Kapitel 4

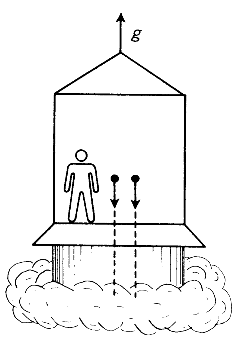
Die Einsteinschen Feldgleichungen

4.1 Einführende Bemerkungen

Die Überlegungen im ersten und zweiten Kapitel haben dazu geführt, daß im lokalen Bereich die Variationen im Gravitationsfeld vernachlässigt werden können – die spezielle Relativitätstheorie ist ausreichend. In Situationen, wo diese Vernachlässigung nicht zulässig ist, benötigen wir aber eine nicht flache Metrik, welche man sich als das Potential des Gravitationsfeldes vorstellen kann. Die Korrespondenz mit der Newtonschen Theorie läßt vermuten, daß wir Feldgleichungen zweiter Ordnung in diesen Potentialen auffinden werden, und daß diese Tensorgleichungen sein werden, wie es vom Prinzip der Kovarianz gefordert wird.

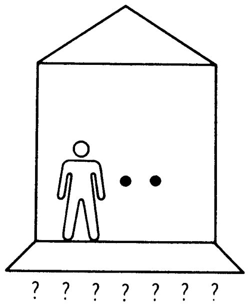
Wir untersuchen nun folgende, nicht lokale Experimente, wobei angenommen wird, daß die Instrumente des Beobachters empfindlich genug sind, um Variationen im Gravitationsfeld zu entdecken; in allen Fällen setzt der Beobachter zwei Körper frei, deren gegenseitige Wechselwirkung ignoriert wird.

(i)



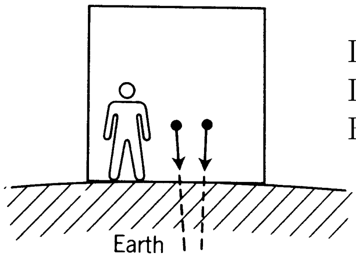
Das Labor befindet sich in einer beschleunigten Rakete. Die beiden Körper fallen auf parallelen Bahnen auf den Laborboden

(ii)



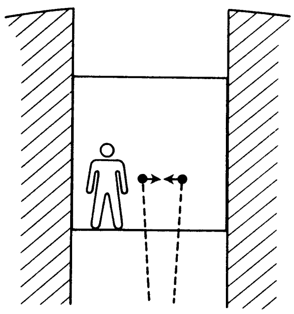
Das Labor befindet sich in einer nicht beschleunigten Rakete. Die Körper bleiben relativ zum Beobachter in Ruhe.

(iii)



Das Labor steht auf der Erdoberfläche. Die Körper fallen auf konvergierenden Bahnen zur Erde.

(iv)



Das Labor fällt im freien Fall Richtung Erdmittelpunkt. Die beiden Körper nähern sich, ohne daß sich ihr Abstand vom Laborboden verändert.

Aus diesen Fällen ist zu ersehen, daß der Beobachter zwischen dem gleichförmigen Trägheitsfeld von Fall (i) und dem ungleichförmigen Gravitationsfeld von Fall (iii) unterscheiden kann. Das Wesentliche an diesen Experimenten besteht darin, daß die Gegenwart eines ‘echten’ Gravitationsfeldes durch die Beobachtung der *Veränderung* verifiziert wird. Diese Veränderung (oder Abweichung) werden wir beschreiben müssen.

4.2 Die Abweichung in Newtons Theorie

Wir müssen also das Verhalten der benachbarten Teilchen untersuchen. Wir verwenden dazu kartesische Koordinaten x^α, $\alpha = 1, 2, 3$ und verwenden den euklidischen Raum mit seinem Wegelement:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_\alpha (\mathrm{d}x^\alpha)^2$$

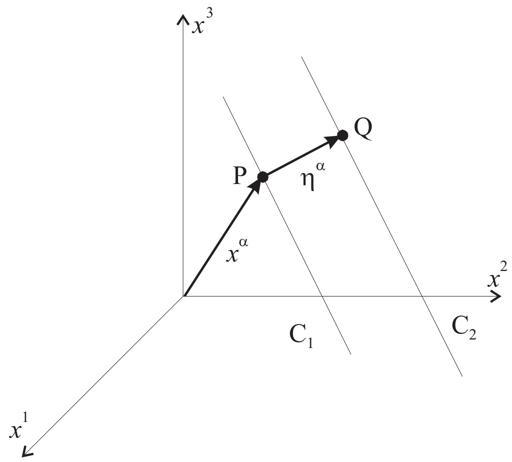


Abbildung 4.1: Bestimmung der Abweichung in der Newtonschen Theorie.

und dem metrischen Tensor

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Wir betrachten nun die Pfade von zwei benachbarten Gravitationstestpartikeln (Abb. 4.1), welche die Einheitsmasse haben und sich in einem Gravitationsfeld bewegen, dessen Potential ϕ sei. Die Teilchen bewegen sich entlang der Pfade C_1 und C_2, und zur Zeit t haben sie die Punkte P und Q erreicht. Wir verwenden die Zeit t als Parameter und damit sind die beiden Bahnen durch

$$\begin{aligned} C_1 : \quad & x^\alpha = x^\alpha(t) \\ C_2 : \quad & x^\alpha = x^\alpha(t) + \eta^\alpha(t) \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\eta^\alpha(t)$ ein kleiner konvergenter Vektor ist, welcher die beiden Bahnen zu gleichen Zeiten t verbindet. Die Bewegungsgleichung hat dann folgende Tensorform:

$$\ddot{x}^\alpha = -\left(\partial^\alpha \phi\right)_P$$

mit

$$\partial^\alpha . = g^{\alpha\beta}\partial_\beta . = \delta^{\alpha\beta}\partial_\beta . = \text{grad.}|_P \,.$$

Für das zweite Teilchen gilt analog:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\alpha + \ddot{\eta}^\alpha &= -\left(\partial^\alpha \phi\right)_Q \\ &\approx -\left(\partial^\alpha \phi\right)_P - \left(\eta^\beta \partial_\beta \partial^\alpha \phi\right)_P + \cdots \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}^\alpha &= -\eta^\beta \partial_\beta \partial^\alpha \phi \\ &= -\eta^\beta K^\alpha{}_\beta \end{aligned}$$

mit dem Tensor zweiter Stufe:

$$K^{\alpha}{}_{\beta} = K_{\beta}{}^{\alpha} = \partial^{\alpha}\partial_{\beta}\phi. \tag{4.1}$$

Für die Abweichung in Newtons Theorie erhalten wir dann:

$$\ddot{\eta}^{\alpha} + K^{\alpha}{}_{\beta}\,\eta^{\beta} = 0. \tag{4.2}$$

Der gravitationsfreie Raum wird durch ein Potential ϕ beschrieben, welches durch die Laplace Gleichung

$$\nabla^2\phi = \partial_{\alpha}\partial_{\alpha}\phi = 0$$

beschrieben ist. Damit folgt aus (4.1):

$$K^{\alpha}{}_{\beta} = \partial^{\alpha}\partial_{\beta}\phi = g^{\alpha\gamma}\partial_{\gamma}\partial_{\beta}\phi = \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\phi$$

$$K^{\alpha}{}_{\alpha} = \partial_{\alpha}\partial_{\alpha}\phi = 0. \tag{4.3}$$

Im leeren Raum hat also der Tensor $K^{\alpha}{}_{\beta}$ die Spur 0.

4.3 Die geodätische Abweichung

4.3.1 Die Lie–Ableitung

Die Lie–Ableitung ist eine spezielle Form der Ableitung, welche den Vorteil hat, von der Verknüpfung unabhängig zu sein. Sie ermöglicht es auch oft komplizierte Tensorausdrücke in einfachere umzuwandeln, wodurch diese oft geometrisch leichter interpretierbar werden.

Wir gehen von einer Kurvenschar aus, welche so definiert ist, daß nur eine

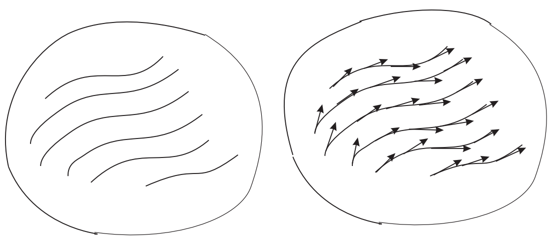


Abbildung 4.2: Konstruktion eines Vektorfeldes aus einer Kurvenschar.

Kurve durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit geht. Wir können dann jede beliebige Kurve $x^a = x^a(u)$ dazu benützen den Tangentenvektor (siehe Abb. 4.2) $\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}u}$ entlang der Kurve zu definieren. Macht man dies für jede Kurve der Schar, so erhalten wir dann ein Vektorfeld ξ^a auf der Mannigfaltigkeit, welches durch die $\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}u}$ in jedem Punkt gegeben ist.

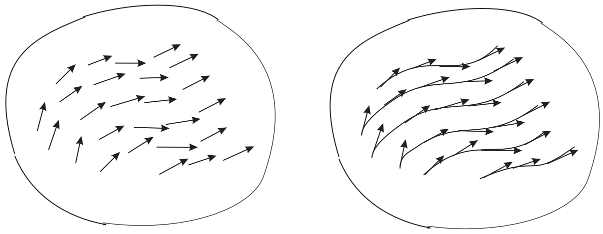


Abbildung 4.3: Konstruktion einer Kurvenschar aus einem nicht verschwindenden Vektorfeld.

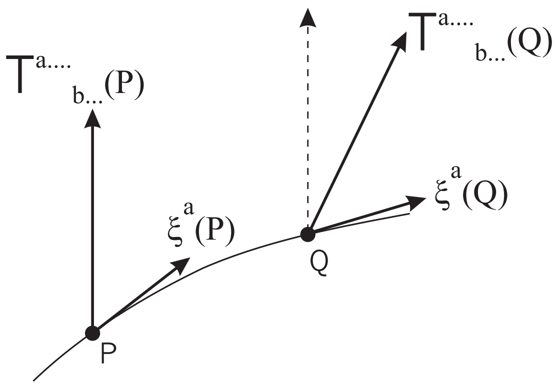


Abbildung 4.4: Verschieben eines Tensors $T^{a\cdots}_{b\ldots}$ entlang einer Kurvenschar.

Umgekehrt, wenn wir ein nicht verschwindendes Vektorfeld $\xi^a(x)$ auf der Mannigfaltigkeit definiert haben, so kann dieses dazu benützt werden, eine Kurvenschar in der Mannigfaltigkeit zu definieren (Abb. 4.3), welche *Trajektorien* oder *Bahnen* von $\xi^a(x)$ genannt werden. Diese Kurven findet man durch Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}u} = \xi^a(x(u)).$$

Das Existenz– und Eindeutigkeitstheorem einfacher Differentialgleichungen stellt eine Lösung sicher, zumindest in Bereichen der Gesamtmenge. (Wir sind ohnedies nur an lokalen Bereichen interessiert.)

Wir nehmen nun ξ^a als gegeben an und die lokale Kurvenschar wurde konstruiert. Weiters existiere irgendein Tensorfeld $T^{a\cdots}{}_{b\ldots}(x)$, welches unter Verwendung von ξ^a differenziert werden soll. Die Idee besteht dann – wie schon früher – darin, diese Kurven der Schar dazu zu benützen, den Tensor von einem Punkt P ($T^{a\cdots}{}_{b\ldots}(P)$, Abb. 4.4) entlang einer Kurve, welche durch P geht, zu irgendeinem Nachbarpunkt Q zu ziehen und diesen so erhaltenen Tensor $\tilde{T}^{a\cdots}_{b\ldots}(Q)$ mit dem sich ursprünglich im Punkt Q befindlichen Tensor $T^{a\cdots}{}_{b\ldots}(Q)$ zu vergleichen. Wir können also die beiden Tensoren voneinander abziehen, und so die Ableitung durch einen Grenzübergang beschreiben. Das

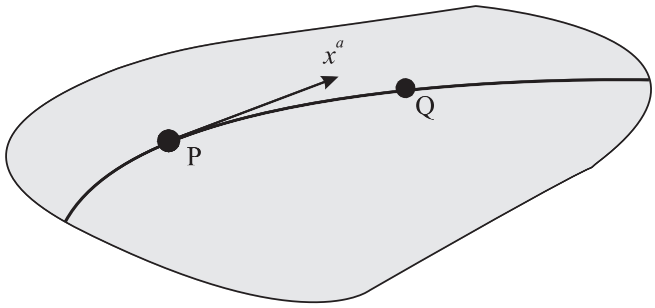


Abbildung 4.5: Punkttransformation $P \to Q$.

'Ziehen' des Tensors von P nach Q geschieht dabei durch eine Koordinatentransformation. Wir betrachten also die *aktive* Transformation

$$x'^a = x^a + \delta u \xi^a(x) \tag{4.4}$$

mit sehr kleinem δu. (4.4) ist eine *Punkttransformation*, wobei das Koordinatensystem nicht verlassen wird. Es gilt also (Abb. 4.5)

$$\begin{array}{ccl} P & \longrightarrow & Q \\ x^a & \longrightarrow & x^a + \delta u \xi^a(x). \end{array}$$

Somit liegt Q offensichtlich auf der Trajektorie, welche durch P geht. Wir differenzieren (4.4):

$$\partial_b x'^a = \delta^a_b + \delta u \partial_b \xi^a. \tag{4.5}$$

Nun behandeln wir das Tensorfeld; seine Komponenten im Punkte P sind $T^{ab}(x)$, und unter der Punkttransformation (4.4) erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} T^{ab}(x) & \longrightarrow & T'^{ab}(x') \\ T'^{ab}(x') & = & \partial_c x'^a \partial_d x'^b T^{cd}(x) \\ & = & \left(\delta^a_c + \delta u \partial_c \xi^a\right)\left(\delta^b_d + \delta u \partial_d \xi^b\right) T^{cd}(x) \\ & = & T^{ab}(x) + \left(\partial_c \xi^d \delta^b_d + \delta^a_c \partial_d \xi^b\right) \delta u T^{cd}(x) + \cdots \\ & = & T^{ab}(x) + \left(\partial_c \xi^a T^{cb}(x) + \partial_d \xi^b T^{ad}(x)\right) \delta u + \cdots \end{array}$$

Andererseits erhalten wir für den von P nach Q verschobenen Tensor:

$$\begin{array}{rcl} T^{ab}(x') & = & T^{ab}\left(x^c + \delta u \xi^c(x)\right) \\ & = & [\text{Taylor Entwicklung}] \\ & = & T^{ab}(x) + \delta u \xi^c \partial_c T^{ab}(x) + \cdots. \end{array}$$

Wir definieren nun die Lie–Ableitung:

$$\mathrm{L}_\xi T^{ab} \overset{!}{=} \lim_{\delta u \to 0} \frac{T^{ab}(x') - T'^{ab}(x')}{\delta u} \tag{4.6}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_\xi\, T^{ab} &= \frac{1}{\delta u}\Big[T^{ab}(x) + \delta u \xi^c \partial_c T^{ab}(x) - \\
&\quad T^{ab}(x) - \delta u \partial_c \xi^d T^{ab}(x) - \delta u \partial_d \xi^d T^{ad}\Big] \\
&= \xi^c \partial_c T^{ab} - T^{ac}\partial_c \xi^b - T^{cb}\partial_c \xi^a. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Man kann unschwer zeigen, daß L_ξ linear ist,

$$\mathrm{L}_\xi\,(\lambda\eta^a + \mu\xi^a) = \lambda \mathrm{L}_\xi\,\eta^a + \mu \mathrm{L}_\xi\,\xi^a,$$

und der Kettenregel folgt

$$\mathrm{L}_\xi\,(\eta^a Z_{bc}) = \eta^a\,(\mathrm{L}_\xi\, Z_{bc}) + (\mathrm{L}_\xi\,\eta^a)\, Z_{bc}.$$

Die Lie–Ableitung ist weiters stufenerhaltend; also ist die Lie–Ableitung eines Tensors der Stufe (p,q) wiederum ein Tensor der Stufe (p,q). Weiters kommutiert sie mit der Verjüngungsoperation:

$$g^a{}_b \mathrm{L}_\xi\, T^a{}_b = \mathrm{L}_\xi\, T^a{}_a.$$

Die Lie–Ableitung für ein Skalarfeld folgt unmittelbar aus (4.7):

$$\mathrm{L}_\xi\,\phi = \xi^a \partial_a \phi \qquad (4.8)$$

und für ein kontravariantes Vektorfeld mit:

$$\mathrm{L}_\xi\,\eta^a = \xi^b\partial_b\eta^a - \eta^b\partial_b\xi^a = [\xi,\eta]^a\,, \qquad (4.9)$$

usw.

Aus (4.9) läßt sich unmittelbar zeigen, daß die Lie–Ableitung vernetzungsfrei ist. Wir benützen dazu die Definition der kovarianten Ableitung nach (3.51):

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_\xi\,\eta^a &= \xi^b\partial_b\eta^a - \eta^b\partial_b\xi^a \\
\bigtriangledown_b \xi^a &= \partial_b \xi^a + \left\{ \begin{matrix} a \\ bl \end{matrix} \right\} \xi^l \\
\bigtriangledown_b \eta^a &= \partial_b \eta^a + \left\{ \begin{matrix} a \\ bl \end{matrix} \right\} \eta^l \\
\mathrm{L}_\xi\,\eta^a &= \xi^b \bigtriangledown_b \eta^a - \eta^b \bigtriangledown_b \xi^a - \left\{ \begin{matrix} a \\ bl \end{matrix} \right\} \xi^b\eta^l + \left\{ \begin{matrix} a \\ bl \end{matrix} \right\} \eta^b\xi^l \\
&= \xi^b \bigtriangledown_b \eta^a - \eta^b \bigtriangledown_b \xi^a \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Wir führen noch die *verjüngte kovariante Ableitung* mit

$$\nabla_\xi \stackrel{!}{=} \xi^b \nabla_b$$

ein und finden für (4.10):

$$\mathrm{L}_\xi \, \eta^a = \nabla_\xi \eta^a - \nabla_\eta \xi^a. \tag{4.11}$$

Diese Beziehung kann schließlich dazu benützt werden, eine interessante Beziehung mit dem Riemann Tensor herzuleiten. Den Ausgangspunkt dazu bildet die Gleichung (3.65):

$$\nabla_c \nabla_d \, \zeta^a - \nabla_d \nabla_c \, \zeta^a = R^a{}_{bcd} \zeta^b + \left(\Gamma^e_{cd} - \Gamma^e_{dc}\right) \nabla_e \, \zeta^a$$

mit

$$R^a{}_{bcd} = g^{as} R_{sbcd}.$$

Wir gehen auf die verjüngte kovariante Ableitung über und schreiben zunächst:

$$\xi^c \eta^d \nabla_c \nabla_d \zeta^a - \xi^c \eta^d \nabla_d \nabla_c \zeta^a = R^a{}_{bcd} \zeta^b \xi^c \eta^b - \xi^c \eta^d \left(\Gamma^e_{cd} - \Gamma^e_{dc}\right) \nabla_e \, \zeta^a.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\xi^c \nabla_c \left(\eta^d \nabla_d \, \zeta^a\right) &= \nabla_\xi \nabla_\eta \, \zeta^a \\
&= \xi^c \left(\nabla_c \eta^d\right) \left(\nabla_d \zeta^a\right) + \xi^c \eta^d \nabla_c \nabla_d \zeta^a \\
\eta^d \nabla_d \left(\xi^c \nabla_c \, \zeta^a\right) &= \nabla_\eta \nabla_\xi \, \zeta^a \\
&= \eta^d \left(\nabla_d \xi^c\right) \left(\nabla_c \zeta^a\right) + \xi^c \eta^d \nabla_d \nabla_c \zeta^a
\end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \nabla_\eta \, \zeta^a - \xi^c \left(\nabla_c \eta^d\right) \left(\nabla_d \zeta^a\right) - \nabla_\eta \nabla_\xi \, \zeta^d + \eta^d \left(\nabla_d \xi^c\right) \left(\nabla_c \zeta^a\right) = \\
= \quad R^a{}_{bcd} \zeta^b \xi^c \eta^d - \xi^c \eta^d \left(\Gamma^e_{cd} - \Gamma^e_{dc}\right) \nabla_e \, \zeta^a.
\end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned}
\nabla_c \eta^d &= \partial_c \eta^d + \Gamma^d_{ec} \eta^e \\
\xi^c \nabla_c \, \eta^d &= \xi^c \partial_c \eta^d + \xi^c \Gamma^d_{ec} \eta^e \\
\xi^c \left(\nabla_c \eta^d\right) \left(\nabla_d \zeta^a\right) &= \xi^c \left(\partial_c \eta^d\right) \left(\nabla_d \zeta^a\right) + \xi^c \eta^e \Gamma^d_{ec} \nabla_d \, \zeta^a \\
\nabla_d \xi^c &= \partial_d \xi^c + \Gamma^c_{ed} \xi^e \\
\eta^d \nabla_d \, \xi^c &= \eta^d \partial_d \xi^c + \eta^d \Gamma^c_{ed} \xi^e \\
\eta^d \left(\nabla_d \xi^c\right) \left(\nabla_c \zeta^a\right) &= \eta^d \left(\partial_d \xi^c\right) \left(\nabla_c \zeta^a\right) + \xi^e \eta^d \Gamma^c_{ed} \nabla_c \, \zeta^a.
\end{aligned}$$

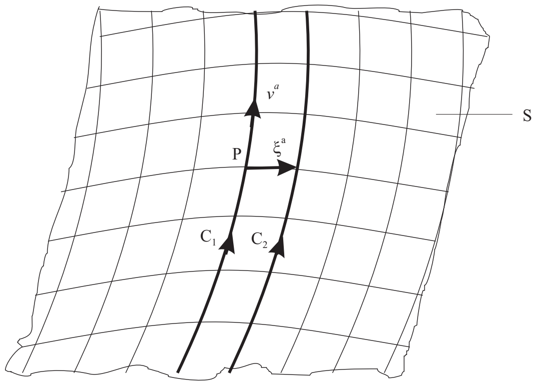


Abbildung 4.6: Zur Berechnung der geodätischen Abweichung.

Zusammengefaßt ergibt dies:

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd}\,\zeta^b\xi^c\eta^d - \xi^c\eta^d\left(\Gamma^e_{cd} - \Gamma^e_{dc}\right)\nabla_e\,\zeta^a &= \nabla_\xi\,\nabla_\eta\,\zeta^a - \nabla_\eta\,\nabla_\xi\,\zeta^a - \\ &\quad \xi^d\partial_d\eta^c\,\nabla_c\,\zeta^a - \xi^c\eta^d\Gamma^e_{dc}\,\nabla_e\,\zeta^a + \\ &\quad \eta^d\partial_d\xi^c\,\nabla_c\,\zeta^a + \xi^c\eta^d\Gamma^e_{cd}\,\nabla_e\,\zeta^a \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd}\,\zeta^b\xi^c\eta^d &= \nabla_\xi\,\nabla_\eta\,\zeta^a - \nabla_\eta\,\nabla_\xi\,\zeta^a - \\ &\quad \left(\xi^d\partial_d\eta^c - \eta^d\partial_d\xi^c\right)\nabla_c\,\zeta^a. \end{aligned}$$

Wir führen nun die Abkürzungen

$$\begin{aligned} [\xi,\eta]^c &= \xi^d\partial_d\eta^c - \eta^d\partial_d\xi^c \\ [\xi,\eta]^c\,\nabla_c\,\zeta^a &= \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta^a \end{aligned}$$

ein, und erhalten

$$\nabla_\xi\,\nabla_\eta\,\zeta^a - \nabla_\eta\,\nabla_\xi\,\zeta^a - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta^a = R^a{}_{bcd}\,\zeta^b\xi^c\eta^d. \tag{4.12}$$

4.3.2 Die geodätische Abweichung

Nach unseren bisher entwickelten Vorstellungen sollten sich im Bild der allgemeinen Relativitätstheorie die Testkörper auf zeitartigen geodätischen Linien bewegen. Wir betrachten daher eine zweidimensionale Fläche S (Abb. 4.6), welche durch eine Schar von zeitartigen geodätischen Linien gegeben ist. Die parametrische Gleichung dieser Fläche ist durch

$$x^a = x^a(\tau,\nu)$$

gegeben, mit τ der Eigenzeit entlang der geodätischen Linie und ν einem Index, welcher die einzelnen geodätischen Linien kennzeichnet. Wir können nun auf dieser Fläche zwei Vektorfelder definieren:

$$v^a = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \xi^a = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\nu},$$

wobei v^a der Tangentenvektor an die zeitartige geodätische Linie ist, und ξ^a ist ein Verbindungsvektor, welcher zwei benachbarte Kurven in der Schar verbindet.

Theorem 4.1 *Das Verschwinden der Lie–Ableitung* $\mathrm{L}_\eta\, \xi^a$ *zweier Vektorfelder* ξ^a *und* η^a *ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Vektorfelder* oberflächenbildend *sind.*

Die Gültigkeit dieses Theorems kann für die beiden speziellen Vektorfelder v^a und ξ^a unmittelbar bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_v\, \xi^a &= [v,\xi]^a \\ &= v^b \partial_b \xi^a - \xi^b \partial_b v^a \\ &= \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\nu}\right) - \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\nu}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\tau}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2x^a}{\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\nu} - \frac{\mathrm{d}^2x^a}{\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\nu} = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Wir verwenden nun (4.11) und finden aus (4.13):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{L}_v\, \xi^a \\ &= \nabla_v \xi^a - \nabla_\xi v^a \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \nabla_v \xi^a &= \nabla_\xi v^a \\ \nabla_v \nabla_v\, \xi^a &= \nabla_v \nabla_\xi\, v^a. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun weiter (4.12) und setzen $\xi^a = \zeta^a = v^a$ und $\eta^a = \xi^a$; wir erhalten dann:

$$\nabla_v \nabla_\xi\, v^a - \nabla_\xi \nabla_v\, v^a - \nabla_{[v,\xi]} v^a = R^a{}_{bcd} v^b v^c \xi^d.$$

Nun ist aber

$$v^b \nabla_b\, v^a = 0,$$

da v^a ein Tangentenvektor zu einer affin parametrisierten geodätischen Linie ist. (Siehe auch Abschnitt 3.8.3.) Somit verschwindet der zweite Term und auch der dritte wegen (4.13). Es bleibt somit nur:

$$\nabla_v \nabla_\xi v^a - R^a{}_{bcd} v^b v^c \xi^d = 0 \tag{4.14}$$

oder

$$\nabla_v \nabla_v \xi^a - R^a{}_{bcd} v^b v^c \xi^d = 0.$$

Mit der Definition der *absoluten Ableitung*

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^a}{\mathrm{D}\tau^2} = \nabla_v \nabla_v \xi^a$$

wird

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^a}{\mathrm{D}\tau^2} - R^a{}_{bcd} v^b v^c \xi^d = 0. \tag{4.15}$$

die gesuchte Gleichung für die geodätische Abweichung.

Die absolute Ableitung $\mathrm{D}/\mathrm{D}\tau$ entlang der Kurve ist das tensorielle Analogon zur Zeitableitung entlang der Kurve in (4.2). Wir können aber (4.15) noch nicht mit (4.2) vergleichen, da hier noch der Vierervektor ξ^a auftritt. Wir sind aber, um überhaupt Vergleiche anstellen zu können, nur an den räumlichen Informationen interessiert, welche in (4.15) enthalten sind. Wir müssen daher noch weitere Umformungen ausführen. Wir führen dazu einen Projektionstensor

$$h^a_b = \delta^a_b - v^a v_b$$

ein, welcher Tensoren in jenen $\mathbb{R}^3$ projeziert, welcher in jedem Punkt P unserer Fläche senkrecht zu v^a ist. Dieser Tensor hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} h^a_b\, v^b &= \delta^a_b\, v^b - v^a v_b v^b = v^a - v^a = 0 \\ h^a_b\, h^b_c &= h^a_c \\ h^a_a &= 3 \\ h_{ab} &= h_{ba}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun den orthogonalen Verbindungsvektor η^a durch

$$\eta^a = h^a_b\, \xi^b.$$

Da, wie bereits benützt, $v^a v_a = 1$ ist, also v^a ein Einheitstangentenvektor ist, folgt die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \nabla_\xi (v^a v_a) &= v^a \nabla_\xi v_a + v_a \nabla_\xi v^a \\ &= g^{ab} v_b \nabla_\xi v_a + v_a \nabla_\xi v^a \\ &= g^{ab} v_b \nabla_\xi g_{ac} v^c + v_a \nabla_\xi v^a \\ &= g^{ab} g_{ac} v_b \nabla_\xi v^c + v_a \nabla_\xi v^a \\ &= 2 v_a \nabla_\xi v^a = 0, \end{aligned}$$

da die kovariante Ableitung von 1 gleich Null ist. Es gilt dann weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\xi^a}{\mathrm{D}\tau} &= \nabla_v \xi^a \\
&= \left[\eta^a = \delta^a_b \xi^b - v^a v_b \xi^b\right] \\
&= \nabla_v \left(\eta^a + v^a v_b \xi^b\right) \\
&= \nabla_v \eta^a + \underbrace{(\nabla_v v^a)\, v_b \xi^b + v^a\, (\nabla_v v_b)\, \xi^b}_{\nabla_v v^a = 0} + v^a v_b\, \nabla_v\, \xi^b \\
&= \nabla_v \eta^a + v^a\, \underbrace{v_b\, \underbrace{\nabla_v \xi^b}_{= \nabla_\xi v^b}}_{=0} \\
&= \nabla_v \eta^a \\
&= \frac{\mathrm{D}\eta^a}{\mathrm{D}\tau}.
\end{aligned}$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd}\, v^b v^c \xi^d &= R^a{}_{bcd}\, v^b v^c \left(\eta^d + v^d v_c \xi^e\right) \\
&= R^a{}_{bcd}\, v^b v^c \eta^d + R^a{}_{bcd}\, v^b v^c v^d v_c \xi^e.
\end{aligned}$$

Nun ist aber $v^c v^d$ symmetrisch und $R^a{}_{bcd}$ in cd antisymmetrisch, und damit ist das Produkt dieser beiden Tensoren wegen

$$x^{ab} = -x^{ba}, \qquad y_{ab} = y_{ba}$$

$$x^{ab} y_{ab} = -x^{ba} y_{ba} = -x^{ab} y_{ab} = 0$$

gleich Null. Für die geodätische Abweichung ergibt sich dann:

$$\frac{\mathrm{D}^2 \eta^a}{\mathrm{D}\tau^2} - R^a{}_{bcd}\, v^b v^c \eta^d = 0. \tag{4.16}$$

Damit konnte die geodätische Abweichung durch den orthogonalen Verbindungsvektor beschrieben werden. Da wir aber immer noch in vierdimensionaler Schreibweise operieren, müssen wir aus (4.16) noch die dreidimensionale Information extrahieren.

4.4 Gegenüberstellung der Ergebnisse

Wir führen nun in jedem Punkt P der Kurve C_1 (Abb. 4.6) ein System von drei raumähnlichen orthogonalen Einheitsvektoren

$$e^a_{(\alpha)} = \left(e^a_{(1)}, e^a_{(2)}, e^a_{(3)}\right)$$

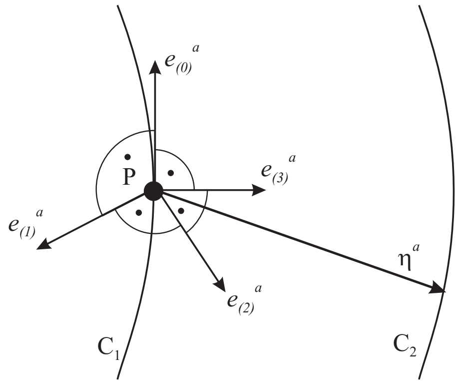


Abbildung 4.7: Zur Extraktion der räumlichen Information der geodätischen Abweichung.

ein, welche auf v^a orthonormal stehen. ($\alpha = 1, 2, 3$.) Wir definieren weiter

$$e^a_{(0)} \equiv v^a$$

und dann folgen die Orthonormalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} e^a_{(0)} e_{(0)a} &= -e^a_{(1)} e_{(1)a} = -e^a_{(2)} e_{(2)a} = -e^a_{(3)} e_{(3)a} = 1 \\ e^a_{(0)} e_{(1)a} &= e^a_{(0)} e_{(2)a} = e^a_{(0)} e_{(3)a} = e^a_{(1)} e_{(2)a} \\ &= e^a_{(1)} e_{(3)a} = e^a_{(2)} e_{(3)a} = 0. \end{aligned}$$

Somit spannen diese Vektoren ein Vierbein auf und wir fassen zusammen:

$$e^a_{(i)} e_{(j)a} = g_{ij} \tag{4.17}$$

mit

$$g_{ij} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1) \tag{4.18}$$

der üblichen Metrik des Minkovski–Raumes. Die zu (4.17) duale Basis findet man über

$$e^a_{(i)} e^{(j)}_a = \delta^j{}_i.$$

Wir können diesem Vierbein leicht eine physikalische Interpretation geben: nachdem $e^a_{(0)} = v^a$ ist, so ist dies die Vierergeschwindigkeit eines Beobachters, für welchen C_1 die Weltlinie ist. Die anderen drei raumähnlichen Vektoren $e^a_{(\alpha)}$ sind dann die rechtwinkligen Koordinaten im Punkte P (Abb. 4.7). Wir verschieben nun dieses Vektorsystem entlang C_1 durch Parallelverschiebung; wir fordern also

$$\frac{\mathrm{D}e^a_{(i)}}{\mathrm{D}\tau} \stackrel{!}{=} 0. \tag{4.19}$$

Wir definieren nun die Raumkomponenten des orthogonalen Verbindungsvektors η^a über

$$\eta^{(\alpha)} = e^{(\alpha)}_a \eta^a. \tag{4.20}$$

Dies ist nun das präzise Analogon zum η^α Vektor aus Abschnitt 4.2, da

$$\eta^{(0)} = e_a^{(0)}\eta^a = e_a^{(0)} h_b^a \xi^b = v_a h_b^a \xi^b = 0$$

ist. Wir verjüngen nun (4.16) mit $e_a^{(\alpha)}$ und erhalten dann unter Verwendung von (4.19):

$$\frac{\mathrm{D}^2\eta^{(\alpha)}}{\mathrm{D}\tau^2} - R^a{}_{bcd} e_a^{(\alpha)} v^b v^c \eta^d = 0$$

und formen noch um

$$\begin{aligned} \eta^d &= \delta^d{}_c \eta^c = e^d_{(i)} e_c^{(i)} \eta^c \\ &= e^d_{(0)} e_c^{(0)} \eta^c + e^d_{(\beta)} e_c^{(\beta)} \eta^c \\ &= e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)}. \end{aligned}$$

Wir finden:

$$\frac{\mathrm{D}^2\eta^{(\alpha)}}{\mathrm{D}\tau^2} + K^\alpha{}_\beta \eta^{(\beta)} = 0 \tag{4.21}$$

mit

$$K^\alpha{}_\beta = -R^a{}_{bcd} e_a^{(\alpha)} v^b v^c e^d_{(\beta)}. \tag{4.22}$$

Damit haben wir die zu (4.2) analoge Gleichung aufgefunden.

4.5 Die Vakuum–Feldgleichungen

Im Fall der Newtonschen Mechanik haben wir die Vakuumfeldgleichungen durch das Verschwinden der Spur von $K^\alpha{}_\beta$ ausgedrückt. Wir untersuchen daher in Analogie das Verschwinden der Spur von (4.22):

$$K^\alpha{}_\alpha = -R^a{}_{bcd}\, e_a^{(\alpha)} v^b v^c e^d_{(\alpha)} \stackrel{!}{=} 0. \tag{4.23}$$

Wir führen nun in P (Abb. 4.7) folgendes spezielle Koordinatensystem ein:

$$\begin{array}{ll} e^a_{(0)} = (1,0,0,0) & e^a_{(1)} = (0,1,0,0) \\ e^a_{(2)} = (0,0,1,0) & e^a_{(3)} = (0,0,0,1) \\ \text{oder} \quad e^a_{(i)} = \delta^a_{(i)}. & \end{array}$$

Daraus folgt für (4.23):

$$R^\alpha{}_{00\alpha} = 0 \longrightarrow \; -R^\alpha{}_{0\alpha 0} = 0.$$

Es folgt dann weiter für *jedes* Koordinatensystem

$$R^0{}_{000} = 0$$

und dies ergibt in Kombination mit dem vorhergehenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} R^a{}_{00a} &= 0 \\ &= R^a{}_{bca}\delta^b_0\delta^c_0 = R^a{}_{bca}v^b v^c \\ &= -R^a{}_{bac}v^b v^c = -R_{bc}v^b v^c. \end{aligned}$$

Nun ist aber $R_{bc}v^b v^c$ ein Skalar, und wenn dieser in einem Koordinatensystem verschwindet, dann verschwindet er in allen. Da dieser Term somit für *alle* Beobachter verschwindet, also für alle zeitartigen Vektoren v^a im Punkte P, so folgt, daß $[R_{ab}]_P = 0$ sein muß. Da aber P beliebig ist, folgt weiter, daß die Vakuum–Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie durch

$$R_{ab} = G_{ab} = 0 \tag{4.24}$$

gegeben sein muß.

Wir wollen jetzt das bisher Geschehene zusammenfassen: um zu den Gleichungen (4.24) zu gelangen, wurden folgende Schritte gesetzt:

(i) Das Äquivalenzprinzip hat zunächst gefordert, daß beim freien Fall im Gravitationsfeld, die Gravitation lokal eliminiert werden kann, und daß die spezielle Relativitätstheorie lokal gültig ist.

(ii) Es folgt aus (i), daß wir lokal das Gravitationsfeld nicht von einem gleichmäßig beschleunigenden Trägheitsfeld unterscheiden können, und daß wir daher die Gravitation als Trägheitskraft zu betrachten haben.

(iii) Aus der Annahme der Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie folgt weiters, daß sich freie Testteilchen auf zeitartigen geodätischen Linien bewegen. Die Trägheitskräfte treten in den geodätischen Gleichungen in Termen auf, welche die metrische Verknüpfung einer flachen Metrik enthalten. Um den Zusatzeffekt der Gravitation berücksichtigen zu können, sehen wir den Raum als gekrümmt an.

(iv) Die Metrik übernimmt dann die Rolle der Potentiale der Theorie und es wird, analog zur Newtonschen Theorie, ein Satz von partiellen Differentialgleichungen für die Potentiale als Feldgleichungen der Theorie aufgesucht. Aufgrund des Prinzips der Kovarianz muß diese Gleichung tensoriellen Charakter haben.

(v) Berücksichtigen wir nun nicht lokale Effekte, dann kann ein echtes Gravitationsfeld durch die Veränderungen im Feld beobachtet werden. (Nicht durch Beobachtung des Feldes selbst.) Diese Veränderungen führen dazu, daß sich Testteilchen auf zeitartigen geodätischen Linien bewegen, welche kon– oder divergieren. Die Konvergenz wird durch den Riemannschen Tensor in der Gleichung für die geodätische Abweichung beschrieben.

(vi) Der Riemannsche Tensor ist ein Tensor, welcher die zweiten partiellen Ableitungen des metrischen Tensors enthält; so kann man erwarten, daß die Feldgleichungen den Riemannschen Tensor enthalten. Die Tatsache, daß das Newtonsche Vakuumfeld durch das Verschwinden des verjüngten Riemannschen Tensor beschrieben wird, läßt weiters vermuten, daß man eine Verjüngung des Riemannschen Tensors zu untersuchen hat. Es bietet sich hier sinnvoll der Ricci–Tensor an, und sein Verschwinden ist dem Verschwinden des Einstein–Tensors äquivalent.

4.6 Die vollständigen Feldgleichungen

Die Äquivalenz von Masse und Energie wie sie aus der speziellen Relativitätstheorie folgt, läßt vermuten, daß *alle* Formen von Energie als Quellen für das Gravitationsfeld dienen. Dies ist die "schwache" Form des Äquivalenzprinzips:

$$\boxed{\text{Die Gravitation ist an alles gekoppelt.}}$$

Wir nehmen daher den *Energie–Impulstensor* T^{ab} als *Quellterm* für die Feldgleichungen. Dieser gehorcht in der speziellen Relativitätstheorie dem Erhaltungssatz:

$$\partial_b T^{ab} = 0. \tag{4.25}$$

Die Verallgemeinerung

$$\bigtriangledown_b T^{ab} = \mathrm{div} T^{ab} = 0 \tag{4.26}$$

für die allgemeine Relativitätstheorie ist naheliegend, da im ebenen System (4.26) zu (4.25) degeneriert und daher im lokal ebenen System der allgemeinen Relativitätstheorie, wie gefordert, die spezielle Relativitätstheorie gültig ist. Nun gilt aber auch für den Einsteintensor (3.86):

$$\mathrm{div} G_{ab} = \mathrm{div} G^{ab} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen lassen vermuten, daß diese beiden Tensoren einander proportional sind, und wir schreiben konsistent:

$$G^{ab} = \kappa T^{ab}. \tag{4.27}$$

Diese Gleichung stimmt mit Machs Prinzip

$$\boxed{\text{Die Materieverteilung bestimmt die Geometrie}}$$

überein. (4.27) ist dann die Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie.

4.6.1 Der Energie–Impulstensor

Dieser Tensor soll für die Beschreibung der Masseverteilung zuständig sein. Im Ruhesystem gilt daher, entsprechend der speziellen Relativitätstheorie:

$$T^{00} = \rho_0 \, c^2 \tag{4.28}$$

mit ρ_0 als Dichte der Masseverteilung: alle anderen Komponenten sind im ebenen System gleich Null. Ist nun ein Geschwindigkeitsfeld vorhanden, so gilt weiter:

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \rho v^k v^l = \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\tau}\left(1-\beta^2\right)\rho \\ &= \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\tau}\rho_0, \end{aligned}$$

da im lokal ebenen System wiederum $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t = \sqrt{1-\beta^2}$ gilt. Somit gilt im speziellen:

$$\begin{aligned} T^{k0} &= \rho v^k c = \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\beta^2\right)\rho \\ T^{00} &= \rho c^2 = \frac{c^2}{1-\beta^2}\rho_0. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken wurde nur ein kinetischer Anteil berücksichtigt; schließt man nun noch die potentielle Energie ein, so erhält man vollständig:

$$T^{kl} = \left({}^{(1)}T +^{(2)} T\right)^{kl} = {}^{(1)}T^{kl} + p^{kl}. \tag{4.29}$$

Dabei ist ${}^{(1)}T^{kl}$ der bereits oben eingeführte Tensor und p^{kl} ist ein Spannungstensor mit $p^{\mu 0} = p^{0\mu} = 0$. Es ist nun zu zeigen, daß für diesen Tensor tatsächlich (4.25) gilt.

Der Beweis hiefür erfolgt günstigerweise im nicht relativistischen Grenzfall $v/c \ll 1$. Für $a = 1$ folgt aus (4.25):

$$\begin{aligned} \partial_b T^{1b} &= \partial_0 T^{10} + \partial_\nu T^{1\nu}, \quad \nu = 1,2,3 \\ \partial_\nu T^{1\nu} &= \partial_\nu \left(\rho v^1 v^\nu\right) + \partial_\nu p^{1\nu} \\ &= v^1 \partial_\nu \left(\rho v^\nu\right) + \rho v^\nu \partial_\nu v^1 + \partial_\nu p^{1\nu} \\ &= v^1 \partial_\nu \left(\rho v^\nu\right) + \rho v^\nu \partial_\nu v^1 + \mathrm{div}_1 p \\ \partial_0 T^{10} &= \partial_0 \rho v^1 c = \frac{\partial}{\partial t}\rho v^1 = \rho\frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

also

$$\partial_b T^{1b} = v^1 \mathrm{div}\left(\rho \mathbf{v}\right) + v^1 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \underbrace{\left[\frac{\partial v^1}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\nabla v^1\right)\right]}_{=\frac{\mathrm{d}_s v^1}{\mathrm{d}t}} + \mathrm{div}_1 p$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_b T^{\nu b} &= v^\nu \left[\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \frac{\mathrm{d}_s v^\nu}{\mathrm{d}t} \rho + \operatorname{div}_\nu p \\
&= v^\nu \frac{\mathrm{d}^\star \rho}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{\mathrm{d}_s v^\nu}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div}_\nu p.
\end{aligned}$$

Für die nullte Komponente folgt noch:

$$\begin{aligned}
\partial_b T^{0b} &= \partial_0 T^{00} + \partial_\nu T^{0\nu} \\
\partial_\nu T^{0\nu} &= \partial_\nu (\rho c v^\nu) \\
&= c \partial_\nu (\rho v^\nu) \\
&= c \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \\
\partial_0 T^{00} &= \partial_0 \left(\rho c^2 \right) = c \frac{\partial \rho}{\partial t}
\end{aligned}$$

und damit auch:

$$\partial_b T^{0b} = c \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] = c \frac{\mathrm{d}^\star \rho}{\mathrm{d}t}.$$

Soll nun (4.25) gelten, so folgen die zwei Gleichungen

$$\operatorname{div}_\nu p = -\rho \frac{\mathrm{d}_s v^\nu}{\mathrm{d}t} - v^\nu \frac{\mathrm{d}^\star \rho}{\mathrm{d}t} \tag{4.30}$$

$$c \frac{\mathrm{d}^\star \rho}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4.31}$$

Aus (4.31) folgt unmittelbar mit

$$\dot{\rho} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \tag{4.32}$$

die Kontinuitätsgleichung der Gasdynamik, und mit

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} p &= -\rho \frac{\mathrm{d}_s \mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= -\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

die Navier–Stokes Gleichung, die Hauptgleichung der Gasdynamik.

Die Erfüllung der Feldgleichung im lokal ebenen System führt somit auf die bekannten Hauptgleichungen der Gasdynamik und wir haben für den Tensor T tatsächlich einen physikalisch sinnvollen Tensor gefunden. Wir setzen somit im allgemein relativistischen Fall:

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} + p^{\mu\nu} \\
T^{\nu 0} &= \rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
T^{00} &= \rho_0 \frac{c^2}{1-\beta^2}.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

τ ist dabei eine Invariante in Bezug auf das lokal ebene System. Beim Übergang zu anderen Systemen ist aber die Bogenlänge ds die Invariante, und wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= c\mathrm{d}\tau \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} \\
\mathrm{d}x^0 &= c\mathrm{d}t = c\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}
$$

zu setzen, und daraus folgt weiter

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= c^2\rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + p^{\mu\nu} \\
T^{\nu 0} &= c^2\rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
&= c^2\rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} \\
T^{00} &= \rho_0 \frac{c^2}{1-\beta^2} \\
&= \rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 c^2.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Betrachten wir nun ein nicht zusammenhängendes elastomechanisches System, so existieren in diesem auch keine Spannungen ($p^{\mu\nu} = 0$) und (4.35) ist dann tatsächlich die gesuchte rechte Seite von (4.27). Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
G^{ab} &= \kappa T^{ab} \\
&= \left[\quad \kappa = c^2\kappa^0; \quad \Pi =^{(1)} T/c^2 \quad \right] \\
&= \kappa^0 \Pi^{ab}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

mit

$$
\Pi^{ab} = \rho_0 \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}s}. \tag{4.37}
$$

4.6.2 Bestimmung der Konstanten κ^0

Will man die Konstante κ^0 bestimmen, so muß das System integriert werden. Dazu nehmen wir an, daß die Abweichungen von der euklidischen Geometrie klein sein sollen, daß weiterhin $v/c \ll 1$ sein soll, und daß das Gravitationsfeld statisch sei. (Die Massenverteilung macht also nur geringfügige Bewegungen, oder ist überhaupt im Zustand der Ruhe.) Wir befinden uns also im *Grenzfall zur Newtonschen Mechanik.*

(a) Kleine Abweichungen von der euklidischen Geometrie:

$$\begin{aligned} x^a &= \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^0, x^\alpha\right) \\ &= (ct, x, y, z) \\ g_{ab} &= \eta_{ab} + \varepsilon h_{ab} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

mit η_{ab} dem metrischen Tensor der Minkovski–Metrik und ε einem kleinen dimensionslosen Parameter.

(b) $v/c \ll 1$:
Im Intervall δt bewegt sich der Körper über einen Abstand δx^α mit der Geschwindigkeit v, also gilt:

$$\begin{aligned} \delta x^\alpha &\sim \text{Geschw. } \times \text{ Zeit } \sim v\delta t \sim \frac{v}{c} c\delta t \\ &\sim \varepsilon \delta x^0 \\ \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\delta x^\alpha} &\sim \frac{1}{\delta x^0}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Näherung:

$$\varepsilon \partial_\alpha f \sim \partial_0 f. \tag{4.39}$$

Wir untersuchen nun die Bewegung eines freien Testteilchens, welches sich mit der Geschwindigkeit v entlang der Weltlinie $x^a = x^a(\tau)$ bewegt. Es bewegt sich nach Voraussetzung entlang einer zeitartigen geodätischen Linie (3.43):

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^a}{\mathrm{d}\tau^2} + \left\{ \begin{array}{c} a \\ bc \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{4.40}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} c^2 \mathrm{d}\tau^2 &= \mathrm{d}s^2 \\ &= c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\ &= \mathrm{d}t^2 \left(c^2 - v^2\right) \\ &= \mathrm{d}t^2 c^2 \left(1 - v^2/c^2\right) \\ &= c^2 \mathrm{d}t^2 \left(1 - \varepsilon^2\right) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{4.41}$$

Wir können somit in niedrigster Ordnung von ε, τ durch t in (4.40) ersetzen. Nun gilt aber wegen (4.39):

$$\mathrm{d}x^\alpha \sim \varepsilon c \mathrm{d}t$$

und damit wird

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Weiters gilt (3.37)

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} a \\ bc \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}\right) = (4.38) \\
&= \frac{1}{2} \eta^{ab} \varepsilon \left(\partial_c h_{bd} + \partial_b h_{cd} - \partial_d h_{bc}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Wir konzentrieren uns nun auf den räumlichen Teil von (4.40); wir setzen also $a = \alpha$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ bc \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}t} \left[1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\right] = \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{c^2}\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 00 \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{c^2}\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta 0 \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} + \\
&\quad \frac{1}{c^2}\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\beta \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{c^2}\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 00 \end{array} \right\} + \underbrace{2\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\beta \end{array} \right\} \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}}_{\sim\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \\
&\quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t}}_{\sim\mathcal{O}(\varepsilon^3)} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wir finden weiter:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 00 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha d} \varepsilon \left(\partial_0 h_{0d} + \partial_0 h_{0d} - \partial_d h_{00}\right) \\
&= \left[\quad \eta^{\alpha d} = \eta^{\alpha\delta} = -\delta^\alpha_\delta \quad \right] \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon \left(2\partial_0 h_{0\alpha} - \partial_\alpha h_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \partial_\alpha h_{00} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \quad \text{wegen (4.39)!}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für den räumlichen Teil der geodätischen Linie:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2} c^2 \partial_\alpha g_{00} \left[1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\right], \tag{4.42}$$

wobei wir wieder (4.38) verwendet haben; es gilt noch weiter:

$$g_{00} = 1 + \varepsilon h_{00} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Es verbleibt somit noch die Größe g_{00} zu bestimmen. Die Feldgleichung lautet:

$$\begin{aligned} G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa^0 \Pi_{ab} \\ R_{ab} &= (3.81) = R_{acb}{}^c = (3.66) \\ &= \partial_a \Gamma^c_{cb} - \partial_c \Gamma^c_{ab} - \underbrace{\Gamma^p_{ab}\Gamma^c_{cp} + \Gamma^p_{cb}\Gamma^c_{ap}}_{\sim\mathcal{O}(\varepsilon^2)} \end{aligned}$$

Für $a = 0$ folgt dann weiter:

$$R_{0b} = \underbrace{\partial_0 \Gamma^c_{bc}}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - \partial_c \Gamma^c_{0b}$$

und für $b = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma^c_{00} &= \frac{1}{2} g^{cd} \left(\partial_0 g_{0d} + \partial_0 g_{0d} - \partial_d g_{00}\right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{cd} \partial_d g_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \partial^c g_{00} \\ R_{00} &= -\partial_c \Gamma^c_{00} = \frac{1}{2} \partial_c \partial^c g_{00} \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2}}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^3)^2} \right] \end{aligned}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}. \tag{4.43}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} R &= \kappa^0 \Pi_{00} = \kappa^0 \rho \\ \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} - \frac{1}{2} R &= \kappa^0 \rho. \end{aligned}$$

Wir erhalten aus (4.36):

$$\underbrace{g_{ab}R^{ab}}_{R} - \frac{1}{2}\underbrace{g_{ab}g^{ab}}_{\delta^a{}_a=4} R = \kappa^0 \underbrace{g_{ab}\Pi^{ab}}_{\Pi}$$

$$R = -\kappa^0\Pi = -\kappa^0\rho. \tag{4.44}$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{1}{2}\kappa^0\rho \tag{4.45}$$

mit der Lösung

$$g_{00} = 1 - \frac{\kappa^0}{4\pi}\int\limits_{V_\infty} \mathrm{d}^3x\frac{\rho}{r} = 1 + \bar{\varepsilon}.$$

Wenn wir im Unendlichen euklidisches Verhalten fordern, folgt:

$$\lim_{r\to\infty} g_{00} = 1.$$

Somit ist die geodätische Linie durch

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{c^2}{2}\partial_\alpha g_{00} = \frac{c^2}{2}\frac{\kappa^0}{4\pi}\partial_\alpha\int\limits_{V_\infty} \mathrm{d}^3x\frac{\rho}{r}$$

gegeben. Wir setzen nun $c^2\kappa^0/8\pi = \kappa_0$ und erhalten für diskret verteilte Massen:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \partial_\alpha\left(\kappa_0\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i}\right),$$

oder mit der Masse m_0 des Teilchens im Aufpunkt:

$$m_0\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \partial_\alpha\left(\kappa_0\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i}\right)m_0 \tag{4.46}$$

oder

$$m_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\kappa_0\sum_{i=1}^{N}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \tag{4.47}$$

und damit entspricht dieses Ergebnis dem bekannten Gravitationsgesetz der Newtonschen Mechanik, daher ist

$$\kappa_0 = \frac{c^2\kappa^0}{8\pi} = G; \qquad \kappa^0 = \frac{8\pi G}{c^2} \tag{4.48}$$

zu setzen, wobei G die bekannte Gravitationskonstante ist. Somit erfüllt die Einsteinsche Feldgleichung im nicht relativistischen Grenzfall die Forderung, daß die Newtonsche Mechanik reproduziert wird. Gleichzeitig wurde der einzige freie Parameter der Theorie bestimmt.

4.7 Formulierung eines Variationsprinzips zu den Feldgleichungen

4.7.1 Einleitung

In der allgemeinen Relativitätstheorie besteht die grundsätzliche Aufgabe darin, die Feldgleichung

$$G^{ab} = 8\pi\kappa_0 T^{ab} \tag{4.49}$$

bei vorgegebener Massenverteilung aufzulösen, um die Geometrie bestimmen zu können. Es sind also die Felder, welche die Massenenergie generieren und ihre zeitliche Änderung, ebenso wie die dreidimensionale Geometrie des Raumes und ihre zeitliche Änderung anzugeben. Man berechnet daraus die vierdimensionale Geometrie von Raum und Zeit. So führen die Gleichungen für die Geometrodynamik und die Felddynamik zu einer Vorhersage für alle Zeiten; weitere Vorhersagen von außen werden nicht benötigt.

Auf der rechten Seite von (4.49) stehen stets die Ursachen für die Krümmung, auf der linken Seite stehen die Beschreibenden der Krümmung, die metrischen Koeffizienten zweifach differenziert. Analysiert man die Gleichungen genauer, so stellt man fest, daß man die Aufspaltung zwischen den Quellen und den Beschreibenden der Krümmung nur dann richtig durchführen wird, wenn man nicht zunächst die noch wesentlichere Aufspaltung zwischen Anfangswerten und der Zukunft durchgeführt hat. Man erkennt, daß vier der zehn Komponenten der Feldgleichung die Krümmung des Raumes hier und jetzt mit der Massenenergie hier und jetzt verknüpft; die anderen sechs Gleichungen beschreiben, wie sich die so bestimmte Geometrie weiterentwickelt.

Das Variationsprinzip geht nun von der Angabe einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ aus, welche ein Funktional der Metrik g_{ab} und ihrer ersten, möglicherweise auch höheren, Ableitungen ist:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{ab}, \partial_c g_{ab}, \partial_c \partial_d g_{ab}, \ldots\right). \tag{4.50}$$

$\mathcal{L}$ ist dabei eine Skalardichte vom Gewicht $+1$, und man kann somit das Wirkungsintegral

$$I = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\Omega\, \mathcal{L} \tag{4.51}$$

über einen Bereich Ω der Mannigfaltigkeit bilden. Wenn wir nun beliebige Änderungen von g_{ab} durchführen, welche an der Grenze $\partial\Omega$ von Ω verschwinden, dann muß I konstant bleiben. Somit gilt:

$$g_{ab} \to g_{ab} + \delta g_{ab} \qquad \Longrightarrow \qquad I \to I + \delta I \quad \text{mit} \quad \delta I = 0, \tag{4.52}$$

also

$$\delta I = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \mathcal{L}^{ab}\, \delta g_{ab} = 0, \tag{4.53}$$

und der Euler–Lagrange Ableitung

$$\mathcal{L}^{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ab}}. \tag{4.54}$$

Somit folgen die Feldgleichungen als

$$\mathcal{L}^{ab} = 0. \tag{4.55}$$

4.7.2 Eigenschaften der metrischen Determinante

Einführung von Tensordichten

Eine Tensordichte $\mathcal{T}^{a\cdots}_{b\ldots}$ vom Gewicht W transformiert wie ein gewöhnlicher Tensor, außer daß zusätzlich die W–te Potenz der Jacobi-Determinante

$$J = |\partial'_b x^a| = \det \begin{pmatrix} \partial'_1 x^1 & \partial'_2 x^1 & \cdots & \partial'_n x^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial'_1 x^n & \partial'_2 x^n & \cdots & \partial'_n x^n \end{pmatrix}$$

als Faktor auftritt. Das Transformationsgesetz lautet dann:

$$\mathcal{T}'^{a\ldots}_{b\ldots} = J^W \partial_c x'^a \cdots \partial'_b x^d \ldots \mathcal{T}^{c\ldots}_{d\ldots}.$$

Aufgrund dieser Definition kann man Tensordichten wie Tensoren kombinieren. Das Produkt zweier Tensordichten vom Gewicht W_1 und W_2 ist dann eine Tensordichte vom Gewicht $W_1 + W_2$.

Ist nun $\mathcal{T}^{a\cdots}_{b\ldots}$ eine Tensordichte vom Gewicht W, so gilt für die kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} \bigtriangledown_c \mathcal{T}^{a\ldots}_{b\ldots} &= \{\text{übliche Terme als ob } \mathcal{T}^{a\ldots}_{b\ldots} \text{ ein} \\ &\quad \text{normaler Tensor wäre}\} \; - W\Gamma^d_{dc}\mathcal{T}^{a\ldots}_{b\ldots}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Also gilt für die kovariante Ableitung einer Tensordichte vom Gewicht W:

$$\bigtriangledown_c \mathcal{T}^a = \partial_c \mathcal{T}^a + \Gamma^a_{bc}\mathcal{T}^b - W\Gamma^b_{bc}\mathcal{T}^a.$$

Es sei nun $W = 1$ und $c = a$, so folgt:

$$\begin{aligned} \bigtriangledown_a \mathcal{T}^a &= \partial_a \mathcal{T}^a + \Gamma^a_{ba}\mathcal{T}^b - \Gamma^b_{ba}\mathcal{T}^a \\ &= \partial_a \mathcal{T}^a + \Gamma^b_{ab}\mathcal{T}^a - \Gamma^b_{ab}\mathcal{T}^a \\ &= \partial_a \mathcal{T}^a \end{aligned} \tag{4.57}$$

und wir finden, daß die kovariante Divergenz einer Vektordichte vom Gewicht 1 ident der gewöhnlichen Divergenz ist.

Die metrische Determinante

Wir haben eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem metrischen Tensor g_{ab} und dieser transformiert entsprechend (3.11)

$$g'_{ab}(x') = \partial'_a x^c \partial'_b x^d g_{cd}(x)$$

und wenn wir die Determinante bilden, folgt

$$g' = J^2 g.$$

Somit ist die metrische Determinante eine skalare Dichte vom Gewicht zwei. Da wir häufig mit Metriken von negativer Signatur arbeiten, schreiben wir nun

$$(-g') = J^2\,(-g)$$

und ziehen die Wurzel:

$$\sqrt{-g'} = J\sqrt{-g}.$$

Also ist $\sqrt{-g}$ eine skalare Dichte vom Gewicht $+1$. Diese Größe ist von besonderer Bedeutung bei der Integration. Wir können zum Beispiel aus jedem Tensor $T^{a\cdots}_{b\ldots}$ durch Multiplikation mit $\sqrt{-g}$ eine Tensordichte $\sqrt{-g}T^{a\cdots}_{b\ldots}$ vom Gewicht $+1$ bilden. Es folgt dann unmittelbar

$$\nabla_a\left[\sqrt{-g}\xi^a\right] = \partial_a\left[\sqrt{-g}\xi^a\right]. \tag{4.58}$$

Es gilt nun für jeden Punkt, daß die ko– und kontravarianten metrischen Tensoren symmetrische Matrizen sind, die zueinander invers sind, also

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a{}^c.$$

Aus obiger Beziehung ist zu ersehen, daß wir die Ableitung der Determinante einer Matrix zu bilden haben, deren Elemente selbst Funktionen der Koordinaten sind. Um dies bestimmen zu können, untersuchen wir den allgemeinen Fall einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$. Ihre Inverse (b^{ij}) ist dann durch

$$\left(b^{ij}\right) = \frac{1}{a}\left(A^{ij}\right)^T = \frac{1}{a}\left(A^{ji}\right)$$

gegeben, mit $a = \det(A)$. A^{ij} ist dann der Kofaktor von a_{ij}, und T deutet die Operation der Transposition an. Wir halten nun i fest und erweitern die Determinante a in der i–ten Zeile; dann gilt

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A^{ij},$$

da i ja fest ist. Wir differenzieren beide Seiten nach a_{ij}:

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = A^{ij},$$

da a_{ij} im Kofaktor nicht auftritt. Wir können dies für jedes i wiederholen, und sehen, daß diese Beziehung allgemein gültig ist. Wir nehmen jetzt weiter an, daß die a_{ij} Funktionen der Koordinaten x^k sind. Die Determinante ist dann ein Funktional der a_{ij}, welche ihrerseits wiederum Funktionen von x^k sind; also

$$a = a\left(a_{ij}(x^k)\right).$$

Dies wird nun partiell nach x^k differenziert:

$$\begin{aligned} \partial_k a &= \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \partial_k a_{ij} \\ &= A^{ij} \partial_k a_{ij} = a b^{ji} \partial_k a_{ij}. \end{aligned}$$

Wir wenden dies auf die (symmetrische) geometrische Determinante an:

$$\partial_c g = g g^{ba} \partial_c g_{ab} = g g^{ab} \partial_c g_{ab}. \tag{4.59}$$

Aufgrund des Verschwindens der kovarianten Ableitung der g_{ab} (siehe Gl. (3.54)) folgt:

$$\begin{aligned} \bigtriangledown_c g_{ab} &= \partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{ac} g_{db} - \Gamma^d_{bc} g_{ad} = 0 \\ \rightarrow \partial_c g_{ab} &= \Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{ad} \\ \partial_c g &= g g^{ab} \left(\Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{ad}\right) \\ &= g \delta^a{}_d \Gamma^d_{ac} + g \delta^b{}_d \Gamma^d_{bc} \\ &= 2g \Gamma^a_{ac}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Nun ist aber g eine Skalardichte vom Gewicht $+2$ und es gilt daher wegen (4.56):

$$\begin{aligned} \bigtriangledown_c g &= \partial_c g - 2g\Gamma^a_{ac} \\ &= 2g\Gamma^a_{ac} - 2g\Gamma^a_{ac} = 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Weiters gilt:

$$\partial_c \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\,\Gamma^a_{ac}$$

und damit folgt wieder wegen (4.56)

$$\bigtriangledown_c \sqrt{-g} = 0. \tag{4.62}$$

Daraus ergibt sich für jeden beliebigen Tensor

$$\bigtriangledown_c \left[\sqrt{-g} T^{a\ldots}_{b\ldots}\right] = \sqrt{-g} \bigtriangledown_c T^{a\ldots}_{b\ldots}.$$

Man kann somit die Faktoren g und $\sqrt{-g}$ beim kovarianten Differenzieren genauso behandeln wie die g_{ab}.

Wir finden ganz besonders: für das Raumelement

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

folgt wegen

$$\mathrm{d}x'^a = \partial_b x'^a \mathrm{d}x^b$$

die Beziehung

$$\mathrm{d}\Omega' = J^{-1} \mathrm{d}\Omega.$$

Damit ist $\mathrm{d}\Omega'$ eine skalare Dichte vom Gewicht -1, und es folgt weiter:

$$\sqrt{-g'}\mathrm{d}\Omega' = J\, J^{-1} \sqrt{-g}\mathrm{d}\Omega = \sqrt{-g}\mathrm{d}\Omega.$$

Wir haben also das wichtige Ergebnis erhalten, daß $\sqrt{-g}\mathrm{d}\Omega$ ein *Skalar* ist.

Dieses Ergebnis ist von besonderer Konsequenz: man kann ein skalares Feld ϕ, welches an zwei unterschiedlichen Punkten x_1 und x_2 bestimmt wurde, addieren, und das Ergebnis ist wieder ein Skalar:

$$\phi'(x'_1) + \phi'(x'_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2).$$

Wir können uns also vorstellen, ein skalares Feld ϕ über irgendeinen n–dimensionalen Bereich Ω einer Mannigfaltigkeit M zu integrieren. Nun ist aber das Volumselement $\mathrm{d}\Omega$ kein Skalar, sondern eine skalare Dichte vom Gewicht -1. Ist nun ϕ eine skalare Dichte vom Gewicht +1, so kann man tatsächlich $\int \mathrm{d}\Omega\, \phi$ bestimmen. Analoges kann man zur Integration über Kurven, Oberflächen und Hyperflächen ableiten.

4.7.3 Das Variationsprinzip für den leeren gekrümmten Raum

Es ist somit das Variationsprinzip

$$I = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L} = \int\, \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} L = \text{Extr.} \tag{4.63}$$

zu behandeln, wobei L die (skalare) Lagrangefunktion ist, welche allein aus der Geometrie gebildet wird. Im vollständigen Fall treten aber noch zusätzliche Felder auf, und wir haben

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{geom}} + \mathcal{L}_{\text{Feld}} = \sqrt{-g} L \\ L &= L_{\text{geom}} + L_{\text{Feld}}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Einsteinsche Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R \tag{4.64}$$

und es ist dann das Variationsprinzip

$$\delta I = \delta \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g}R = 0 \tag{4.65}$$

auszuführen. Es ist dann nur noch zu zeigen, daß (4.65) tatsächlich zu den Feldgleichungen des leeren Raumes führt.

Dazu benötigen wir den *Hilfssatz von Platini*, welcher es erlaubt, die Variation der R_{ab} durch die Variation der g_{ab} auszudrücken. Aus der Definition (3.65) folgt für torsionsfreie Vernetzungen:

$$\xi_{c\|b\|a} - \xi_{c\|a\|b} = -R_{abc}{}^d \xi_d$$

$$\xi^l = g^{lk}\xi_k; \qquad \xi_l = \delta_l{}^k \xi_k = g^{kj} g_{jl} \xi_k$$

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d \xi_d &= R_{abc}{}^d g^{kj} g_{jd} \xi_k \\ &= g_{jd} R_{abc}{}^d g^{kj} \xi_k \\ &= R_{abcj}\xi^j = R_{cjab}\xi^j = -R_{jcab}\xi^j. \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\xi_{c\|b\|a} - \xi_{c\|a\|b} = R_{jcab}\xi^j.$$

Wir ziehen den Index c hoch:

$$\xi^c{}_{\|b\|a} - \xi^c{}_{\|a\|b} = R_j{}^c{}_{ab}\xi^j$$

und verjüngen $c = a$:

$$\begin{aligned} \xi^a{}_{\|b\|a} - \xi^a{}_{\|a\|b} &= R_j{}^a{}_{ab}\xi^j = -R_j{}^a{}_{ba}\xi^j \\ &= -R_{jb}\xi^j = -R_{bj}\xi^j. \end{aligned}$$

Nun gilt für das variierte Vektorfeld:

$$\delta\xi^a{}_{\|a\|b} - \delta\xi^a{}_{\|b\|a} = \delta R_{bc}\xi^c + R_{bc}\underbrace{\delta\xi^c}_{=0}.$$

Für beliebige Tensoren A^m und B^m_j gilt weiter:

$$\begin{aligned} \delta A^m{}_{\|j} &= \delta A^m{}_{|j} + \delta\Gamma^m_{lj} A^l + \Gamma^m_{lj}\delta A^l \\ &= \left(\delta A^m{}_{|j} + \Gamma^m_{lj}\delta A^l\right) + A^l \delta\Gamma^m_{lj} \\ &= \left(\delta A^m\right)_{\|j} + A^l \delta\Gamma^m_{lj} \end{aligned}$$

und analog

$$\delta B^m_{j\ \|k} = \left(\delta B^m_j\right)_{\|k} + B^l_j \delta\Gamma^m_{lk} - B^m_l \delta\Gamma^l_{jk}.$$

In unserem Fall gilt $A^m = \xi^m$, das variierte Vektorfeld, und damit folgt:

$$\delta\xi^m{}_{\|j} = \delta\Gamma^m_{lj}\xi^l$$

und somit hat $\delta\Gamma^m_{lj}$ Tensoreigenschaften. Wir setzen noch $B^m_j = \xi^m{}_{\|j}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\delta\xi^m{}_{\|j\|k} &= \left(\delta\xi^m{}_{\|j}\right)_{\|k} + \xi^m{}_{\|j}\delta\Gamma^m_{lk} - \xi^m{}_{\|l}\delta\Gamma^l{}_{mk} \\
&= \left(\delta\Gamma^m_{lj}\xi^l\right)_{\|k} + \xi^m{}_{\|j}\delta\Gamma^m_{lk} - \xi^m{}_{\|l}\delta\Gamma^l{}_{mk} \\
&= \left(\delta\Gamma^m_{lj}\right)_{\|k}\xi^l + \xi^l{}_{\|k}\delta\Gamma^m_{lj} + \xi^m{}_{\|j}\delta\Gamma^m_{lk} - \xi^m{}_{\|l}\delta\Gamma^l{}_{mk}.
\end{aligned}$$

Wir finden also:

$$\begin{aligned}
\delta\xi^m{}_{\|m\|k} &= \left(\delta\Gamma^m_{lm}\right)_{\|k}\xi^l + \xi^l{}_{\|k}\delta\Gamma^m_{lm} + \xi^l{}_{\|m}\delta\Gamma^m_{lk} - \xi^m{}_{\|l}\delta\Gamma^l{}_{mk} \\
-\delta\xi^m{}_{\|k\|m} &= -\left(\delta\Gamma^m_{lk}\right)_{\|m}\xi^l - \xi^l{}_{\|m}\delta\Gamma^m_{lk} - \xi^l{}_{\|k}\delta\Gamma^m_{lm} + \xi^m{}_{\|l}\delta\Gamma^l{}_{mk} \\
\hline
\delta R_{kl}\,\xi^l &= \left(\delta\Gamma^m_{lm}\right)_{\|k}\xi^l - \left(\delta\Gamma^m_{lk}\right)_{\|m}\xi^l \\
\delta R_{kl} &= \left(\delta\Gamma^m_{lm}\right)_{\|k} - \left(\delta\Gamma^m_{lk}\right)_{\|m}
\end{aligned}$$

oder, als Satz von Platini:

$$\delta R_{lk} = \left(\delta\Gamma^m_{km}\right)_{\|l} - \left(\delta\Gamma^m_{kl}\right)_{\|m} = \delta R_{kl}. \tag{4.66}$$

Nunmehr kann das Variationsprinzip (4.65) behandelt werden:

$$\begin{aligned}
\delta\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,R &= 0 \\
R &= g^{kl}R_{kl} \\
\delta R &= R_{kl}\,\delta g^{kl} + g^{kl}\delta R_{kl}.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}
g^{kj}g_{jl} &= \delta^k{}_l \\
\delta\left(g^{kj}g_{jl}\right) &= g_{jl}\delta g^{kj} + g^{kj}\delta g_{jl} = 0 \quad | \cdot g^{ls} \\
&= \underbrace{g_{jl}g^{ls}}_{\delta_j{}^s}\delta g^{kj} + g^{ls}g^{kj}\delta g_{jl} = 0 \\
0 &= \delta g^{kj}\delta_j{}^s + g^{ls}g^{kj}\delta g_{jl} \\
0 &= \delta g^{ks} + g^{ls}g^{kj}\delta g_{jl}.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Somit folgt weiter:

$$\delta g^{kl} R_{kl} = -g^{ls} g^{kj} R_{ks}\, \delta g_{jl} = -R^{jl}\, \delta g_{jl}$$

und damit

$$\delta R = -\delta g_{kl} R^{kl} + g^{kl} \delta R_{kl}.$$

Es gilt aber:

$$\delta \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\, R = \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \delta R + \int \mathrm{d}^4x\, R \delta \sqrt{-g},$$

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \delta R \quad &= \quad -\int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \delta g_{kl}\, R^{kl} + \\ &\underbrace{\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} g^{kl} \delta R_{kl}}_{= \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\, g^{kl} \left\{ \left(\delta \Gamma^m_{km} \right)_{\|l} - \left(\delta \Gamma^m_{lk} \right)_{\|m} \right\}} \qquad . \end{aligned}$$

Es ist aber $\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ das Volumselement des nicht euklidischen Raumes, und $\delta\Gamma^i_{kl}$ wurde bereits als Tensor identifiziert. Es gilt dann (wegen $\sqrt{-g}\, a^k{}_{\|k} = \left(\sqrt{-g}\, a^k\right)_{\|k}$):

$$\int \mathrm{d}V \;\times\; \text{Tensordivergenz} = \oint \mathrm{d}f\ \ldots$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} g^{kl} (\delta \Gamma^m_{km})_{\|l} \quad &= \quad a^l{}_{\|l} \\ g^{kl} (\delta \Gamma^m_{lk})_{\|m} \quad &= \quad b^m{}_{\|m} \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\delta \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} R = \int \mathrm{d}^4x\, R \delta \sqrt{-g} - \int \mathrm{d}^4x\, \delta g_{kl} R^{kl}\, \sqrt{-g},$$

da die Variation am Rand des Volumens verschwinden soll.

Wir folgen nun der Beziehung(4.59) und schreiben

$$\delta g = g\, g^{ab} \delta g_{ab}$$

und finden dann

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4x \delta \sqrt{-g} R \quad &= \quad \int \mathrm{d}^4x\, R \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g\, g^{ab} \delta g_{ab} \right] \\ &= \quad \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x\, R \sqrt{-g}\, g^{ab} \delta g_{ab} \\ \delta \int \mathrm{d}^4x\, R \sqrt{-g} \quad &= \quad \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x\, R \sqrt{-g}\, g^{ab} \delta g_{ab} - \\ &\int \mathrm{d}^4x\, R^{ab}\, \delta g_{ab} \sqrt{-g} \\ &= \quad \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \delta g_{ab} \left[\frac{1}{2} R g^{ab} - R^{ab} \right] = 0 \end{aligned}$$

oder

$$R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R = 0.$$

Damit konnte die Vakuumfeldgleichung (4.24) wiederum erhalten werden. Man erkennt daraus, daß das so eingeführte Variationsprinzip den Feldgleichungen äquivalent ist.

Die vollständigen Feldgleichungen findet man über die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \kappa \mathcal{L}_M, \tag{4.68}$$

wobei mit $\mathcal{L}_M$ die Materie–Lagrangedichte eingeführt wurde.

4.8 Einführung des elektromagnetischen Feldes

Die Maxwellschen Gleichungen können auch in tensorieller Form angeschrieben werden und führen so wieder zu einer Formulierung unter Verwendung eines Energie–Impulstensors. Ein solcher ist dann wieder ein natürlicher Kandidat für die rechte Seite der Feldgleichungen vom Typ (4.27).

Die Maxwellgleichungen lauten nun (mit $c = 1$), in den Quellgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E} &= \rho \\ \mathrm{rot}\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}, \end{aligned}$$

in den internen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0.$$

Der Strom $\mathbf{j}$ wird als Konvektionsstrom $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ interpretiert, wobei $\mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld des Materials der Ladungsdichte ρ ist.

Man führt nun den Tensor des elektromagnetischen Feldes ein:

$$F^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

und den Viererstrom

$$j^a = (\rho, \mathbf{j}) \tag{4.70}$$

ein, und findet die Quellgleichung:

$$\partial_b F^{ab} = j^a, \tag{4.71}$$

die interne Gleichung:

$$\partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = \partial_{[a} F_{bc]} = 0, \tag{4.72}$$

und schließlich die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_a j^a = 0. \tag{4.73}$$

Um die Verbindung zu den Feldgleichungen herstellen zu können, ist es von Vorteil, zu einer Potentialschreibweise der Maxwellgleichungen überzugehen. Wir führen dazu das Potential ϕ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$ ein, und schreiben:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\\ \mathbf{B} &= \mathrm{rot}\mathbf{A}\end{aligned}$$

und definieren das Viererpotential

$$\phi^a = (\phi, \mathbf{A})\,.$$

Damit findet man für die obigen Gleichungen:

$$F_{ab} = \partial_b \phi_a - \partial_a \phi_b = \partial_{[b} \phi_{a]}. \tag{4.74}$$

Gleichung (4.74) definiert das Viererpotential nicht eindeutig, da man jederzeit die Eichtransformation

$$\phi_a \to \bar{\phi}_a = \phi_a + \partial_a \psi \tag{4.75}$$

ausführen kann, ohne das Ergebnis (4.74) zu verändern. ψ ist dabei ein beliebiges Skalarfeld. Man führt oft eine Beschränkung für ϕ_a ein, eine Eichbedingung, und in unserem Fall ist die *Lorentz–Eichung*

$$\eta^{ab} \partial_b \phi_a = 0 \tag{4.76}$$

wesentlich, wobei η^{ab} wieder der metrische Tensor des Minkovski–Raumes ist. Wenn wir diese Eichung auf (4.75) anwenden, dann ist das skalare Feld ψ nicht mehr beliebig; es muß vielmehr Lösung der Wellengleichung

$$\eta^{ab} \partial_a \partial_b \psi = \Box \psi = 0 \tag{4.77}$$

sein. Die Gleichungen (4.74) führen dann dazu, daß die inneren Gleichungen automatisch erfüllt sind, und wir erhalten für die Quellgleichungen

$$\partial_b \left[\eta^{ab}\eta^{cd}\left(\partial_d\phi_c - \partial_c\phi_d\right)\right] = j^a, \tag{4.78}$$

was sich auf

$$\Box\phi^a = j^a \tag{4.79}$$

reduziert; in quellfreien Zonen gilt schließlich

$$\Box\phi^a = 0.$$

All diese Ergebnisse sind aus der speziellen Relativitätstheorie wohlbekannt. Um eine kovariante Formulierung dieser Theorie zu erhalten, ersetzt man die gewöhnlichen Ableitungen durch kovariante. Dies ist aber in (4.72) und (4.74) nicht notwendig, da

$$\begin{aligned} \nabla_{[a}F_{bc]} &= \partial_{[a}F_{bc]} \\ \nabla_{[b}\phi_{a]} &= \partial_{[b}\phi_{a]} \end{aligned}$$

ist. Somit lautet die kovariante Formulierung der Maxwellschen Gleichungen im Vakuum

$$\left.\begin{array}{c} \nabla_b F^{ab} = j^a; \qquad \partial_{[a}F_{bc]} = 0 \\ \nabla_a j^a = 0. \end{array}\right\} \tag{4.80}$$

und durch das Viererpotential ausgedrückt gilt immer noch

$$F_{ab} = \partial_{[b}\phi_{a]}. \tag{4.81}$$

Wir erweitern nun die Feldgleichungen (4.27) für die Anwesenheit des elektromagnetischen Feldes auf

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}\,R = \frac{\kappa}{c^2}\left(T^{ab} + E^{ab}\right), \tag{4.82}$$

wobei E^{ab} der Energie–Impulstensor des elektromagnetischen Feldes sein soll. Für diesen gilt:

$$\begin{aligned} E_{ab} &= -F_{ac}F_b{}^c + \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \\ &= -g^{cd}F_{ac}F_{bd} + \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Wir untersuchen (4.83) im Minkovski–Raum und finden etwa für $a = b = 0$

$$\begin{aligned} E_{00} &= -g^{cd}F_{0c}F_{0d} + \frac{1}{4}g_{00}F_{cd}F^{cd} \\ &= E^2 + B^2, \end{aligned}$$

den üblichen Ausdruck für die Energiedichte in der Elektrodynamik. Für die Impulsdichte gilt dann noch

$$(E_{01}, E_{02}, E_{03}) = -\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

was dem Pointingschen Vektor der Elektrodynamik entspricht.

Es folgt somit für (4.82)

$$R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R = \frac{\kappa}{c^2} \left(-F^a{}_c F^{bc} + \frac{1}{4} g^{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \tag{4.84}$$

im materiefreien Raum, welcher von elektromagnetischer Strahlung erfüllt ist. Wegen des Fehlens von Materie gilt dann noch weiters

$$\nabla_b F^{ab} = 0.$$

Es verschwindet also die Divergenz des Feldstärketensors.

Wir bestimmen nun die daraus resultierende Raumkrümmung. Dazu bilden wir die Verjüngung

$$g_{mk} R^{kl} - \frac{1}{2} g_{mk} g^{kl} R = \frac{\kappa}{c^2} \left[-g_{mk} F^k{}_j F_{lj} + \frac{1}{4} g_{mk} g^{kl} F_{ij} F^{ij} \right]$$

und finden für $m = l$

$$\begin{aligned}
g_{mk} R^{kl}\Big|_{m=l} &= g_{lk} R^{kl} = R^k{}_k = R \\
g_{mk} g^{kl}\Big|_{m=l} &= g_{lk} g^{kl} = \delta^l{}_l \\
g_{mk} F^k{}_j\Big|_{m=l} &= g_{lk} F^k{}_j = F_{lj} \\
R - \frac{1}{2} \delta^l{}_l R &= \frac{\kappa}{c^2} \left[-F_{lj} F^{lj} + \frac{1}{4} \underbrace{\delta^l{}_l}_{=4} F_{ij} F^{ij} \right] \\
R - 2R &= 0 \quad \to R \equiv 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$R^{ab} = -\frac{\kappa}{c^2} \left(F^a{}_c F^{bc} - \frac{1}{4} g^{ab} F_{cd} F^{cd} \right). \tag{4.85}$$

Wir sehen, daß das Vakuumfeld in einen Anteil von g^{ab} und einen von F^{ab} aufgespalten wird. Damit hat der Krümmungstensor eine im metrischen Tensor und dem Feldtensor unsymmetrische Form, was eine Neuformulierung der Theorie erfordert, in welcher die g's und die F's gleichberechtigt zusammengefaßt werden. $\Longrightarrow$ *Die fünfdimensionale projektive Relativitätstheorie.*

4.9 Schlußbetrachtung

4.9.1 Die Feldgleichungen

Die Feldgleichungen

$$G_{ab} = 8\pi\, T_{ab}$$

(mit der Gravitationskonstanten $G = 1$, und der Lichtgeschwindigkeit $c = 1$) kann man aus drei verschiedenen Blickwinkeln betrachten:

(i) Es sind Differentialgleichungen, welche den metrischen Tensor g_{ab} für einen gegebenen Energie–Impulstensor bestimmen. Der bei weitem wichtigste Fall besteht hier in der Lösung der Vakkum–Feldgleichungen mit $T_{ab} = 0$. Diese Betrachtungsweise entspricht auch dem Prinzip von Mach, daß die Massenverteilung die Geometrie bestimmt.

(ii) Die Feldgleichungen erlauben aber auch, bei gegebenem metrischen Tensor g_{ab}, den Energie–Impulstensor zu bestimmen. Dies ist kein sehr guter Weg, da zumeist die gefundenen Tensoren unphysikalisch sind. (Die Energie wird sehr häufig in bestimmten Bereichen negativ.)

(iii) Die Feldgleichungen sind zehn Gleichungen, welche zwanzig Größen miteinander verknüpfen. (Die ursprünglich sechzehn Unbekannten des Ricci–Tensors haben sich aufgrund der inneren Symmetrien auf zehn Unbekannte reduziert.) Aus diesem Gesichtspunkt stellen die Feldgleichungen Einschränkungen für die gleichzeitige Wahl von g_{ab} und T_{ab} dar. Dies ist dann hilfreich, wenn man die Geometrie und den Energie–Impulstensor teilweise aus physikalischen Überlegungen bestimmen kann. Die Feldgleichungen können dann zur vollständigen Bestimmung herangezogen werden.

Betrachten wir nun den einfachsten Fall: die Lösung von

$$G_{ab} = 0.$$

Somit haben wir zehn Gleichungen für die zehn unbekannten g_{ab}. Aufgrund der Bianchi–Identität (3.86)

$$\nabla_b G^{ab} = 0$$

sind diese zehn Gleichungen aber nicht unabhängig. Wir haben vier Differentialeinschränkungen und somit ein – scheinbar? – unterbestimmtes System. Wir können aber eine vollständige Bestimmbarkeit auch gar nicht verlangen, da wir stets vier Freiheitsgrade aufgrund der Koordinatentransformation

$$x^a \to x'^a = x'^a(x), \qquad a = 0, 1, 2, 3$$

haben. Diese Freiheitsgrade können dazu benützt werden, die g_{ab} vier Bedingungen zu unterwerfen: man führt *Gaußsche– oder Normalkoordinaten* über

$$g_{00} = 1; \quad g_{0\alpha} = 0; \quad \alpha = 1, 2, 3$$

ein, und bestimmt die verbleibenden sechs unbekannten $g_{\alpha\beta}$ aus den Feldgleichungen.

Die Feldgleichungen selbst sind von unangenehmer Struktur, da sie nicht linear sind. Es gibt daher kein Überlagerungsprinzip, welches es erlauben würde aus zwei bekannten Lösungen eine dritte zu konstrieren. Man kann also komplexere physikalische Probleme nicht dadurch vereinfachen, daß man sie in Einzelprobleme aufspaltet. Dies führt dazu, daß das Gravitationsfeld mit sich selbst gekoppelt ist. (Dies folgt daraus, daß das Gravitationsfeld, welches von einer Quelle generiert wird, Energie enthält und damit wiederum Masse.)

Einstein selbst war in Bezug auf die allgemeinen Feldgleichungen eher skeptisch und hat die Vakuum–Feldgleichungen als die fundamentalen Gleichungen angesehen. Selbst diese Gleichungen scheinen aber ein Grundprinzip von Mach

"Ohne Masse keine Metrik"

zu verletzen, da sie den Minkovski–Raum der speziellen Relativitätstheorie als Lösung zulassen. Dies bedeutet, daß ein Testkörper in einem ansonst leeren Raum Trägheitseigenschaften hat, obwohl nirgends Materie ist, welche als Quelle der Trägheit dienen könnte.

Nun hat ein System von partiellen Differentialgleichungen eine große Zahl von Lösungen, und man muß Randbedingungen einführen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen zu finden. Eine Möglichkeit besteht darin, daß die Raumzeit im räumlich Unendlichen *asymtotisch eben* angenommen wird. (Der Riemanntensor verschwindet also im räumlich Unendlichen.) Diese Randbedingung erzeugt aber nicht einen ebenen Raum als Lösung der Vakuumgleichungen!

Einstein hat einen anderen Zugang gesucht: *Kosmologie*, also das Modellieren des Universums. Dabei wird oft vorgeschlagen, daß das Universum *statisch* ist, also keinen Veränderungen im Großen unterworfen ist, und daß es *homogen* ist, also gleichförmig mit Masse erfüllt ist. Über die räumliche Ausdehnung gibt es auch zwei Vorstellungen: (i) es ist *offen* (unendlich); es erstreckt sich in den räumlichen Ausdehnungen ins Unendliche; (ii) es ist *abgeschlossen* (kompakt, endlich); es ist also in seinen räumlichen Abmessungen begrenzt.

Einstein hat versucht ein einfaches Modell des Universums in die Theorie einzubauen, um dieses Modell dazu zu verwenden, Randbedingungen zu formulieren. Insbesonders hat er abgeschlossene Lösungen der Feldgleichungen gesucht, welche einem Universum mit gleichförmiger Materieverteilung entspricht. Er sah sich dabei gezwungen, die entsprechenden Feldgleichungen wie folgt zu modifizieren:

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi\, T_{ab}.$$

Λ ist dabei die *kosmologische Konstante.* Da $\bigtriangledown_b g_{ab} = 0$ ist, so ist $\bigtriangledown_b T^{ab} = 0$ hierdurch immer noch erfüllt.

Diese Gleichungen entsprechen schon eher Machs Vorstellungen, da sie nie einen ebenen Raum als Lösung zulassen. Es hat sich aber gezeigt, daß das Universum nicht statisch ist, sondern Veränderungen auf großer Skala unterworfen ist. Die statische Lösung ist somit zu verwerfen! Einstein hat dann auch später den Kosmologie–Term verworfen; er wird aber nach wie vor in unterschiedlichsten Kosmologie Modellen verwendet. Man setzt aber $\Lambda = 0$, wenn immer Phänomene erdgebundener Art, oder innerhalb des Sonnensystems zu untersuchen sind.

Abschließend soll noch darauf hingewiesen werden, daß in der allgemeinen Relativitätstheorie die zwei Forderungen

(a) Freie Teilchen bewegen sich auf zeitähnlichen geodätischen Linien,

(b) Lichtstrahlen bewegen sich entlang einer Nullgeodätischen,

automatisch erfüllt sind. Wir betrachten dazu die Bewegung eines Testteilchens, oder eines Photons im Gravitationsfeld; dabei sind diese Teilchen selbst wiederum Teil des Energie–Impulstensors. Dieser ist der Quellterm der Feldgleichungen und definiert die Raumzeit und damit auch die geodätischen Linien. Somit muß die Bewegung des Testteilchens in den Feldgleichungen enthalten sein – und sie sind auch in den Bianchi–Identitäten enthalten, welche ja

$$\bigtriangledown_b T^{ab} = 0,$$

also die Erhaltungsgleichungen fordern.

Die Untersuchungen hierzu sind sehr komplex und umfangreich und haben die eingangs gemachten Überlegungen voll bestätigt. Man kann aber relativ einfach für eine Staubverteilung auf das gesuchte Ergebnis stoßen. Für eine solche schreiben wir:

$$T^{ab} = \rho_0\, u^a\, u^b$$

und

$$\bigtriangledown_b T^{ab} = \bigtriangledown_b \left[\rho_0\, u^a\, u^b\right] = 0$$

oder

$$\begin{aligned} u^a \bigtriangledown_b \left(\rho_0\, u^b\right) + \rho_0\, u^b \bigtriangledown_b u^a &= 0 \quad \mid \times\ u_a \\ u_a u^a \bigtriangledown_b \left(\rho_0\, u^b\right) + \rho_0\, u_a u^b \bigtriangledown_b u^a &= 0 \\ u_a u^a = 1; \qquad u_a \bigtriangledown_b u^a &= 0 \end{aligned}$$

ergo

$$\nabla_b \left(\rho_0 \, u^b\right) = 0.$$

Somit verbleibt von oben noch

$$\rho_0 \, u^b \, \nabla_b \, u^a = 0,$$

oder, da $\rho_0 \neq 0$ ist:

$$u^b \, \nabla_b \, u^a = 0.$$

Dies ist aber die Bedingung dafür, daß u^a eine Tangente an die geodätische Linie ist. u^a beschreibt somit das Geschwindigkeitsfeld von Massepartikeln, welche sich auf geodätischen Linien bewegen. Also: die Erhaltungssätze bedingen die geodätische Bewegung von Massepartikeln.

4.9.2 Das Cauchysche Anfangswertproblem

Wir untersuchen folgendes Problem: es sei der metrische Tensor g_{ab} und seine

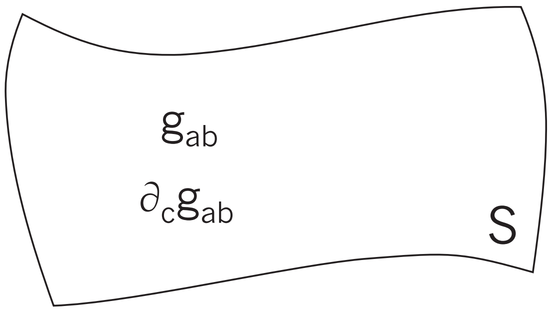


Abbildung 4.8: Das Cauchysche Anfangswertproblem.

Ableitungen zu einer Zeit x^0 gegeben; es ist dann die Metrik zu konstruieren, welche der Vakuum–Raumzeit in aller Zukunft entspricht. Dieses Problem entspricht der kausalen Entwicklung des physikalischen Systems aus seinen Anfangswerten und stellt somit ein fundamentales Problem der Theorie partieller Differentialgleichungen dar. *Cauchysches Problem, Anfangswertproblem.*

Wir beginnen mit einer dreidimensionalen, raumähnlichen Hyperfläche S in der Mannigfaltigkeit, welche – ohne Einschränkung der Allgemeinheit – für $x^0 = 0$ gegeben sei (Abb. 4.8). Wir spezifizieren g_{ab} und die ersten Ableitungen $\partial_c g_{ab}$ auf S. Kennen wir aber g_{ab} überall auf S, dann kennen wir natürlich auch die Raumableitungen $\partial_\alpha g_{ab}$ überall auf S. Wir müssen daher als Anfangswerte auf S nur noch die Zeitableitungen $\partial_0 g_{ab}$ angeben.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Vakuumfeldgleichungen in der Form $R_{ab} = 0$ zu verwenden, um sie für die zweiten Ableitungen $\partial_0\partial_0 g_{ab}$ zu lösen. Nehmen wir nun weiter an, daß Gleichungen gefunden wurden, die $\partial_0\partial_0 g_{ab}$

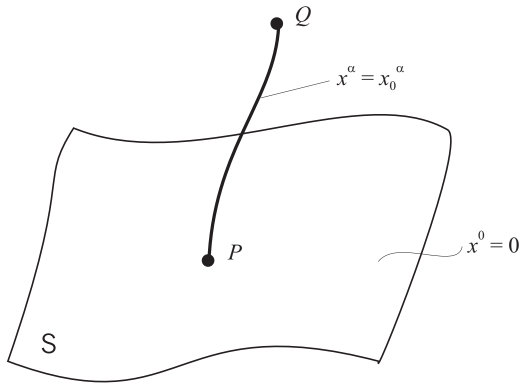


Abbildung 4.9: Fortsetzung entlang der x_0–Kurve.

bestimmen, dann kann man durch weiteres Differenzieren dieser Gleichungen nach der Zeit alle höheren Zeitableitungen von g_{ab} finden. Nehmen wir nun an, daß g_{ab} eine *analytische Funktion* von x^0 ist, dann kann man nach Potenzen von x^0 entwickeln, oder, sind P und Q die Punkte $(0, x_0^\alpha)$ und (x^0, x_0^α), derart, daß Q auf der x_0–Kurve liegt, die durch P geht (Abb. 4.9), so folgt aus dem Taylor Theorem:

$$g_{ab}(Q) = g_{ab}(P) + \partial_0 g_{ab}(P) x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_0^n g_{ab}(P) \left(x^0\right)^n .$$

Man kann dann die Feldgleichungen, wegen (4.24), wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_0 \partial_0 g_{\alpha\beta} + M_{00} = 0 && \text{1 Gleichung} \\ R_{0\alpha} &= \frac{1}{2} g^{0\beta} \partial_0 \partial_0 g_{\alpha\beta} + M_{0\alpha} = 0 && \text{3 Gleichungen} \\ R_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \partial_0 g_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} = 0 && \text{6 Gleichungen} \end{aligned}$$

wobei die in M enthaltenen Terme ausschließlich durch die Anfangswerte in S bestimmt werden. Dadurch entstehen die folgenden Probleme:

1. Obiges Gleichungssystem enthält nicht $\partial_0 \partial_0 g_{0\alpha}$ und damit ist das System *unterbestimmt.*

2. Obiges Gleichungssystem besteht aus 10 Gleichungen für sechs Unbekanne $\partial_0 \partial_0 g_{\alpha\beta}$; damit haben wir eine *Überbestimmung.* Es müssen somit Kompatibilitätsbedingungen für die Anfangswerte bestehen.

Wir sind bereits früher Problem 1 begegnet und haben darauf hingewiesen, daß es auf die vier Freiheitsgrade in den Koordinatentransformationen zurückzuführen ist. Diese Freiheitsgrade sollen nun dazu verwendet werden, eine Koordinatentransformation auszuführen, welche g_{ab} und $\partial_0 g_{ab}$ auf S unverändert lassen, welche aber

$$\partial_0\partial_0 g_{0a} = 0 \quad \in \ S$$

bedingen.

Die Transformation

$$x^a \to x'^a = x^a + \frac{1}{6}\left(x^0\right)^3 C^a(x)$$

bildet die Hyperfläche $x^0 = 0$ auf $x'^0 = 0$ ab

$$\begin{aligned} x^0 &\to x'^0 = x^0 = 0 \\ x^\alpha &\to x'^\alpha = x^\alpha. \end{aligned}$$

Weiters gilt auf S:

$$\begin{aligned} \partial_b x'^a &= \partial_b\left[x^a + \frac{1}{6}\left(x^0\right)^3 C^a(x)\right] = \delta^a{}_b \\ \partial_c\partial_b x'^a &= \partial_c \delta^a{}_b = 0 \\ \partial_0 x'^a &= \partial_0 x^a + \frac{1}{6}3\left(x^0\right)^2 C^a(x) \\ \partial_0\partial_0\left(\partial_0 x'^a\right) &= C^a(x) \\ \partial_0\partial_0\left(\partial_\alpha x'^a\right) &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt weiters das Transformationsgesetz

$$g_{ab} = g'_{cd}\partial_a x'^c \partial_b x'^d.$$

Somit gilt auf S:

$$\begin{aligned} g_{ab} &= g'_{ab}\delta^c{}_a\delta^d{}_b = g'_{ab} \\ \partial_c g_{ab} &= \partial_c g'_{ab} \\ \partial_\alpha\partial_a g_{ab} &= \partial_\alpha\partial_a g'_{ab} \\ \partial_0\partial_0 g_{00} &= \partial_0\partial_0 g'_{00} + 2g'_{0a}C^a = \partial_0\partial_0 g'_{00} + 2g_{0a}C^a \\ \partial_0\partial_0 g_{0\alpha} &= \partial_0\partial_0 g'_{0\alpha} + g'_{\alpha a}C^a = \partial_0\partial_0 g'_{0\alpha} + g_{\alpha a}C^a \\ \partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} &= \partial_0\partial_0 g'_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Unsere Forderung $\partial_0\partial_0 g_{0a} = 0$ erlaubt nun C^a zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \partial_0\partial_0 g_{00} &= 2g_{0a}C^a \\ \partial_0\partial_0 g_{0\alpha} &= g_{\alpha a}C^a, \end{aligned}$$

was stets eine Lösung erlaubt, da $\det(g_{ab}) \neq 0$ ist. Man kann also diese Gleichungen als Gleichungen für vier Unbekannte ansehen, und das Ergebnis $\partial_0\partial_0 g_{00} = 0$ folgt unmittelbar. Man bezeichnet diese Gleichung auch als *Normierungsbedingung* und diese behebt das Problem 1.

Zu Problem 2: solange $g^{00} \neq 0$ ist, bestimmt

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} = 0$$

die sechs Unbekannten $\partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta}$. Wir bezeichnen diese Gleichungen als die *Entwicklungsgleichungen, dynamischen Gleichungen,* oder *Hauptgleichungen.* Die verbleibenden Gleichungen

$$R_{00} = R_{0\alpha} = 0$$

sind dann *Einschränkungen* für die Anfangsdaten. Wir untersuchen weiter:

$$\begin{array}{rcl} g^{00} R_{00} & = & -\frac{1}{2} g^{00} g^{\alpha\beta} \partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} + g^{00} M_{00} = 0 \\ -g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} & = & \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{00} \partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = 0 \end{array}$$

$$g^{00} R_{00} - g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{00} M_{00} - g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = 0$$

und noch

$$\begin{array}{rcl} g^{00} R_{0\alpha} & = & -\frac{1}{2} g^{00} g^{0\beta} \partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} + g^{00} M_{0\alpha} = 0 \\ -g^{0\beta} R_{\alpha\beta} & = & \frac{1}{2} g^{0\beta} g^{00} \partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} - g^{0\beta} M_{\alpha\beta} = 0 \end{array}$$

$$g^{00} R_{0\alpha} - g^{0\beta} R_{\alpha\beta} = g^{00} M_{0\alpha} - g^{0\beta} M_{\alpha\beta} = 0$$

Ist nun $R_{\alpha\beta} = 0$ erfüllt, so sieht man, daß diese zwei Gleichungen tatsächlich nur die Anfangsdaten betreffen. Es ist nun leicht zu zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} {G_0}^0 & = & \frac{1}{2} \left(g^{00} M_{00} - g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right) = 0 \\ {G_\alpha}^0 & = & \frac{1}{2} \left(g^{00} M_{0\alpha} - g^{0\beta} M_{\alpha\beta} \right) = 0 \end{array}$$

gilt, und wir schreiben die Feldgleichungen in *Normalform*

$$R_{\alpha\beta} = 0; \qquad {G_a}^0 = 0$$

Somit ist auch Problem 2 behoben.

Diese Ausführungen resultieren im Theorem:

Theorem 4.2 *Ist die Einschränkung* $G_a{}^0\Big|_S = 0$ *erfüllt, dann ist sie für alle Zeiten erfüllt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den verjüngten Bianchi Identitäten und muß daher nicht gesondert geführt werden.

Wir können nun folgendes Lösungsverfahren angeben:

1. Es sind die Anfangswerte g_{ab} und $\partial_0 g_{ab}$ auf S gegeben, welche der Einschränkung $G_a{}^0\Big|_S = 0$ unterworfen werden.

2. Wir schreiben dann vier Komponenten g_{0a} in recht beliebiger Weise in Raum und Zeit an, wobei aber die Forderung besteht, daß sie den Anfangswerten auf S entsprechen, und der Normierungsbedingung $\partial_0\partial_0 g_{0a}|_S = 0$ gehorchen.

3. Ist dann $g^{00} \neq 0$ finden wir, daß die Entwicklungsgleichungen

   $$\partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta} = \frac{2}{g^{00}} M_{\alpha\beta}$$

   die $\partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta}$ auf S bestimmen.

4. Wir differenzieren diese Gleichung wiederholt und wir können alle höheren Zeitableitungen von $g_{\alpha\beta}$ auf S finden; damit können wir $g_{\alpha\beta}$ in eine Taylorreihe entwickeln. Dies bestimmt $g_{\alpha\beta}$ überall und für alle Zeiten. Damit wurde zusammen mit den gewählten g_{0a} die Vakuummetrik bestimmt.

Dieses Verfahren beruht, um es nochmals zu betonen, auf der Annahme, daß die Lösung der Feldgleichungen in x^0 analytisch ist. Einsteins Gleichungen sind aber hyperbolisch und verlangen daher nicht die Analytizität der Lösungen. Die Fragen der Existenz, der Eindeutigkeit und der Stabilität, zusammen mit der Frage, in welchem Ausmaß überhaupt Lösungen der Einsteinschen Gleichungen gefunden werden, sind nach wie vor ein wichtiges Thema der physikalischen Grundlagenforschung.