_{bc}\right)\xi_d - \Gamma^d_{bc}\partial_a\xi_d - \partial_b\partial_a\xi_c + \left(\partial_b\Gamma^d_{ac}\right)\xi_d + \Gamma^d_{ac}\partial_b\xi_d - \\
&\quad \Gamma^p_{ac}\partial_b\xi_p + \Gamma^p_{ac}\Gamma^d_{bp}\xi_d + \Gamma^p_{bc}\partial_a\xi_p - \Gamma^p_{bc}\Gamma^d_{ap}\xi_d \\
&= \left(-\partial_a\Gamma^d_{bc} + \partial_b\Gamma^d_{ac} - \Gamma^p_{bc}\Gamma^d_{ap} + \Gamma^p_{ac}\Gamma^d_{bp}\right)\xi_d.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$R_{abc}{}^{d} = \partial_a \Gamma^d_{bc} - \partial_b \Gamma^d_{ac} + \Gamma^p_{bc}\Gamma^d_{ap} - \Gamma^p_{ac}\Gamma^d_{bp} \tag{3.66}$$

und haben damit (3.65) bewiesen. Die zusätzliche Verwendung von

$$\frac{1}{2}\left(A_{abcd} - A_{cbad}\right) = A_{[a|b|c]d}$$

erlaubt dann für (3.66) die Kurzform:

$$\frac{1}{2} R_{abc}{}^{d} = \partial_{[a}\Gamma^d_{b]c} - \Gamma^p_{[a|c}\Gamma^d_{b]p}. \tag{3.67}$$

Mit $R_{abc}{}^{d}$ wurde der *Riemann–Christoffelsche Tensor* in seiner dreifach ko– und einfach kontravarianten Form eingeführt.

In völliger Analogie finden wir für kontravariante Vektoren:

$$\bigtriangledown_{[a} \bigtriangledown_{b]} \xi^c = \frac{1}{2} T^d_{ab} \bigtriangledown_d \xi^c + \frac{1}{2} R_{abd}{}^{c} \xi^d. \tag{3.68}$$

Aus der Definition (3.65) wird die Symmetrie

$$R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d} \tag{3.69}$$

offensichtlich. Eine weitere wichtige Symmetrie ergibt sich, wenn die kovariante Ableitung torsionsfrei ist, wenn also $T^c_{ab} = 0$ ist. Es folgt dann aus (3.65):

$$\bigtriangledown_a \bigtriangledown_b \xi_c - \bigtriangledown_b \bigtriangledown_a \xi_c = -R_{abc}{}^{d} \xi_d$$

für jedes ξ_c. Wir untersuchen nun die Summe

$$\begin{aligned}
&\left(R_{abc}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} + R_{bca}{}^{d}\right)\xi_d = \\
&= \bigtriangledown_a \bigtriangledown_b \xi_c - \bigtriangledown_b \bigtriangledown_a \xi_c + \bigtriangledown_c \bigtriangledown_a \xi_b - \bigtriangledown_a \bigtriangledown_c \xi_b + \bigtriangledown_b \bigtriangledown_c \xi_a - \bigtriangledown_c \bigtriangledown_b \xi_a.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\xi_c = \bigtriangledown_c \psi$ und erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
&\left(R_{abc}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} + R_{bca}{}^{d}\right) \bigtriangledown_d \psi = \\
&= \bigtriangledown_a \bigtriangledown_b \bigtriangledown_c \psi - \bigtriangledown_b \bigtriangledown_a \bigtriangledown_c \psi + \bigtriangledown_c \bigtriangledown_a \bigtriangledown_b \psi - \bigtriangledown_a \bigtriangledown_c \bigtriangledown_b \psi + \\
&\quad \bigtriangledown_b \bigtriangledown_c \bigtriangledown_a \psi - \bigtriangledown_c \bigtriangledown_b \bigtriangledown_a \psi \\
&= \left(\bigtriangledown_a \bigtriangledown_b - \bigtriangledown_b \bigtriangledown_a\right) \bigtriangledown_c \psi + \left(\bigtriangledown_c \bigtriangledown_a - \bigtriangledown_a \bigtriangledown_c\right) \bigtriangledown_c \psi + \\
&\quad \left(\bigtriangledown_b \bigtriangledown_c - \bigtriangledown_c \bigtriangledown_b\right) \bigtriangledown_a \psi \\
&= 0
\end{aligned}$$

was aus der Torsionsfreiheit von $\bigtriangledown_a$ folgt. Somit wird

$$\left(R_{abc}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} + R_{bca}{}^{d}\right) \bigtriangledown_d \psi = 0$$

für jede beliebige Wahl von ψ; somit muß

$$R_{abc}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} = 0 \tag{3.70}$$

gelten.

3.9.2 Die Identität von Bianchi

Theorem 3.10 *Für torsionsfreie kovariante Ableitungen* ∇_a *gilt*

$$\left\{\nabla_a R_{bce}{}^d\right\}_{[abc]} = \nabla_{[a} R_{bc]e}{}^d = 0. \tag{3.71}$$

$[abc]$ *deutet dabei die zyklische Vertauschung der Indizes* a*,* b *und* c *an.*

Zum Beweis von (3.71) benötigen wir zunächst den Satz:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c\xi^d = -R_{abc}{}^p \nabla_p \xi^d + R_{abq}{}^d \nabla_c \xi^q, \tag{3.72}$$

welcher nun bewiesen werden soll. Dazu berechnen wir die linke Seite dieses Ausdruckes und setzen zunächst

$$\nabla_c\xi^d = T_c{}^d$$

und bestimmen dann $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T_c{}^d$:

$$\begin{array}{rcl}
T_c{}^d{}_{\|b} & = & \partial_b T_c{}^d + \Gamma^d_{bp} T_c{}^p - \Gamma^p_{cb} T_p{}^d = X_{cb}{}^d \\
T_c{}^d{}_{\|a} & = & \partial_a T_c{}^d + \Gamma^d_{ap} T_c{}^p - \Gamma^p_{ca} T_p{}^d = X_{ca}{}^d \\
\hline
X_{cb}{}^d{}_{\|a} & = & \partial_a X_{cb}{}^d + \Gamma^d_{pa} X_{cb}{}^p - \Gamma^p_{ca} X_{pb}{}^d - \Gamma^p_{ba} X_{cp}{}^d \\
X_{ca}{}^d{}_{\|b} & = & \partial_b X_{ca}{}^d + \Gamma^d_{pb} X_{ca}{}^p - \Gamma^p_{cb} X_{pa}{}^d - \Gamma^p_{ab} X_{cp}{}^d \\
\hline
X_{cb}{}^d{}_{\|a} - X_{ca}{}^d{}_{\|b} & = & \partial_a X_{cb}{}^d - \partial_b X_{ca}{}^d + \Gamma^d_{pa} X_{cb}{}^p - \Gamma^d_{pb} X_{ca}{}^p \\
 & & -\Gamma^p_{ca} X_{pb}{}^d + \Gamma^p_{cb} X_{pa}{}^d - \underbrace{\Gamma^p_{ba} X_{cp}{}^d + \Gamma^p_{ab} X_{cp}{}^d}_{=0,\ \text{da}\ \Gamma^p_{ba}=\Gamma^p_{ab}\ \text{wegen Torsionsfreiheit}} \\
\hline
\partial_a X_{cb}{}^d & = & \partial_a \left(\partial_b T_c{}^d + \Gamma^d_{bp} T_c{}^p - \Gamma^p_{cb} T_p{}^d\right) \\
 & = & \left[\partial_a \left(\Gamma^d_{bp} T_c{}^p\right) = \left(\partial_a \Gamma^d_{bp}\right) T_c{}^p + \Gamma^d_{bp} \partial_a T_c{}^p\right] \\
 & = & \partial_a \partial_b T_c{}^d + \partial_a \Gamma^d_{bp} T_c{}^p + \Gamma^d_{bp} \partial_a T_c{}^p - \partial_a \Gamma^p_{cb} T_p{}^d - \\
 & & \Gamma^p_{cb} \partial_a T_p{}^d \\
\partial_b X_{ca}{}^d & = & \partial_b \partial_a T_c{}^d + \partial_b \Gamma^d_{ap} T_c{}^p + \Gamma^d_{ap} \partial_b T_c{}^p - \partial_b \Gamma^p_{ca} T_p{}^d - \\
 & & \Gamma^p_{ca} \partial_b T_p{}^d \\
\hline
\partial_a X_{cb}{}^d - \partial_b X_{ca}{}^d & = & \left(\partial_a \Gamma^d_{bp} - \partial_b \Gamma^d_{ap}\right) T_c{}^p - \left(\partial_a \Gamma^p_{cb} - \partial_b \Gamma^p_{ca}\right) T_p{}^d + \\
 & & \Gamma^d_{bp} \partial_a T_c{}^p - \Gamma^d_{ap} \partial_b T_c{}^p - \Gamma^p_{cb} \partial_a T_p{}^d + \Gamma^p_{ca} \partial_b T_p{}^d
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Gamma^d_{pa} X_{cb}{}^p & = & \Gamma^d_{pa} T_c{}^p{}_{\|b} \\
& = & \Gamma^d_{pa} \left(\partial_b T_c{}^p + \Gamma^p_{bs} T_c{}^s - \Gamma^s_{cb} T_s{}^p \right) \\
& = & \Gamma^d_{pa} \partial_b T_c{}^p + \Gamma^d_{pa} \Gamma^p_{bs} T_c{}^s - \Gamma^d_{pa} \Gamma^s_{cb} T_s{}^p \\
\Gamma^d_{pb} X_{ca}{}^p & = & \Gamma^d_{pb} \partial_a T_c{}^p + \Gamma^d_{pb} \Gamma^p_{as} T_c{}^s - \Gamma^d_{pb} \Gamma^s_{ca} T_s{}^p \\
\Gamma^p_{ca} X_{bp}{}^d & = & \Gamma^p_{ca} \partial_b T_p{}^d + \Gamma^p_{ca} \Gamma^d_{bs} T_p{}^s - \Gamma^p_{ca} \Gamma^s_{pb} T_s{}^d \\
\Gamma^p_{cb} X_{pa}{}^d & = & \Gamma^p_{cb} \partial_a T_p{}^d + \Gamma^p_{cb} \Gamma^d_{as} T_p{}^s - \Gamma^p_{cb} \Gamma^s_{pa} T_s{}^d
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
X_{cb}{}^d{}_{\|a} - X_{ca}{}^d{}_{\|b} & = & \left(\partial_a \Gamma^d_{bp} - \partial_b \Gamma^d_{ap} \right) T_c{}^p - \left(\partial_a \Gamma^p_{cb} - \partial_b \Gamma^p_{ca} \right) T_p{}^d + \\
& & \Gamma^d_{bp} \partial_a T_c{}^p - \Gamma^d_{ap} \partial_b T_c{}^p - \Gamma^p_{cb} \partial_a T_p{}^d + \Gamma^p_{ca} \partial_b T_p{}^d + \\
& & \Gamma^d_{pa} \partial_b T_c{}^p + \Gamma^d_{pa} \Gamma^p_{bs} T_c{}^s - \Gamma^d_{pa} \Gamma^s_{cb} T_s{}^p - \\
& & \Gamma^d_{pb} \partial_a T_c{}^p - \Gamma^d_{pb} \Gamma^p_{as} T_c{}^s + \Gamma^d_{pb} \Gamma^s_{ca} T_s{}^p - \\
& & \Gamma^p_{ca} \partial_b T_p{}^d - \Gamma^p_{ca} \Gamma^d_{bs} T_p{}^s + \Gamma^p_{ca} \Gamma^s_{pb} T_s{}^d + \\
& & \Gamma^p_{cb} \partial_a T_p{}^d + \Gamma^p_{cb} \Gamma^d_{as} T_p{}^s - \Gamma^p_{cb} \Gamma^s_{pa} T_s{}^d \\
& = & \left[\Gamma^p_{cb} \Gamma^d_{as} T_p{}^s = \Gamma^s_{cb} \Gamma^d_{ap} T_s{}^p = \Gamma^s_{cb} \Gamma^d_{pa} T_s{}^p \right] \\
& = & \left[\Gamma^d_{pb} \Gamma^s_{ca} T_s{}^p = \Gamma^d_{sb} \Gamma^p_{ca} T_p{}^s = \Gamma^d_{bs} \Gamma^p_{ca} T_p{}^s \right] \\
& = & \left(\Gamma^d_{bs|a} - \Gamma^d_{as|b} - \Gamma^d_{pa} \Gamma^p_{bs} - \Gamma^d_{pb} \Gamma^p_{as} \right) T_c{}^s - \\
& & \left(\Gamma^s_{cb|a} - \Gamma^s_{ca|b} - \Gamma^p_{cb} \Gamma^s_{pa} - \Gamma^p_{ca} \Gamma^s_{pq} \right) T_s{}^d \\
& = & R_{abs}{}^d T_c{}^s - R_{abc}{}^s T_s{}^d \\
& = & -R_{abs}{}^d \bigtriangledown_s \xi^d + R_{abc}{}^s \bigtriangledown_c \xi^b \qquad \textbf{w.z.b.w.}
\end{array}
$$

Wir wenden nun den zyklischen Operator

$$\{\ldots\}_{[cba]}$$

auf (3.72) an und erhalten:

$$
\begin{array}{l}
\left\{ R_{abs}{}^d \xi^s{}_{\|c} - R_{abc}{}^s \xi^d{}_{\|s} \right\}_{[cba]} = \\
\quad = \quad \left\{ \xi^d{}_{\|c\|b\|a} - \xi^d{}_{\|c\|a\|b} \right\}_{[cba]} \\
\quad = \quad \left\{ \xi^d{}_{\|c\|b\|a} - \xi^d{}_{\|c\|a\|b} + \xi^d{}_{\|b\|a\|c} - \xi^d{}_{\|b\|c\|a} + \xi^d{}_{\|a\|c\|b} - \xi^d{}_{\|a\|b\|c} \right\} \\
\quad = \quad \left\{ \xi^d{}_{\|c\|b\|a} - \xi^d{}_{\|b\|c\|a} + \xi^d{}_{\|b\|a\|c} - \xi^d{}_{\|a\|b\|c} + \xi^d{}_{\|a\|c\|b} - \xi^d{}_{\|c\|a\|b} \right\} \\
\quad = \quad \left\{ \xi^d{}_{\|c\|b\|a} - \xi^d{}_{\|b\|c\|a} \right\}_{[cba]} \\
\quad = \quad \left\{ \left(\xi^d{}_{\|c\|b} - \xi^d{}_{\|b\|c} \right)_{\|a} \right\}_{[cba]}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (3.68) = \left\{\left(R_{bcs}{}^{d}\xi^{s}\right)_{\|a}\right\}_{[cba]} \\
&= \left\{R_{bcs}{}^{d}{}_{\|a}\xi^{s} - R_{bcs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|a}\right\}_{[cba]}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Beziehung:

$$
\begin{aligned}
\left\{R_{bcs}{}^{d}{}_{\|a}\xi^{s}\right\}_{[cba]} &= \left\{R_{abs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|c} - R_{abc}{}^{s}\xi^{d}{}_{\|s} - R_{bcs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|a}\right\}_{[cba]} \\
&= \left\{R_{cbs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|a} + R_{bac}{}^{s}\xi^{d}{}_{\|s} - R_{bas}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|c}\right\}_{[cba]} \\
&= R_{cbs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|a} + R_{bac}{}^{s}\xi^{d}{}_{\|s} - R_{bas}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|c} \\
&\quad R_{acs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|b} + R_{cba}{}^{s}\xi^{d}{}_{\|s} - R_{cbs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|a} \\
&\quad R_{bas}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|c} + R_{acb}{}^{s}\xi^{d}{}_{\|s} - R_{acs}{}^{d}\xi^{s}{}_{\|b} \\
&= \left(R_{bac}{}^{s} + R_{cba}{}^{s} + R_{acb}{}^{s}\right)\xi^{d}{}_{\|s} \\
&= \left(-R_{abc}{}^{s} - R_{bca}{}^{s} - R_{cab}{}^{s}\right)\xi^{d}{}_{\|s} = (3.70) = 0.
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\left\{R_{bcs}{}^{d}{}_{\|a}\right\}_{[cba]}\xi^{s} = 0,
$$

und da ξ^s ein beliebiger Vektor ist, muß

$$
\left\{R_{bcs}{}^{d}{}_{\|a}\right\}_{[cba]} = 0
$$

gelten, womit die Bianchi–Identität bewiesen ist.

3.10 Der affin ebene Raum

3.10.1 Lemmas

Wir haben bereits die Tatsache diskutiert, daß in der allgemeinen affinen Mannigfaltigkeit das Konzept der Parallelität zusammenbricht, da wir beim Paralleltransport (Abb. 3.8) eines Vektors von einem Punkt zu irgendeinem anderen entlang unterschiedlicher Wege unterschiedliche Vektoren erhalten werden. Können wir aber einen Vektor von einem Punkt zu einem beliebigen anderen mit vom Transportweg unabhängigem Ergebnis bewegen, so bezeichnen wir die Verknüpfung als *integrabel.* Wir untersuchen nun zwei Lemmas, welche das Konzept des affin flachen Raumes, die Integrabilität und das Verschwinden des Riemannschen Tensors miteinander verknüpfen.

Lemma 3.1 *Es ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine integrable Verknüpfung, daß der Riemannsche Tensor verschwindet.*

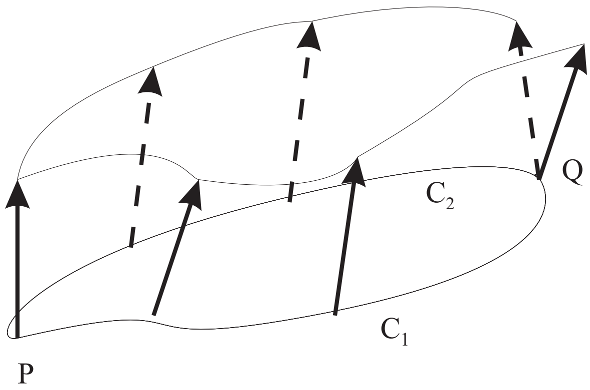


Abbildung 3.8: Die ‘Parallelverschiebung’ eines Vektors.

Beweis der Notwendigkeit:
Γ^a_{bc} ist integrabel und wir können mit einem Vektor ξ^a in einem beliebigen Punkt beginnen und ein eindeutiges Vektorfeld $\xi^a(n)$ über der Mannigfaltigkeit konstruieren, indem wir den Vektor parallel verschieben. Für die Parallelverschiebung gilt dann (siehe Abschnitt 3.7.2ff):

$$\nabla_c \xi^a = \partial_c \xi^a + \Gamma^a_{bc}\xi^b \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.73}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche auch Lösungen haben muß. Wir haben nun in Gleichung (3.68) die Beziehung

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} \xi^c = \frac{1}{2} T^d{}_{ab} \nabla_d \xi^c + \frac{1}{2} R_{abd}{}^c \xi^d$$

kennen gelernt. Unsere Forderung (3.73) bedingt somit notwendig:

$$R_{abd}{}^c \xi^d = 0,$$

und da ξ^d im gesamten Raum beliebig ist, folgt als notwendige Bedingung für den affin flachen Raum

$$R_{abd}{}^c = 0. \tag{3.74}$$

Beweis der hinreichenden Bedingung:
Wir untersuchen dazu den Unterschied in der Parallelverschiebung des Vektors ξ^a um eine infinitesimale Schleife (Abb. 3.9), welche x^a mit $x^a + \delta x^a + \mathrm{d}x^a$ verbindet. Zuerst über $x^a + \delta x^a$ und dann über $x^a + \mathrm{d}x^a$. Wir transportieren zunächst ξ^a von x^a nach $x^a + \delta x^a$ und erhalten, wie schon gezeigt wurde:

$$\xi^a(x + \delta x) = \xi^a(x) + \bar{\delta}\xi^a(x)$$

mit

$$\bar{\delta}\xi^a(x) = -\Gamma^a_{bc}(x)\xi^b(x)\delta x^c.$$

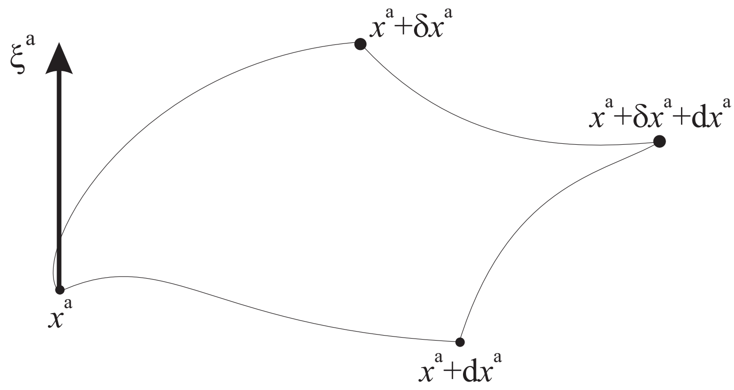


Abbildung 3.9: Die unterschiedliche Möglichkeiten der 'Parallelverschiebung' eines Vektors.

(Siehe auch Abb. 3.5.) Wenn wir dann ξ^a nach $x^a + \delta x^a + \mathrm{d}x^a$ transportieren erhalten wir

$$\xi^a(x + \delta x + \mathrm{d}x) = \xi^a(x + \delta x) + \bar{\delta}\xi^a(x + \delta x)$$

mit

$$\bar{\delta}\xi^a(x + \delta x) = -\Gamma^a_{bc}(x + \delta x)\xi^b(x + \delta x)\mathrm{d}x^c.$$

Wir entwickeln nach Taylor und verwenden die obigen Ergebnisse, wobei wir annehmen, daß alles im Punkte x^a berechnet wird, und unter Verwendung von (3.45) folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\xi^a(x + \delta x) &= -\left(\Gamma^a_{bc} + \partial_d \Gamma^d_{bc}\delta x^d\right)\left(\xi^b - \Gamma^b_{ef}\xi^e \delta x^f\right)\mathrm{d}x^c \\
&= -\Gamma^a_{bc}\xi^b \mathrm{d}x^c - \partial_d \Gamma^a_{bc}\xi^b \delta x^d \mathrm{d}x^c + \\
&\quad \Gamma^a_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e \delta x^f \mathrm{d}x^c + \underbrace{\partial_a \Gamma^d_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e \delta x^d \delta x^f \mathrm{d}x^c}_{\ll}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\xi^a(x + \delta x + \mathrm{d}x) &= \xi^a - \Gamma^a_{bc}\xi^b \delta x^c - \Gamma^a_{bc}\xi^b \mathrm{d}x^c - \\
&\quad \partial_d \Gamma^a_{bc}\xi^b \delta x^d \mathrm{d}x^c + \Gamma^a_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e \delta x^f \mathrm{d}x^c.
\end{aligned}$$

Um das äquivalente Ergebnis für den Pfad zu erhalten, welcher x^a mit $x^a + \mathrm{d}x^a + \delta x^a$ über $\mathrm{d}x^a$ verbindet, braucht man in obiger Gleichung nur $\mathrm{d}x^a$ und δx^a austauschen:

$$\begin{aligned}
\xi^a(x + \mathrm{d}x + \delta x) &= \xi^a - \Gamma^a_{bc}\xi^b \mathrm{d}x^c - \Gamma^a_{bc}\xi^b \delta x^c - \\
&\quad \partial_d \Gamma^a_{bc}\xi^b \mathrm{d}x^d \delta x^c + \Gamma^a_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e \mathrm{d}x^f \delta x^c.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen die Differenz:

$$\begin{aligned}
\Delta\xi^a &= \xi^a(x+\delta x+\mathrm{d}x) - \xi^a(x+\mathrm{d}x+\delta x) \\
&= -\Gamma^a_{bc}\xi^b\delta x^c - \Gamma^a_{bc}\xi^b\mathrm{d}x^c + \Gamma^a_{bc}\xi^b\mathrm{d}x^c + \\
&\quad \Gamma^a_{bc}\xi^b\delta x^c - \partial_d\Gamma^a_{bc}\xi^b\delta x^d\mathrm{d}x^c + \partial_d\Gamma^a_{bc}\xi^b\mathrm{d}x^d\delta x^c + \\
&\quad \Gamma^a_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e\delta x^f\mathrm{d}x^c - \Gamma^a_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e\mathrm{d}x^f\delta x^c \\
&= -\partial_d\Gamma^a_{bc}\xi^b\delta x^d\mathrm{d}x^c + \partial_c\Gamma^a_{bd}\xi^b\mathrm{d}x^c\delta x^d + \\
&\quad \Gamma^a_{bc}\Gamma^b_{ef}\xi^e\delta x^f\mathrm{d}x^c - \Gamma^a_{bf}\Gamma^b_{ec}\xi^e\mathrm{d}x^c\delta x^f \\
&= \left(\partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bf} - \Gamma^a_{ef}\Gamma^e_{bc}\right)\xi^b\mathrm{d}x^c\delta x^f \\
&= \left(\partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc}\right)\xi^b\mathrm{d}x^c\delta x^d \\
&\overset{(3.66)}{=} R_{cbd}{}^a\xi^b\mathrm{d}x^c\delta x^d \\
&= -R_{bcd}{}^a\xi^b\mathrm{d}x^c\delta x^d.
\end{aligned}$$

Aus diesem Ergebnis ist zu ersehen, daß $\Delta\xi^a$ dann und nur dann Null ist, wenn der Riemannsche Tensor identisch verschwindet.

Es gilt somit: der Vektor ξ^a wird dann und nur dann derselbe im Punkt $x^a + \delta x^a + \mathrm{d}x^a$ sein, unabhängig vom Pfad, welcher zur Erreichung dieses Punktes eingeschlagen wird, wenn $R_{bcd}{}^a = 0$ ist. Es folgt also, daß, bei Verschwinden des Riemannschen Tensors, ξ^a sich nicht verändert, wenn er entlang einer beliebigen infinitesimalen Schleife parallel verschoben wird. Mit diesem Ergebnis und unter der Annahme, daß die Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängend ist, kann man eine Kurve kontinuierlich in eine andere verformen, wobei die Verformung in jedem Schritt infinitesimal erfolgt.

Lemma 3.2 *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine affin flache Mannigfaltigkeit besteht darin, daß die Vernetzung symmetrisch und integrabel ist.*

Dieses Lemma wurde bereits als Weylsches Theorem (Theorem 3.7) bewiesen.

3.10.2 Symmetrien im Riemannschen Raum

Wir haben bereits im Abschnitt 3.7.2 einen torsionsfreien geodätischen Raum eingeführt und für diesen folgte dann die weitere Eigenschaft

$$\nabla_c g_{ab} = 0, \tag{3.75}$$

wodurch der metrische Tensor als global konstant identifiziert wurde. Damit ist g_{ab} eine symmetrische Matrix und es existiert dann immer eine Transformation, welche diese Matrix auf Diagonalform bringt, wobei jeder Diagonalterm entweder gleich +1 oder gleich -1 sein wird. Der Überschuß an Pluszeichen wird dann die *Signatur* der Metrik genannt; ist die Signatur gleich

Null, so spricht man von einer *singulären* Metrik. Ist der metrische Tensor über die Mannigfaltigkeit kontinuierlich und nicht singulär, dann folgt weiter, daß die Signatur eine Invariante ist. Im allgemeinen wird es jedoch nicht möglich sein, Koordinatensysteme aufzufinden, in welchen sich der metrische Tensor überall auf Diagonalform reduzieren läßt. Besteht allerdings ein solches Koordinatensystem, in welchem sich der metrische Tensor überall auf Diagonalform bringen läßt, mit ± 1 als Diagonalelementen, so ist die Metrik *eben.*

In welcher Beziehung steht nun eine ebene Metrik mit dem affin ebenen Raum, wenn die Vernetzung die metrische Vernetzung ist? Die Antwort gibt:

Lemma 3.3 *Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine ebene Metrik besteht im Verschwinden des Riemannschen Tensors.*

Die Notwendigkeit folgt aus der Tatsache, daß ein Koordinatensystem bestehen muß, in welchem der metrische Tensor diagonal ist, mit Elementen ± 1 in der Diagonale. Der metrische Tensor ist überall konstant und damit sind seine partiellen Ableitungen gleich Null; damit verschwinden die metrischen Vernetzungen Γ^a_{bc} aufgrund von (3.37) und damit auch ihre Ableitungen. Also verschwindet auch der Riemannsche Tensor aufgrund von (3.66).

Umgekehrt aber, wenn der Riemannsche Tensor verschwindet, so muß nach den im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Lemmas ein spezielles Koordinatensystem bestehen, in welchem die Vernetzungen überall verschwinden. Es folgt dann wegen (3.75):

$$\bigtriangledown_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^a_{ac} g_{db} - \Gamma^d_{bc} g_{ad} = 0$$

oder

$$\partial_c g_{ab} = \Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{ad} = 0, \tag{3.76}$$

und damit ist der metrische Tensor überall konstant und kann somit auf Diagonalform transformiert werden. Somit folgt, daß bei Verwendung der metrischen Vernetzung der metrisch ebene Raum dem affin ebenen Raum entspricht.

3.10.3 Symmetrien des Riemann Tensors im metrischen Raum

Wir benützen nun die Bianchi–Identität, um einige Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Tensors im metrischen Raum ableiten zu können. Sie lautet:

$$R_{cbs}{}^{d}{}_{\|a} + R_{acs}{}^{d}{}_{\|b} + R_{bas}{}^{d}{}_{\|c} = 0.$$

Wir definieren nun den vierfach kovarianten Riemanntensor durch Herunterziehen des kovarianten Index:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= R_{abc}{}^{s}\, g_{ds} \\ &= -R_{bac}{}^{s}\, g_{ds} = -R_{bacd}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Aus (3.70) folgt weiter:

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} &= 0 \mid \times g_{sd} \\ R_{abcs} + R_{bcas} + R_{cabs} &= R_{[abc]s} = 0. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Wir verwenden nun (3.75) und schließen daraus:

$$\begin{aligned} 2 \bigtriangledown_{[a} \bigtriangledown_{b]} g_{cd} &= 0 = (3.72) \\ &= -R_{abc}{}^{s} g_{sd} - R_{abd}{}^{s} g_{sc} \\ &= -\left(R_{abcd} + R_{abdc}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc}. \tag{3.79}$$

Der vierfach kovariante Riemannsche Tensor ist somit antisymmetrisch unter Vertauschung der vorderen oder der hinteren zwei Indizes. Eine weitere wichtige Symmetrie folgt aus (3.78):

$$\begin{aligned} R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} &= 0 \\ R_{abdc} + R_{bdac} + R_{dabc} &= 0 \\ \hline R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} - \underbrace{R_{abdc}}_{=-R_{abcd}} - R_{bdac} - R_{dabc} &= 0 \\ 2R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} - R_{bdac} - R_{dabc} &= 0 \\ 2R_{abcd} - R_{cadb} - R_{adcb} - R_{bcda} - R_{dbca} &= 0 \\ 2R_{abcd} - \left(R_{cadb} + R_{adcb}\right) - \left(R_{bcda} + R_{dbca}\right) &= 0 \\ \hline R_{cadb} + R_{adcb} + R_{dcab} &= 0 \\ R_{bcda} + R_{cdba} + R_{dbca} &= 0 \\ \hline 2R_{abcd} + \underbrace{R_{dcab}}_{=-R_{cdab}} + \underbrace{R_{cdba}}_{=-R_{cdab}} &= 0 \end{aligned}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{3.80}$$

Alle diese Symmetrieeigenschaften sind wesentlich, da sie die Zahl der zu bestimmenden unabhängigen Tensorkomponenten stark reduzieren.

Wir führen nun den verjüngten Riemann–Tensor, den *Ricci–Tensor* ein:

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{c} = R_{acbd}\, g^{cd} \tag{3.81}$$

und im weiteren den *Ricci–Skalar:*

$$R = R^a{}_a = R_{ab}\, g^{ab} = R_{acbd}\, g^{ab} g^{cd}. \tag{3.82}$$

Aufgrund von (3.80) gilt ganz offensichtlich:

$$R_{ab} = R_{ba}. \tag{3.83}$$

Wir bilden aus diesen Tensoren den *Einstein–Tensor:*

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \tag{3.84}$$

Aus der Bianchi–Identität (3.71) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
g^{st} \left\{ R_{bcs}{}^{d}{}_{\|a} \right\}_{[cba]} &= \left\{ \left(g^{st} R_{bcs}{}^{d} \right)_{\|a} \right\}_{[cba]} \\
&= \left\{ R_{bc}{}^{td}{}_{\|a} \right\}_{[cba]} \\
&= R_{bc}{}^{td}{}_{\|a} + R_{ca}{}^{td}{}_{\|b} + R_{ab}{}^{td}{}_{\|c} = 0.
\end{aligned}$$

Wir verjüngen nun t mit a und d mit b, beachten die Symmetrieeigenschaften (3.77,3.78,3.79, und 3.80), und erhalten:

$$\begin{aligned}
R_{ab}{}^{ab}{}_{\|c} + R_{ca}{}^{ab}{}_{\|b} + R_{bc}{}^{ab}{}_{\|a} &= \\
R_{\|c} - R_{ac}{}^{ab}{}_{\|b} + R_{cb}{}^{ab}{}_{\|a} &= \\
R_{\|c} - R_{c}{}^{b}{}_{\|b} + R_{c}{}^{a}{}_{\|a} &= \\
R_{\|c} - 2 R_{c}{}^{b}{}_{\|b} &= 0
\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2} R_{\|c} = R_{c}{}^{b}{}_{\|b}. \tag{3.85}$$

Wegen der Eigenschaften des Fundamentaltensors gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} g^{s}{}_{c} R_{\|s} = \frac{1}{2} (g^{s}{}_{c} R)_{\|s} - R_{c}{}^{s}{}_{\|s} &= 0 \\
\left(R_{c}{}^{s} - \frac{1}{2} g^{s}{}_{c} R \right)_{\|s} &= 0 \mid \times g_{bs} \\
\left(g_{bs} R_{c}{}^{s} - \frac{1}{2} g_{bs} g^{s}{}_{c} R \right)_{\|s} &= 0 \\
\left(R_{cb} - \frac{1}{2} g_{bc} R \right)_{\|b} &= 0,
\end{aligned}$$

oder mit (3.84):

$$G_{ab\|b} = \mathrm{div} G_{ab} = 0. \tag{3.86}$$

Wir sehen also, daß der Einstein–Tensor *divergenzfrei* ist. Dieses Ergebnis ist von fundamentaler Bedeutung für unsere weiteren Überlegungen.

Abschließend wollen wir noch zusammenfassend feststellen, daß für einen ebenen metrischen Raum der Riemann–Tensor gleich Null ist; damit ist auch der Ricci–Tensor und der Ricci-Skalar gleich Null, was schließlich noch dazu führt, daß auch der Einstein–Tensor gleich Null ist.