Kapitel 5

Die Schwartzschild Lösung

Wie bereits besprochen, sind die Vakuum–Feldgleichungen nicht linear und Lösungen sind daher schwer aufzufinden. Unterwirft man aber das Linienelement bestimmten Symmetriebedingungen, welche aus physikalischen Argumenten hervorgehen, können die Feldgleichungen weitgehend vereinfacht werden. Solche Fälle sind das zeitunabhängige und das sphärisch symmetrische Linienelement; die zugehörigen Feldgleichungen wurden bereits 1916 von Schwartzschild exakt gelöst. Die Lösung ist von besonderer Bedeutung, da sie dem grundsätzlichen Einkörperproblem der klassischen Astronomie entspricht.

5.1 Berechnung des ds^2 für eine Punktmasse

Wir beschränken uns dabei auf das Problem der schwachen Abweichung von der euklidischen Metrik. Wir schreiben also für den Ricci–Tensor:

$$
\begin{aligned}
R_{ab} &= (3.81) = R_{acb}{}^{c} = (3.66) \\
&= \partial_a \Gamma^c_{cb} - \partial_c \Gamma^c_{ab} - \underbrace{\Gamma^p_{ab}\Gamma^c_{cp} + \Gamma^p_{cb}\Gamma^c_{ap}}_{\text{klein von zweiter Ordnung}} \\
&\approx \partial_a \Gamma^c_{cb} - \partial_c \Gamma^c_{ab} \\
&\overset{(3.37)}{=} \partial_a \left[\frac{1}{2} g^{cd} \left(\partial_c g_{db} + \partial_b g_{dc} - \partial_d g_{cb}\right)\right] - \partial_c \left[\frac{1}{2} g^{cd} \left(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}\right)\right] \\
&= \partial_a \frac{1}{2} \left(\partial^d g_{cb} + \partial_b g_{cc} - \partial^c g_{db}\right) - \partial_c \frac{1}{2} \left(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial^c g_{ab}\right).
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun nach passender Wahl des Koordinatensystems alle $g_{ab}|_{a\neq b} = 0$, was ja stets möglich ist. Es folgt somit für $a \neq b$:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{1}{2}\partial_a\partial_b g_{cc} - \frac{1}{2}\partial_c\left(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \underbrace{\partial_c g_{ab}}_{=0;a\neq b!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_a\partial_b g_{cc} - \frac{1}{2}\partial_b\partial_a g_{bb} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b g_{aa}. \end{aligned}$$

Somit folgt für das Vakuumfeld wegen $R_{ab} = 0$:

$$\partial_a\partial_b\left(g_{00} + g_{11} + g_{22} + g_{33}\right) - \partial_a\partial_b g_{bb} - \partial_a\partial_b g_{aa} = 0$$

oder

$$\partial_a\partial_b\left(g_{00} + g_{11} + g_{22} + g_{33} - g_{aa} - g_{bb}\right) = 0.$$

Für $a, b = 1, 2, 3$ finden wir daraus:

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad b = 2 \qquad && \partial_1\partial_2\left(g_{00} + g_{33}\right) = 0 \\ a &= 1, \quad b = 3 && \partial_1\partial_3\left(g_{00} + g_{22}\right) = 0 \\ a &= 2, \quad b = 3 && \partial_2\partial_3\left(g_{00} + g_{11}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wir machen nun den Ansatz

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 - \varepsilon_{00}, \quad g_{00} = 1 + \varepsilon_{00},$$

was offensichtlich (5.1) befriedigt. Aus (4.43) und (4.45) wissen wir, daß

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{1}{2}\kappa^0\rho$$

gilt. Weiters folgt

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{\kappa^0}{4\pi}\int\limits_{V_\infty} \mathrm{d}^3x\frac{\rho}{r} = 1 - \frac{\kappa^0}{4\pi}\frac{M}{r} \\ &= 1 - \frac{2\kappa_0}{c^2}\frac{M}{r} = 1 + \varepsilon_{00}. \end{aligned}$$

Dabei ist M die konzentrierte Punktmasse und κ_0 die Gravitationskonstante. Wir führen das Potential der Gravitationskraft

$$\phi = -\frac{\kappa_0 M}{r}$$

ein, und finden damit

$$\varepsilon_{00} = \frac{2}{c^2}\phi, \tag{5.2}$$

womit die Metrik vollständig bestimmt ist. Es folgt dann für das Wegelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{ii}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i \\ &= (1+\varepsilon_{00})\,\mathrm{d}x_0{}^2 + (1-\varepsilon_{00})\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i{}^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

was eindeutig keine euklidische Metrik mehr ist. Man hat also einem Newtonschen Gravitationsfeld, welches durch ein klassisches Gradientenpotential beschrieben wird, ein Einsteinsches metrisches Feld zugeordnet, welches die Gravitation enthält, da ε_{00} vom Gravitationspotential bestimmt ist.

5.2 Elementare Ableitung der Schwartzschildlösung

Das Schwartzschild–Problem untersucht die Bewegung eines Testpartikels der Masse m_g, welches sich im Gravitationsfeld der zentralen Punktmasse M

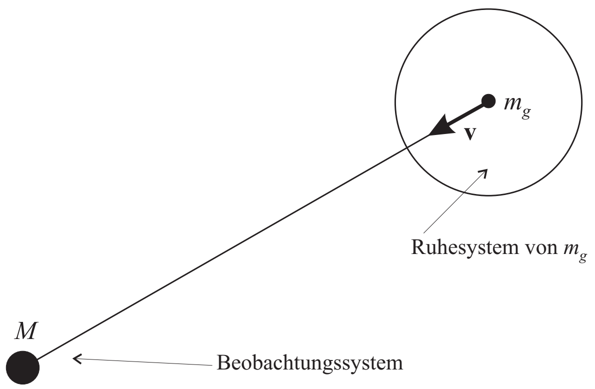

Abbildung 5.1: Geometrie des Schwartzschild–Problemes.

bewegt (Abb. 5.1). Zur elementaren Ableitung benötigt man den Energiesatz und die Transformationsgesetze der speziellen Relativitätstheorie.

Der Energiesatz für die Bewegung eines Massepunktes m im Gravitationsfeld einer Punktmasse M lautet:

$$m_g c^2 - \frac{\kappa_0 m_g M}{r} = m_g^{(0)} c^2.$$

m_g ist dabei die Masse des Probekörpers, und $m_g^{(0)}$ seine Ruhemasse. Die Masse m_g wird von M angezogen und somit besteht $m_g c^2$ aus der Ruheenergie plus der kinetischen Energie, also:

$$m_g^{(0)} c^2 + \frac{m_g^{(0)} v^2}{2} - \frac{\kappa_0 m_g M}{r} = m_g^{(0)} c^2$$

oder

$$m_g^{(0)}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = m_g^{(0)}\beta^2 = \frac{2\kappa_0 m_g M}{c^2 r}.$$

Ist nun

$$m_g = \frac{m_g^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx m_g^{(0)}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right),$$

so folgt

$$m_g^{(0)}\beta^2 = \frac{2\kappa_0 M}{c^2 r} m_g^{(0)}\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}\beta^2}_{\approx 0}\right)$$

und damit

$$\beta^2 = \frac{2\kappa_0 M}{c^2 r} = \frac{2m}{r}.$$

Es werden dann an einem aus dem Unendlichen einfallenden Massepunkt im Beobachtungssystem folgende Effekte zu beobachten sein:

(i) Eine Längskontraktion:

$$\frac{\mathrm{d}r^{\text{Beobachter}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathrm{d}r.$$

(ii) Eine Zeitdilatation:

$$\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t^{\text{Beobachter}} = \mathrm{d}t.$$

Im frei fallenden System besteht eine euklidische Metrik, also gilt für das Wegelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t - \mathrm{d}x_1{}^2 - \mathrm{d}x_2{}^2 - \mathrm{d}x_3{}^2 \\
&= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2 - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt im Beobachtungssystem:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^{2\,\text{Beobachter}} &= \mathrm{d}s^2 \\
&= c^2\left(1-\beta^2\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\beta^2} - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2\right)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{5.4}$$

Dies ist die Schwartzschildlösung in ihrer *ersten Form.*

5.3 Killing Vektorfelder

In der allgemeinen Relativitätstheorie versucht man, sich von zufälligen Eigenschaften der Koordinatensysteme zu befreien, und studiert daher in natürlicher Weise Tensoren. Viele Probleme haben aber eine innere Symmetrie, welche man in beliebigen Koordinatensystemen nur sehr schwer erkennen kann. So besitzt das Gravitationsfeld eines stationären sphärischen Körpers eine intrinsische Symmetrie; dies ist in sphärischen Koordinaten unmittelbar einsichtig, aber in einem anderen Koordinatensystem wahrscheinlich nicht transparent.

Wir betrachten nun den metrischen Tensor $g_{ab}(x^c)$, welcher eine einparametrige Gruppe von kontinuierlichen Transformationen

$$\bar{x}^m = \varphi^m(x^c; \lambda)$$

zuläßt, wobei λ der Parameter der Gruppe ist. Unter all diesen Veränderungen soll die Metrik erhalten bleiben. Die Metrik hat dann eine *verborgene* Symmetrie. Die Transformation kann etwa durch die Drehgruppe repräsentiert werden – mit einer festen Achse erhalten wir eine einparametrige Gruppe. Die x^c werden in der Literatur auch oft als *Marker* bezeichnet. Für jede Änderung der Marker folgt dann

$$\bar{g}_{mn}(\bar{x}^c)\partial_a \bar{x}^m \partial_b \bar{x}^n = g_{ab}(x^c)$$

für den metrischen Tensor. Wir fordern aber, daß die Metrik unverändert bleiben soll:

$$\bar{g}_{mn}(\bar{x}^k) = g_{mn}(x^c).$$

Die funktionale Abhängigkeit des Tensors g_{mn} von den Markern muß daher vor und nach der Transformation gleich sein. Damit gilt:

$$g_{mn}\left(\varphi^k(x^g; \lambda)\right) \partial_a \varphi^m \partial_b \varphi^n = g_{ab}(x^g).$$

Wir differenzieren nach λ, was natürlich erfordert, daß unsere kontinuierliche Gruppe von Transformationen differenzierbar ist, was wir aber annehmen wollen. Wir schreiben verkürzt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \dot{\varphi}$$

und definieren das Vektorfeld

$$\psi^m(x^c) = \dot{\varphi}^m(x^c; 0).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies tatsächlich ein Vektorfeld ist, da es die infinitesimale Verschiebung des Punktes x^c unter einer infinitesimalen Erhöhung des Parameters λ beschreibt, und somit von intrinsisch geometrischer Bedeutung ist. Somit erhalten wir für die Differentiation nach λ und $\lambda = 0$:

$$\partial_k g_{mn}(\varphi^r)\psi^k \partial_a \varphi^m \partial_b \varphi^n + g_{mn}(\varphi^r)\partial_a \psi^m \partial_b \varphi^n + g_{mn}(\varphi^r)\partial_a \varphi^m \partial_b \psi^n = 0.$$

λ sei so gewählt, dass $\lambda = 0$ der Identitätsoperation

$$x^m = \varphi^m(x^c; 0)$$

entspricht. Durch Differenzieren finden wir für $\lambda = 0$

$$\delta^m{}_c = \partial_c \varphi^m(x^c; 0)$$

und damit folgt für oben:

$$\partial_k g_{ab}\psi^k + g_{mb}\partial_a \psi^m + g_{an}\partial_b \psi^n = 0. \tag{5.5}$$

Eine vorhandene verborgene Symmetrie des metrischen Tensors führt also dazu, daß wir ein Vektorfeld ψ^m einführen können, welches das Differentialgleichungssystem (5.5) befriedigt. Die Integrabilitätsbedingung für dieses System ist eine Differentialbeziehung für den metrischen Tensor, welche eine kovariante Formulierung der Symmetrie darstellt. Tatsächlich folgt aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, daß ein Feld von infinitesimalen Generatoren ψ^m die Existenz einer geschlossenen Gruppe $\varphi^m(x^g; \lambda)$ - wie gewünscht - garantiert.

Wir führen nun das kovariante Vektorfeld

$$\psi_s = g_{sm}\psi^m$$

ein und berechnen die kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned}
\nabla_r \psi_s &= \partial_r \psi_s - \Gamma^m_{sr}\psi_m \\
&= \partial_r \psi_s - \frac{1}{2}\left(\partial_r g_{sm} + \partial_s g_{rm} - \partial_m g_{sr}\right)\psi^m \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_r g_{sm} - \partial_m g_{sr} + \partial_s g_{mr}\right)\psi^m + g_{sm}\partial_r \psi^m
\end{aligned}$$

und dies führt zu

$$\nabla_r \psi_s + \nabla_s \psi_r = (\partial_m g_{sr})\psi^m + g_{sm}\partial_r \psi^m + g_{rm}\partial_s \psi^m,$$

und dieses Ergebnis resultiert [wegen (5.5)] in der Differentialgleichung:

$$\nabla_r \psi_s + \nabla_s \psi_r = 0. \tag{5.6}$$

Ein Vektorfeld, welches diese Gleichung befriedigt, wird *Killing Vektorfeld (Killing Vektor)* genannt. Es ist somit eine notwendige Bedingung dafür, daß unsere Metrik g_{mn} eine verborgene Symmetrie hat, die Existenz eines Killing Vektorfeldes $\psi_s(x^c)$, welches Lösung von (5.6) ist.

Die hier durchgeführte Untersuchung kann auf n–parametrige Transformationsgruppen erweitert werden.

Die wichtigste intrinsische physikalische Symmetrie ist die *Zeitunabhängigkeit.* Aus der hier durchgeführten Analyse ist zu ersehen, daß eine invariante Charakterisierung dieser Eigenschaft in der Existenz eines zeitartigen Killing Vektorfeldes besteht.

5.4 Strenge Lösung des Schwartzschild Problems

Wir suchen zeitunabhängige Lösungen der Vakuumfeldgleichungen. Es sind daher zunächst einige grundsätzliche Überlegungen anzustellen, um auf die zu fordernde Form des Linienelementes zu kommen.

5.4.1 Stationäre Lösungen

Es ist zunächst notwendig, zwischen statischer und stationärer Lösung zu unterscheiden: eine Lösung ist *stationär*, wenn sie zeitunabhängig ist, wenn also die Zeit nicht explizit auftritt. Hingegen verlangt die Forderung nach einer *statischen* Lösung, daß sie nicht evolutionär ist, daß die Lösung also in der Zeit symmetrisch ist in Bezug auf einen beliebigen Zeitursprung.

Eine Metrik wird nur dann stationär sein, wenn es ein spezielles Koordinatensystem gibt, in welchem der metrische Tensor offensichtlich zeitunabhängig ist:

$$\partial_0 g_{ab} = 0. \tag{5.7}$$

In einem beliebigen Koordinatensystem wird der metrische Tensor wahrscheinlich von allen Koordinaten explizit abhängen. Wir müssen also (5.7) koordinatenunabhängig machen. Wir definieren in unserem speziellen Koordinatensystem das Vektorfeld

$$\xi^a = \delta^a{}_0, \tag{5.8}$$

folgt für die Lie–Ableitung (4.6)

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_\xi\, g_{ab} &= \xi^c \partial_c g_{ab} + g_{ad} \partial_b \xi^d + g_{bd} \partial_a \xi^d \\ &= \delta^c{}_0 \partial_c g_{ab} = \partial_0 g_{ab} = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nun ist aber $\mathrm{L}_\xi\, g_{ab}$ ein Tensor, und wenn ein solcher in einem Koordinatensystem verschwindet, so verschwindet er in allen. Wir können somit ξ^a als zeitähnliches *Killing Vektorfeld* bezeichnen.

Umgekehrt: ist ein zeitähnliches Killing Vektorfeld gegeben, so gibt es immer ein Koordinatensystem, in welchem dieses die Form (5.8) hat, und dann folgt stets (5.9) und die Metrik ist stationär. Also gilt:

Theorem 5.1 *Die Raumzeit ist dann und nur dann stationär, wenn sie ein zeitähnliches Killing Vektorfeld zuläßt.*

5.4.2 Auf Hyperflächen orthogonale Vektorfelder

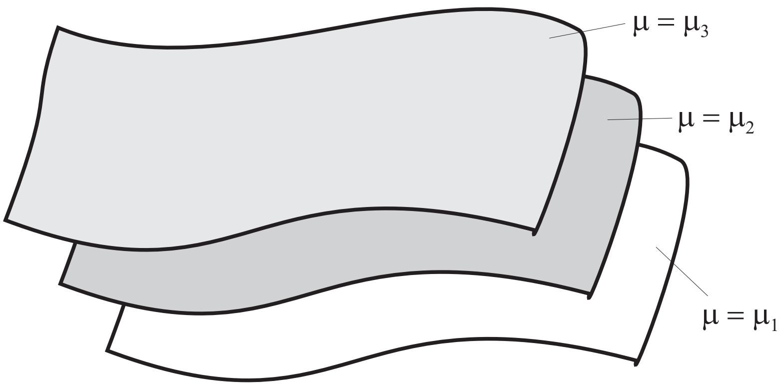

Abbildung 5.2: Eine Familie von Hyperflächen, welche mit μ indiziert sind.

Wir gehen von einer Familie von Hyperflächen (Abb. 5.2)

$$f(x^a) = \mu \tag{5.10}$$

aus, wobei die verschiedenen Mitglieder der Familie zu verschiedenen Werten von μ gehören. Wir betrachten nun zwei benachbarte Punkte P und Q mit den Koordinaten x^a und $x^a + \mathrm{d}x^a$, welche auf einer solchen Hyperfläche liegen. (Siehe Abb. 5.3.) Da beide Punkte in dieser liegen, gilt

$$\begin{aligned} f(x^a) &= \mu \qquad \text{Punkt } P \\ \mu &= f(x^a + \mathrm{d}x^a) \qquad \text{Punkt } Q \\ &= f(x^a) + \partial_a f|_P \mathrm{d}x^a|_P \quad \rightarrow \quad \partial_a f \mathrm{d}x^a = 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

im Punkt P. Wir definieren nun ein *kovariantes Vektorfeld* n_a durch

$$n_a = \partial_a f \tag{5.12}$$

und es folgt für (5.11):

$$n_a \mathrm{d}x^a = g_{ab} n^a \mathrm{d}x^a = 0$$

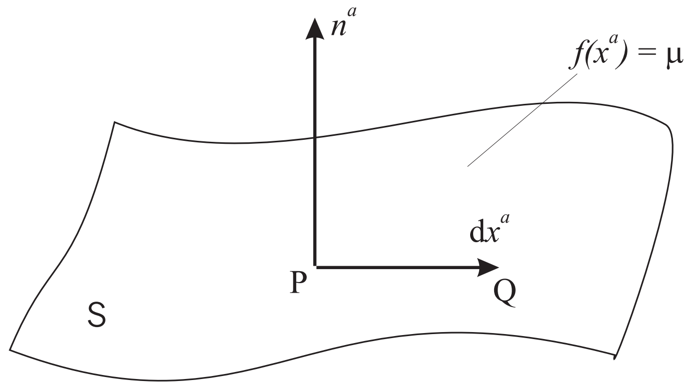

Abbildung 5.3: Das Normalen–Vektorfeld n^a im Punkte P.

im Punkte P. Dies zeigt, daß n^a orthogonal auf das infinitesimale Vektorfeld $\mathrm{d}x^a$ steht. Da $\mathrm{d}x^a$ nach Konstruktion in der Hyperfläche liegt, muß somit n^a ein Normalenvektorfeld der Hyperfläche bilden. Es ist dann ξ^a ein Vektorfeld normal zu Hyperflächen, wenn

$$\xi^a = \lambda(x) n^a = \lambda(x) \partial^a f \tag{5.13}$$

gilt. Wegen (5.13) und (5.12) können wir als Bedingung für ein Vektorfeld orthogonal zu Hyperflächen auch schreiben:

$$\xi_a = \lambda \partial_a f \tag{5.14}$$

und somit folgt:

$$\begin{aligned} \xi_a \partial_b \xi_c &= \lambda \partial_a f \partial_b (\lambda \partial_c f) \\ &= \lambda \partial_a f \partial_b \lambda \partial_c f + \lambda \partial_a f \lambda \partial_b \partial_c f. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Wir sehen, daß der erste Term in a und c symmetrisch ist, während der zweite in b und c symmetrisch ist. Wenn wir nun für

$$\frac{1}{6}\left(X_{abc} - X_{acb} + X_{cab} - X_{cba} + X_{bca} - X_{bac}\right) = X_{[abc]}$$

setzen, so sehen wir, daß sich für $\xi_{[a}\partial_b\xi_{c]}$ abwechselnd die Terme aufheben; es gilt also

$$\xi_{[a}\partial_b\xi_{c]} = 0, \tag{5.16}$$

und allgemeiner:

$$\xi_{[a} \bigtriangledown_b \xi_{c]} = 0. \tag{5.17}$$

Nun folgt aber aus (5.9) und aus $\bigtriangledown_c g_{ab} = 0$, und aus der Tatsache, daß man in der Lie–Ableitung die normale Ableitung stets durch die kovariante ersetzen kann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_\xi\, g_{ab} &= \xi^c \partial_c g_{ab} + g_{ad}\partial_b \xi^d + g_{bd}\partial_a \xi^d \\
&= \xi^c \underbrace{\nabla_c g_{ab}}_{=0} + g_{ad}\partial_b \xi^d + g_{bd}\partial_a \xi^d \\
&= \nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b = 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt, daß $\nabla_b \xi_a = -\nabla_a \xi_b$ ist, und damit reduziert sich (5.16) auf

$$\begin{aligned}
\xi_a \nabla_b \xi_c + \xi_c \nabla_a \xi_b + \xi_b \nabla_c \xi_a &= 0 \quad | \times \xi^c \\
\xi_a \xi^c \nabla_b \xi_c + \underbrace{\xi_c \xi^c}_{=\xi^2} \nabla_a \xi_b + \xi_b \xi^c \nabla_c \xi_a &= 0 \\
(\nabla_c \xi^a = -\nabla_a \xi^c) & \\
\xi_a \xi^c \nabla_b \xi_c + \xi^2 \nabla_a \xi_b - \xi_b \xi^c \nabla_a \xi_c &= 0 \\
\text{(Vertauschen der oberen und unteren Indizes } c) & \\
\xi_a \xi_c \nabla_b \xi^c - \xi^2 \nabla_b \xi_a - \xi_b \xi_c \nabla_a \xi^c &= 0 \\
\hline
\xi_a \left(\xi^c \nabla_b \xi_c + \xi_c \nabla_b \xi^c\right) + \xi^2 \left(\nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a\right) - & \\
\xi_b \left(\xi^c \nabla_a \xi_c + \xi_c \nabla_a \xi^c\right) &= 0 \\
\xi_a \nabla_b \xi^2 - \xi_b \nabla_a \xi^2 + \xi^2 \left(\nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Nun ist aber ξ^2 ein Skalarfeld, also $\nabla_b \xi^2 = \partial_b \xi^2$ und $\nabla_{[b}\xi_{a]} = \partial_{[b}\xi_{a]}$, also folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\xi_a \partial_b \xi^2 - \xi_b \partial_a \xi^2 + \xi^2 \left(\partial_a \xi_b - \partial_b \xi_a\right) &= 0 \\
\xi_a \partial_b \xi^2 - \xi_b \partial_a \xi^2 &= \xi^2 \partial_b \xi_a - \xi^2 \partial_a \xi_b \;\Big|\; \times \frac{1}{\xi^4}
\end{aligned}$$

$$\partial_a \left(\frac{\xi_b}{\xi^2}\right) = \partial_b \left(\frac{\xi_a}{\xi^2}\right), \tag{5.18}$$

da nach Voraussetzung ξ^a kein Nullvektor ist und damit auch $\xi^2 \neq 0$ ist. (5.18) fordert nun, daß der Term in den Klammern der Gradient eines beliebigen Skalarfeldes, etwa f, sein muß:

$$\frac{\xi_a}{\xi^2} = \partial_a f,$$

und wir finden schließlich die Bedingung für ein Vektorfeld, welches auf Hyperflächen orthonormal steht:

$$\xi_a = \xi^2 \partial_a f. \tag{5.19}$$

Dies entspricht der Hyperflächen–Orthonormalitätsbedingung für $\lambda = \xi^2$.

5.4.3 Statische Lösungen

Ist nun eine Lösung zeitunabhängig, so wird in unserem bestimmten Koordinatensystem die Metrik wohl zeitunabhängig sein, das Linienelement wird aber noch Terme proportional $\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^\alpha$ enthalten. Ist hingegen die Metrik statisch, so würde man erwarten, daß solche Terme nicht auftreten werden. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: wir betrachten das Intervall zwischen zwei Ereignissen (x^0, x^1, x^2, x^3) und $(x^0 + \mathrm{d}x^0, x^1 + \mathrm{d}x^1, x^2, x^3)$ in unserem speziellen Koordinatensystem. Es ist dann:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\left(\mathrm{d}x^0\right)^2 + 2g_{01}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1 + g_{11}\left(\mathrm{d}x^1\right)^2,$$

wobei wegen (5.7) die g_{ab} nur von x^α abhängen. Unter einer Zeitumkehrung

$$x^0 \to x'^0 = -x^0$$

bleiben somit die g_{ab} unverändert und

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\left(\mathrm{d}x^0\right)^2 - 2g_{01}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1 + g_{11}\left(\mathrm{d}x^1\right)^2.$$

Die Annahme einer statischen Lösung bedeutet aber, daß $\mathrm{d}s^2$ bei Zeitumkehr invariant bleibt und wir finden, daß hierfür g_{01} verschwinden muß. (Ebenso g_{02} und g_{03}!) Es treten somit keine Mischterme $\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^\alpha$ im Linienelement des speziellen Koordinatensystems auf.

Wir wollen nun (5.19) in einer solchen statischen Raumzeit untersuchen und verwenden ein Koordinatensystem, welches zu einem zeitähnlichen Killing–Vektorfeld $\xi^a = \delta^a_0$ gehört. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \xi_a &= g_{ab}\xi^b = g_{ab}\delta^b_0 = g_{0a} \\ \xi^2 &= \xi_a\xi^a = g_{0a}\delta^a_0 = g_{00}. \end{aligned}$$

Damit folgt für (5.19):

$$g_{0a} = g_{00}\partial_a f \tag{5.20}$$

für ein beliebiges Skalarfeld. Für $a = 0$ folgt:

$$g_{00} = g_{00}\partial_0 f \quad \to \quad \partial_0 f = 1$$

$$f = x^0 + h(x^\alpha), \tag{5.21}$$

wobei $h(x^\alpha)$ eine beliebige Funktion der Raumkoordinaten ist. Wir betrachten nun die Koordinatentransformation:

$$x^0 \to x'^0 = x^0 + h(x^\alpha); \qquad x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha.$$

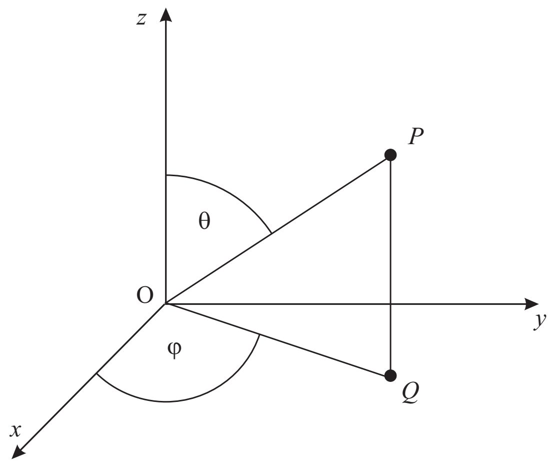

Abbildung 5.4: Standard sphärische Koordinaten.

Es folgt dann in diesen neuen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
\xi'^{a} &= \delta^{a}_{0} \\
\partial_0 g'_{ab} &= 0 \\
g'_{00} &= g_{00} \\
g'_{0\alpha} &= 0
\end{aligned}
$$

und wiederum gibt es keine Mischterme der Form $\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^\alpha$, und die Lösung ist somit statisch.

Theorem 5.2 *Die Raumzeit ist dann und nur dann statisch, wenn die auf Hyperflächen orthonormalen Vektorfelder zeitähnliche Killing–Vektorfelder sind.*

Weiters haben wir bereits folgende Eigenschaft zeigen können:

Theorem 5.3 *In der statischen Raumzeit existiert stets ein Koordinatensystem, welches zum zeitähnlichen Killing–Vektorfeld gehört, in welchem die Metrik von der Zeit unabhängig ist, und wo alle $g_{0\alpha} = 0$ sind.*

5.4.4 Lösungen sphärischer Symmetrie

Wir können nun auf der Basis der vorangegangenen Argumentation das Linienelement für die von uns gesuchten Lösungen aufsuchen, indem die der sphärischen Geometrie zugeordneten Killing–Vektorfelder aufgesucht werden. In unserem Fall ist aber ein intuitiver Zugang einfacher und schneller realisierbar.

Alle Punkte auf der zweidimensionalen Kugelfläche vom Radius a (Abb. 5.4) sind durch den Koordinatenbereich $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ gegeben und man findet für das Linienelement auf dieser Fläche:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2 \mathrm{d}\varphi^2\right).$$

Für vier Dimensionen können wir eine Koordinate t und eine radiusähnliche Koordinate r einführen; die Kugelfläche ist dann eine Hyperfläche für $t =$ konst und $r =$ konst. Aufgrund der sphärischen Geometrie ändert sich ds nicht, wenn sich φ und θ verändern. Es kann darüber hinaus auch kein Mischterm von dθ und dφ auftreten, da die Metrik unter den Spiegelungen

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta' = \pi - \theta \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = -\varphi \end{aligned}$$

invariant sein muß.

Wir gehen also vom Koordinatensystem

$$(x^a) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \varphi, \theta)$$

aus, in welchem das Linienelement die Form

$$\mathrm{d}s^2 = A\mathrm{d}t^2 - 2B\mathrm{d}r\mathrm{d}t - C\mathrm{d}r^2 - D\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{5.22}$$

hat, mit den Unbekannten

$$A = A(r,t), \quad B = B(r,t), \quad C = C(r,t), \quad D = D(r,t).$$

Wir führen nun die Koordinatentransformation

$$r \rightarrow r' = \sqrt{D(r,t)}$$

durch, und erhalten:

$$\mathrm{d}s^2 = A'(t,r')\mathrm{d}t^2 - 2B'(t,r')\mathrm{d}r'\mathrm{d}t - C'(t,r')\mathrm{d}r'^2 - r'^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{5.23}$$

Wir untersuchen nun das Differential

$$A'(t,r')\mathrm{d}t - B'(t,r')\mathrm{d}r'.$$

Nach der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man dies stets mit einem integrierenden Faktor $I = I(t,r')$ multiplizieren, welcher es in ein vollständiges Differential umwandelt. Dies benützen wir, um die neue Zeitkoordinate t' über die Bedingung

$$\mathrm{d}t' = I(t,r')\left\{A'(t,r')\mathrm{d}t - B'(t,r')\mathrm{d}r'\right\}$$

einzuführen. Wir erhalten das Quadrat

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t'^2 &= I^2\left(A'^2\mathrm{d}t^2 - 2A'B'\mathrm{d}t\mathrm{d}r' + B'^2\mathrm{d}r'^2\right) \\
&= I^2A'^2\mathrm{d}t^2 - 2I^2A'B'\mathrm{d}t\mathrm{d}r' + I^2B'^2\mathrm{d}r'^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^2A'^2\mathrm{d}t^2 - 2I^2A'B'\mathrm{d}t\mathrm{d}r' &= dt'^2 - I^2B'^2\mathrm{d}r'^2 \\
A'\mathrm{d}t^2 - 2B'\mathrm{d}t\mathrm{d}r' &= A'^{-1}I^{-2}\mathrm{d}t'^2 - A'^{-1}B'^2\mathrm{d}r'^2.
\end{aligned}$$

Wir setzen dies in (5.23) ein und erhalten:

$$\mathrm{d}s^2 = A'^{-1}I^{-2}\mathrm{d}t'^2 - \left(C' - A'^{-1}B'^2\right)\mathrm{d}r'^2 - r'^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).$$

Daraus folgt mit

$$\begin{aligned}
A'^{-1}I^{-2} &= e^\nu, \qquad \nu = \nu(r,t) \\
C' - A'^{-1}B'^2 &= e^\lambda, \qquad \lambda = \lambda(r,t)
\end{aligned}$$

für das Wegelement

$$\mathrm{d}s^2 = e^\nu\mathrm{d}t^2 - e^\lambda\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{5.24}$$

Die Definition als Exponentialfunktion stellt dabei sicher, daß die Vorfaktoren stets positiv sind, wodurch die Signatur der Metrik mit -2 unverändert bleibt.

Die Funktionen $\nu(r,t)$ und $\lambda(r,t)$ sollen dabei aus den Feldgleichungen (4.36) bestimmt werden, wobei aber bis auf $r = 0$ die Materiedichte gleich Null ist. Somit gilt:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0.$$

Da aber $R = 0$ ist, so bleibt nur mehr die Feldgleichung

$$R_{ab} = 0$$

aufzulösen.

Wir folgen nun einem Lösungsweg, welcher von P. Jordan vorgeschlagen wurde. Dazu schreiben wir für (5.24):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= e^\nu\mathrm{d}t^2 - e^\lambda\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \quad \in \mathbb{R}^n \\
&= B(r)c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\sigma^2 \\
&= \mathrm{d}\sigma^2 + f^2(\xi)\mathrm{d}x_0^2
\end{aligned} \tag{5.25}$$

mit

$$\mathrm{d}\sigma^2 = -\left\{e^\lambda\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin\theta^2\right)\right\} \quad \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{5.26}$$

dem Wegelement im $(n-1)$–dimensionalen Raum, welcher durch $\xi = r, \theta, \varphi$ aufgespannt wird. Für $\mathrm{d}\sigma^2$ schreiben wir weiter:

$$\mathrm{d}\sigma^2 = h_1^2(r)\mathrm{d}r^2 + h_0^2(r)\mathrm{d}\hat{\sigma}^2 \tag{5.27}$$

mit

$$\mathrm{d}\hat{\sigma}^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \qquad \in \mathbb{R}^{n-2}, \tag{5.28}$$

dem Wegelement im $(n-2)$–dimensionalen Raum. Wir verwenden nun anstelle des Symbols von $\mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{\mathbb{R}}$, und anstelle von $\mathbb{R}^{n-2}$, $\hat{\mathbb{R}}$, und bezeichnen damit analog Vektor– und Tensorkomponenten.

Es ist nun notwendig den Riemannschen Tensor in den jeweiligen Unterräumen anzuschreiben. Wir müssen also die Reduktionsformeln für $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$ ableiten.

Für den Krümmungstensor gilt (Seite 121):

$$R_{ab} = \partial_a \Gamma^c_{cb} - \partial_c \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{cp}\Gamma^p_{ab} + \Gamma^p_{cb}\Gamma^c_{ap}.$$

Im $\tilde{\mathbb{R}}$ haben wir das allgemeine Wegelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= \left(\mathrm{d}x^0\right)^2 + h^2(x^0)\mathrm{d}\hat{\sigma}^2, \\ \mathrm{d}\hat{\sigma}^2 &= \gamma_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \quad \mu,\nu = 1,\ldots,n, \quad n \in \hat{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Wir können daher die g_{ik} für den Gesamtraum $\tilde{\mathbb{R}}$ angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= \tilde{g}^{00} = 1 \\ \tilde{g}_{\mu\nu} &= h^2\gamma_{\mu\nu} \\ \tilde{g}_{\mu 0} &= \tilde{g}^{\mu 0} = 0, \qquad \text{da '0' in } \hat{\mathbb{R}} \text{ nicht auftritt} \\ \partial_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu} &= h^2 \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu} \\ \partial_0 \tilde{g}_{\mu\nu} &= 2hh'\gamma_{\mu\nu}, \quad h' = \partial_0 h \\ \tilde{g}^{\mu\nu} &= \frac{1}{h^2}\gamma^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Nunmehr können auch die Drei–Indizessymbole bestimmt werden:

$$\tilde{\Gamma}^m_{jr} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{mk}\left(\partial_r \tilde{g}_{kj} + \partial_j \tilde{g}_{kr} - \partial_k \tilde{g}_{jr}\right).$$

So finden wir etwa:

$$\tilde{\Gamma}^0_{00} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{0h}\left(\partial_0 \tilde{g}_{h0} + \partial_0 \tilde{g}_{h0} - \partial_h \tilde{g}_{00}\right) = 0 \tag{5.30}$$

wegen $\tilde{g}_{00} = 1$ und $\tilde{g}_{\mu 0} = 0$. Man findet sogar noch allgemeiner, daß alle Drei–Indizessymbole mit zwei Nullen verschwinden:

$$\tilde{\Gamma}^0_{00} = \tilde{\Gamma}^\mu_{00} = \tilde{\Gamma}^0_{\mu 0} = \tilde{\Gamma}^0_{0\mu} = 0. \tag{5.31}$$

Es folgt weiters:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{0h}\left(\partial_\nu \tilde{g}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{g}_{h\nu} - \partial_h \tilde{g}_{\mu\nu}\right) \\
& \Big[\tilde{g}^{0h}\partial_\nu \tilde{g}_{h\mu} = \tilde{g}^{00}\partial_\nu \underbrace{\tilde{g}_{0\mu}}_{=0} + \underbrace{\tilde{g}^{0\nu}}_{=0}\partial_\nu \tilde{g}_{\mu\nu} = 0 \\
& \quad \tilde{g}^{0h}\partial_\mu \tilde{g}_{h\nu} = \tilde{g}^{00}\partial_\mu \tilde{g}_{0\nu} + \tilde{g}^{0\xi}\partial_\mu \tilde{g}_{\xi\nu} = 0 \\
& \quad \tilde{g}^{0h}\partial_h \tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}^{00}\partial_0 \tilde{g}_{\mu\nu} + \tilde{g}^{0\xi}\partial_0 \tilde{g}_{\mu\nu} = 2hh'\gamma_{\mu\nu}\Big] \\
&= -hh'\gamma_{\nu\mu} \qquad (5.32) \\
\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu 0} &= \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda h}}_{=\frac{1}{2h^2}\gamma^{\lambda h}}\left(\underbrace{\partial_0 \tilde{g}_{h\mu}}_{=\partial_0 h^2\gamma_{h\mu}} + \underbrace{\partial_\mu \tilde{g}_{h0}}_{=0} - \underbrace{\partial_h \tilde{g}_{\mu 0}}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{2h^2}2hh'\gamma^{\lambda h}\gamma_{h\mu} \\
&= \frac{h'}{h}\delta^\lambda{}_\mu, \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

und schließlich:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda h}\left(\partial_\nu \tilde{g}_{h\mu} + \partial_\mu \tilde{g}_{h\nu} - \partial_h \tilde{g}_{\mu\nu}\right) \\
& \Big\{\tilde{g}^{\lambda h}\partial_\nu \tilde{g}_{h\mu} = \tilde{g}^{\lambda 0}\partial_\nu \underbrace{\tilde{g}_{0\mu}}_{=0} + \tilde{g}^{\lambda\xi}\partial_\nu \tilde{g}_{\xi\mu} \\
& \quad \tilde{g}^{\lambda h}\partial_\mu \tilde{g}_{h\nu} = \tilde{g}^{\lambda 0}\partial_\mu \underbrace{\tilde{g}_{0\nu}}_{=0} + \tilde{g}^{\lambda\xi}\partial_\mu \tilde{g}_{\xi\nu} \\
& \quad \tilde{g}^{\lambda h}\partial_h \tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}^{\lambda 0}\partial_0 \underbrace{\tilde{g}_{\mu\nu}}_{=0} + \tilde{g}^{\lambda\xi}\partial_\xi \tilde{g}_{\mu\nu}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda\xi}\left(\partial_\nu \tilde{g}_{\xi\mu} + \partial_\mu \tilde{g}_{\xi\nu} - \partial_\xi \tilde{g}_{\mu\nu}\right). \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

Somit folgt für den Krümmungstensor:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{00} &= \partial_0 \tilde{\Gamma}^h_{h0} - \partial_h \underbrace{\tilde{\Gamma}^h_{00}}_{=0} + \tilde{\Gamma}^p_{c0}\tilde{\Gamma}^c_{0p} - \tilde{\Gamma}^c_{cp}\underbrace{\tilde{\Gamma}^p_{00}}_{=0} \\
&= \partial_0 \left(\delta^h{}_h \frac{h'}{h}\right) + \left(\delta^p{}_c \frac{h'}{h}\right)\left(\delta^c{}_p \frac{h'}{h}\right) \\
&= (n-1)\left(\frac{h'}{h}\right)' + (n-1)\left(\frac{h'}{h}\right)^2 \\
&= (n-1)\left[\left(\frac{h'}{h}\right)' + \left(\frac{h'}{h}\right)^2\right] \\
&= (n-1)\frac{h''}{h} \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu 0} &= \underbrace{\tilde{\Gamma}^c_{c\mu}}_{=0} - \underbrace{\partial_c \tilde{\Gamma}^c_{\mu 0}}_{\partial_c\left(\delta^c{}_\mu \frac{h'}{h}\right)} + \tilde{\Gamma}^p_{c0}\tilde{\Gamma}^c_{\mu p} - \tilde{\Gamma}^c_{cp}\tilde{\Gamma}^p_{\mu 0} \\
& \left[\ \partial_c \left(\delta^c{}_\mu \frac{h'}{h}\right) = 0 \quad \text{da der Ausdruck nicht von } x_0 \text{ abhängig ist}\ \right] \\
&= \tilde{\Gamma}^p_{c0}\tilde{\Gamma}^c_{0p} - \tilde{\Gamma}^c_{cp}\tilde{\Gamma}^p_{\mu 0} \\
&= \delta^p{}_c \frac{h'}{h}\tilde{\Gamma}^c_{\mu p} - \delta^p{}_\mu \frac{h'}{h}\tilde{\Gamma}^c_{cp} \\
&= \frac{h'}{h}\tilde{\Gamma}^p_{\mu p} - \frac{h'}{h}\tilde{\Gamma}^c_{cp} \\
&= 0 \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} &= \partial_\nu \tilde{\Gamma}^k_{k\mu} - \partial_k \tilde{\Gamma}^k_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^k_{r\nu}\tilde{\Gamma}^r_{\mu k} - \tilde{\Gamma}^k_{kr}\tilde{\Gamma}^r_{\mu\nu} \\
&= \hat{R}_{\mu\nu} + \partial_\nu \tilde{\Gamma}^0_{0\mu} - \partial_0 \tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^0_{r\nu}\tilde{\Gamma}^r_{\mu 0} + \tilde{\Gamma}^k_{0\nu}\tilde{\Gamma}^0_{\mu k} - \tilde{\Gamma}^0_{0r}\tilde{\Gamma}^r_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^k_{k0}\tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} \\
&\left[\begin{array}{lcl}
\tilde{\Gamma}^0_{r\nu}\tilde{\Gamma}^r_{\mu 0} &=& \underbrace{\tilde{\Gamma}^0_{0\nu}}_{=0}\tilde{\Gamma}^0_{\mu 0} + \tilde{\Gamma}^0_{\xi\nu}\tilde{\Gamma}^\xi_{\mu 0} \\
&=& -hh'\gamma_{\xi\nu}\frac{h'}{h}\delta^\xi{}_\mu \\
&=& -\left(h'\right)^2\gamma_{\mu\nu} \\
\tilde{\Gamma}^k_{0\nu}\tilde{\Gamma}^0_{\mu k} &=& \underbrace{\tilde{\Gamma}^0_{0\nu}}_{=0}\tilde{\Gamma}^0_{\mu 0} + \tilde{\Gamma}^\xi_{0\nu}\tilde{\Gamma}^0_{\mu\xi} \\
&=& \frac{h'}{h}\delta^\xi{}_\nu\left(-hh'\gamma_{\mu\nu}\right) \\
&=& -\left(h'\right)^2\gamma_{\mu\nu} \\
\tilde{\Gamma}^0_{0r}\tilde{\Gamma}^r_{\mu\nu} &=& \tilde{\Gamma}^0_{00}\tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^0_{0\xi}\tilde{\Gamma}^\xi_{\mu\nu} = 0 \\
\tilde{\Gamma}^k_{k0}\tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} &=& \tilde{\Gamma}^0_{00}\tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^\xi_{\xi 0}\tilde{\Gamma}^0_{\mu\nu} \\
&=& -hh'\gamma_{\mu\nu}\frac{h'}{h}\delta^\xi{}_\xi \\
&=& \left(h'\right)^2(n-1)\gamma_{\mu\nu}
\end{array}\right] \\
&= \hat{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}\partial_0\left(hh'\right) - \gamma_{\mu\nu}\left(h'\right)^2 - \gamma_{\mu\nu}\left(h'\right)^2 + \gamma_{\mu\nu}(n-1)\left(h'\right)^2 \\
&= \hat{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}\left[\left(hh'\right)' + (n-3)\left(h'\right)^2\right]. \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

Hiemit wurde die Reduktion auf den $\tilde{\mathbb{R}}$ durchgeführt. Wir spezialisieren nun auf (5.27):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma^2 &= h_1^2(x)\mathrm{d}x^2 + h_0^2(x)\mathrm{d}\sigma^2 \\
&= \left[\ \mathrm{d}y = h_1(x)\mathrm{d}x; \quad y = \int \mathrm{d}x h_1(x)\ \right] \\
&= \mathrm{d}y^2 + h_0^2\left(x(y)\right)\mathrm{d}\hat{\sigma}^2.
\end{aligned}
$$

Es folgt dann im neuen Koordinatensystem:

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^h}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^j}{\partial y^\nu}\tilde{R}_{hj} \\
\tilde{R}'_{00} &= \frac{\partial x^h}{\partial y^0}\frac{\partial x^j}{\partial y^0}\tilde{R}_{hj}; \quad y^0 = y.
\end{aligned}
$$

Nun ist nur für $h = j = 0$ $\partial_0 x^h \neq 0$ und es folgt somit:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}'_{00} &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tilde{R}_{00}, \qquad \tilde{R}_{00} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tilde{R}'_{00} \\
\tilde{R}_{00} &= [5.37] = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 (n-1)\frac{h''}{h} \\
&= h_1^2(x)(n-1)\left(\frac{\mathrm{d}^2 h_0}{\mathrm{d}y^2}\right)\frac{1}{h_0(x)} \\
&= \left[\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}^2 h_0}{\mathrm{d}y^2} &=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}x}\right] \\ &=& \frac{1}{h_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}x}\right] \\ &=& \frac{1}{h_1}\left(\frac{h_0'}{h_1}\right)' \end{array}\right] \\
&= (n-1)\frac{h_1}{h_0}\left(\frac{h_0'}{h_1}\right)'
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}'_{\mu\nu} &= (5.37) = \hat{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \underbrace{\left[(h_0 h_0')' + (n-3)\left(h_0'\right)^2\right]} \\
&\qquad = h_0' h_0' + h_0 h_0'' + (n-3)\left(h_0'\right)^2 \\
&\qquad = h_0 \tfrac{\mathrm{d}^2 h_0}{\mathrm{d}y^2} + (n-2)\left(\tfrac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}y}\right)^2 \\
&\qquad = \tfrac{h_0}{h_1}\left(\tfrac{h_0'}{h_1}\right)' + (n-2)\left(\tfrac{1}{h_1}\tfrac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}x}\right)^2 \\
&\qquad = \tfrac{h_0}{h_1}\left(\tfrac{h_0'}{h_1}\right)' + (n-2)\left(\tfrac{h_0'}{h_1}\right)^2 \\
&= \hat{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}\left[\frac{h_0}{h_1}\left(\frac{h_0'}{h_1}\right)' + (n-2)\left(\frac{h_0'}{h_1}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\tilde{R}'_{\mu 0} = (5.36) = \tilde{R}_{\mu 0}. \tag{5.40}$$

Wir wenden uns nun der Beziehung (5.25) zu; es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= f^2(\xi)\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}\sigma^2 \\
&= g_{ik}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k, \qquad i,k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\
\mathrm{d}\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \qquad \mu,\nu = 1,2,\ldots,n-1 \\
\xi &= \left(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} & g^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} \\
g_{\mu 0} &= 0 & g^{\mu 0} &= 0 \\
g_{00} &= f^2(\xi) & g^{00} &= \frac{1}{f^2(\xi)}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Nunmehr können die Drei–Indizes Symbole bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda h} \left(\partial_\nu g_{h\nu} + \partial_\mu g_{h\nu} - \partial_h g_{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\xi} \left(\partial_\nu g_{\xi\mu} + \partial_\mu g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\mu\nu}\right) \\
&= \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Wegen (5.41). Insbesonders gilt noch:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{00}\left(\partial_0 \underbrace{g_{00}}_{=\partial_0 f^2(\xi)=0} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) = 0 \\
\Gamma^0_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{0h}\left(\partial_\nu g_{h\nu} + \partial_\mu g_{h\nu} - \partial_h g_{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\left(\partial_\nu \underbrace{g_{0\mu}}_{=0} \partial_\mu \underbrace{g_{0\nu}}_{=0} - \underbrace{\partial_0 g_{\mu\nu}}_{=0}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{g^{0\xi}}_{=0}\left(\partial_\nu g_{\xi\mu} + \partial_\mu g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\mu\nu}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^\lambda_{0\nu} &= \frac{1}{2}g^{\lambda h}\left(\partial_\nu g_{h0} + \partial_0 g_{h\nu} - \partial_h g_{0\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{g^{\lambda 0}}_{=0}\left(\partial_\nu g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\left(\partial_\nu \underbrace{g_{\mu 0}}_{=0} + \underbrace{\partial_0 g_{\mu\nu}}_{=0} - \partial_\mu \underbrace{g_{0\nu}}_{=0}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{\mu 0} &= \frac{1}{2}g^{0h}\left(\partial_0 g_{\mu h} + \partial_\mu g_{h0} - \partial_h \underbrace{g_{\mu 0}}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\left(\partial_0 g_{\mu 0} + \partial_\mu g_{00}\right) + \frac{1}{2}\underbrace{g^{0\xi}}_{=0}\left(\partial_0 g_{\mu\xi} + \partial_\mu g_{\xi 0}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_\mu g_{00} \\
&= \frac{1}{2f^2(\xi)}\partial_\mu f^2(\xi) \\
&= \frac{2f(\xi)\partial_\mu f(\xi)}{2f^2(\xi)} = \frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} \\
\Gamma^\mu_{00} &= \frac{1}{2}g^{\mu h}\left(\partial_0 g_{h0} + \partial_0 g_{h0} - \partial_h g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu 0}\left(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_0 \underbrace{g_{\nu 0}}_{=0} + \partial_0 \underbrace{g_{\nu 0}}_{=0} - \partial_\nu g_{00}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\partial_\nu f^2(\xi) \\
&= -\gamma^{\mu\nu} f(\xi)\partial_\nu f(\xi) = -f(\xi)\partial^\mu f(\xi).
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt erhalten wir also:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \Gamma^0_{\mu 0} = \Gamma^\lambda_{0\nu} = 0 \\
\Gamma^0_{\nu 0} &= \frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} \\
\Gamma^\mu_{00} &= -f(\xi)\partial^\mu f(\xi) \\
\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Wir sind nun wieder in der Lage die Komponenten des Krümmungstensors zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \Gamma^k_{k\mu} - \partial_k \Gamma^k_{\mu\nu} + \Gamma^k_{r\nu}\Gamma^r_{\mu k} - \Gamma^k_{kr}\Gamma^r_{\mu\nu} \\
R_{00} &= \partial_0 \Gamma^k_{k0} - \partial_k \Gamma^k_{00} + \Gamma^k_{r0}\Gamma^r_{0k} - \Gamma^k_{kr}\Gamma^r_{00} \\
& \left[\begin{array}{rcl}
\Gamma^k_{k0} &=& \Gamma^0_{00} + \Gamma^\mu_{\mu 0} = 0 \\
\partial_k \Gamma^k_{00} &=& \partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} \\
&=& \partial_\mu \left(-f(\xi)\partial^\mu f(\xi)\right) \\
\Gamma^k_{r0}\Gamma^r_{0k} &=& \Gamma^0_{r0}\Gamma^r_{00} + \Gamma^k_{00}\Gamma^0_{0k} + \Gamma^\mu_{\nu 0}\Gamma^\nu_{0\mu} + \Gamma^\nu_{\mu 0}\Gamma^\mu_{0\nu} \\
&=& \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^\mu_{00} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^\mu_{00}\Gamma^0_{0\mu} \\
&=& 2\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^\mu_{00} \\
\Gamma^k_{kr}\Gamma^r_{00} &=& \Gamma^0_{0r}\Gamma^r_{00} + \Gamma^k_{k0}\Gamma^0_{00} + \Gamma^\mu_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{00} \\
&=& \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^\nu_{00} + \Gamma^\mu_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{00}
\end{array} \right] \\
&= \partial_\mu \left(f(\xi)\partial^\mu f(\xi)\right) + 2\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^\mu_{00} - \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\mu_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{00} \\
&= \partial_\mu \left(f(\xi)\partial^\mu f(\xi)\right) + \Gamma^\mu_{00}\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^\mu_{00}\Gamma^\nu_{\nu 0} \\
&= \partial_\mu \left(f(\xi)\partial^\mu f(\xi)\right) - f(\xi)\left(\partial^\mu f(\xi)\right)\frac{1}{f(\xi)}\left(\partial_\mu f(\xi)\right) + \Gamma^\nu_{\nu\mu} f(\xi)\partial^\mu f(\xi) \\
&= \partial_\mu \left(f(\xi)\partial^\mu f(\xi)\right) - \left(\partial^\mu f(\xi)\right)\left(\partial_\mu f(\xi)\right) + \tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\mu} f(\xi)\partial^\mu f(\xi) \\
&= \partial_\mu f(\xi)\partial^\mu f(\xi) + f(\xi)\partial_\mu\partial^\mu f(\xi) - \partial^\mu f(\xi)\partial_\mu f(\xi) + \tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\mu} f(\xi)\partial^\mu f(\xi) \\
&= f(\xi)\left[\partial_\mu\partial^\mu f(\xi) + \tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\mu}\partial^\mu f(\xi)\right] \\
& \left[\ \nabla_\mu \partial^\mu f(\xi) = \partial_\mu\partial^\mu f(\xi) + \tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\mu}\partial^\mu f(\xi)\ \right] \\
&= f(\xi)(\partial^\mu f(\xi))_{\|\mu} \\
& \left[\ \sqrt{\gamma} a^\nu{}_{\|\nu} = \partial_\nu\left(\sqrt{\gamma} a^\nu\right) \quad (4.57)\ \right] \\
R_{00} &= \frac{f(\xi)}{\sqrt{\gamma}}\partial_\mu\left(\sqrt{\gamma}\partial^\mu f(\xi)\right).
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

Weiters gilt:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \Gamma^k_{k\mu} - \partial_k \Gamma^k_{\mu\nu} + \Gamma^k_{r\nu}\Gamma^r_{\mu k} - \Gamma^k_{kr}\Gamma^r_{\mu\nu} \\
&= \partial_\nu \Gamma^0_{0\mu} + \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} - \underbrace{\partial_0 \Gamma^0_{\mu\nu}}_{=0} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^0_{\mu 0} + \Gamma^\alpha_{0\nu} \underbrace{\Gamma^0_{\mu\alpha}}_{=0} + \\
&\quad \underbrace{\Gamma^0_{\beta\nu}}_{=0} \Gamma^\beta_{\mu 0} - \underbrace{\Gamma^0_{00}}_{=0} \Gamma^0_{\mu 0} - \Gamma^\alpha_{\alpha 0} \underbrace{\Gamma^0_{\mu\nu}}_{=0} - \Gamma^0_{0\beta}\tilde{\Gamma}^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \partial_\mu \Gamma^0_{0\mu} + \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^0_{\mu 0} - \Gamma^0_{0\beta}\tilde{\Gamma}^\beta_{\mu\nu} \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \partial \left(\frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} \right) + \frac{\partial_\nu f(\xi)}{f(\xi)} \frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} - \tilde{\Gamma}^\beta_{\mu\nu} \frac{\partial_\beta f(\xi)}{f(\xi)} \\
&\quad \left[\bigtriangledown_\nu \left(\frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} \right) = \partial_\nu \left(\frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} \right) - \tilde{\Gamma}^\beta_{\mu\nu} \frac{\partial_\beta f(\xi)}{f(\xi)} \right] \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \bigtriangledown_\nu \left(\frac{\partial_\mu f(\xi)}{f(\xi)} \right) + \frac{1}{f^2(\xi)} \partial_\nu f(\xi) \partial_\mu f(\xi) \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{f(\xi)} \bigtriangledown_\nu \left(\partial_\mu f(\xi) \right) - \frac{1}{f^2(\xi)} \partial_\nu f(\xi) \partial_\mu f(\xi) + \frac{1}{f^2(\xi)} \partial_\nu f(\xi) \partial_\mu f(\xi) \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{f(\xi)} \left(\partial_\mu f(\xi) \right)_{\|\nu}. \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

Schließlich berechnen wir noch:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu 0} &= \partial_0 \Gamma^k_{k\mu} - \partial_k \Gamma^k_{\mu 0} + \Gamma^k_{r0}\Gamma^r_{\mu k} - \Gamma^k_{kr}\Gamma^r_{\mu 0} \\
&= \underbrace{\partial_0 \Gamma^0_{0\mu}}_{=0} + \underbrace{\partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}}_{=0} - \underbrace{\partial_0 \Gamma^0_{\mu 0}}_{=0} - \underbrace{\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{0\mu}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{\mu 0}}_{=0} \\
&\quad \underbrace{\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{\mu\alpha}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^0_{\beta 0}\Gamma^\beta_{\mu 0}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\beta 0}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{\mu 0}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\alpha_{\alpha 0}\Gamma^0_{\mu 0}}_{=0} \\
&\quad \underbrace{\Gamma^0_{0\beta}\Gamma^\beta_{\mu 0}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu 0}}_{=0} \\
&= 0. \qquad (5.45)
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun unsere Ergebnisse zusammen: es gilt für $\mu = 1, 2, 3$ nach (5.43),(5.44) und (5.45):

$$
\left.
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \tilde{R}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{f(\xi)} \left(\partial_\mu f(\xi) \right)_{\|\nu}, \\
R_{\mu 0} &= 0 \\
R_{00} &= \tfrac{f(\xi)}{\sqrt{\gamma}} \partial_\mu \left(\sqrt{\gamma} \partial^\mu f(\xi) \right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.46)
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \det\left[\gamma_{\mu\nu}\right] \\
\mathrm{d}\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \\
&= h_1^2(r)\mathrm{d}r^2 + h_0^2(r)\mathrm{d}\hat{\sigma}^2 \\
\mathrm{d}\hat{\sigma}^2 &= \hat{\gamma}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu .
\end{aligned}
$$

Es gilt dann nach (5.38), (5.39) und (5.40):

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{R}_{11} &= (n_\sigma - 1)\tfrac{h_1}{h_0}\left(\tfrac{h_0'}{h_1}\right)' \\
\tilde{R}_{\mu 1} &= 0, \qquad \mu,\nu \le 2 \\
\tilde{R}_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} + \hat{\gamma}_{\mu\nu}\left[\tfrac{h_0}{h_1}\left(\tfrac{h_0'}{h_1}\right)' + (n_\sigma - 2)\left(\tfrac{h_0'}{h_1}\right)^2\right].
\end{aligned}
\right\} \tag{5.47}
$$

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen war (5.25) in der Form:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= e^\nu c^2\mathrm{d}t^2 - e^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \\
&= \mathrm{d}\sigma^2 + f^2(\xi)\mathrm{d}x_0^2 \\
\mathrm{d}\sigma^2 &= -e^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right).
\end{aligned}
$$

Zu $\mathrm{d}\sigma^2$ gehört dann entsprechend unserer Ableitung $\tilde{R}_{\mu\nu}$ und wir können dann, wenn wir $\tilde{R}_{\mu\nu}$ kennen, aus (5.46) $R_{\mu\nu}$ bestimmen. $\tilde{R}_{\mu\nu}$ selbst kann dann wieder wegen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma^2 &= -e^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \\
&= h_1^2\mathrm{d}r^2 + h_0^2\mathrm{d}\hat{\sigma}^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\mathrm{d}\hat{\sigma}^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2 \mathrm{d}\varphi^2
$$

aus $\hat{R}_{\mu\nu}$, welches zu $\mathrm{d}\hat{\sigma}^2$ gehört, unter Verwendung von (5.47) bestimmt werden. Wir formen weiter um:

$$
\mathrm{d}\hat{\sigma}^2 = h_1^2\mathrm{d}x_0^2 + h_0^2\mathrm{d}\hat{\hat{\sigma}}^2
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x_0^2 &= \mathrm{d}\theta^2, & \mathrm{d}\hat{\hat{\sigma}} &= \mathrm{d}\varphi^2, \\
h_0^2 &= \sin^2\theta, & h_1^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Somit können wir wiederum $\hat{R}_{\mu\nu}$ aus $\hat{\hat{R}}_{\mu\nu}$ bestimmen, welcher $\mathrm{d}\hat{\hat{\sigma}}^2$ zugeordnet ist. Es gilt also folgendes Schema:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\hat{\hat{R}} & \xrightarrow{(5.47)} & \hat{R} & \xrightarrow{(5.47)} & \tilde{R} & \xrightarrow{(5.46)} & R \\
1\ \mathrm{dim} & & 2\ \mathrm{dim} & & 3\ \mathrm{dim} & & 4\ \mathrm{dim}
\end{array}
$$

Es folgt damit:

$$\hat{R}_{\theta\theta} = -1; \qquad \hat{R}_{\varphi\varphi} = -\sin^2\theta \tag{5.48}$$

und dann nach Ausführung aller weiteren Schritte:

$$R_{rr} = \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0 \tag{5.49}$$

$$R_{00} = -e^{\nu-\lambda}\left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{\nu'}{r}\right] = 0 \tag{5.50}$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{1}{2}r\left[\nu' - \lambda'\right]\right\} - 1 = 0. \tag{5.51}$$

Aus (5.49) und (5.50) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right] e^{\nu-\lambda} \\ &= e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r}\right] \end{aligned}$$

$$\lambda'(r) = -\nu'(r). \tag{5.52}$$

Aus (5.51) folgt dann:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r2\nu'\right] &= 1 \\ 1 + r\nu' &= e^{-\nu} \\ \left[\ e^{\nu} = x; \quad e^{\nu}\mathrm{d}\nu \right. &= \left. \mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}\nu = \frac{\mathrm{d}x}{x}\ \right] \\ r\nu' &= e^{-\nu} - 1 \\ \frac{\mathrm{d}\nu}{e^{-\nu} - 1} &= \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)} &= \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ \ln(1-x) = \ln\frac{C}{r} &\rightarrow x = 1 - \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Also:

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \qquad (C = 2m)$$

und wir finden die *erste Form* der Schwartzschildlösung mit

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2, \tag{5.53}$$

wobei m eine noch zu bestimmende Konstante ist. Wir formen aber (5.53) noch ein wenig um und benützen

$$\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) + \mathrm{d}r^2.$$

Es gilt aber:

$$\begin{aligned}
-\mathrm{d}s^2 &= \frac{\mathrm{d}r^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right) r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - \left(1-\frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 \\
&= \frac{\mathrm{d}r^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right) \left(\mathrm{d}\mathbf{r}^2 - \mathrm{d}r^2\right)}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - \left(1-\frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 \\
&= \mathrm{d}\mathbf{r}^2 + \frac{\mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}r^2 + \frac{2m}{r}\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - \left(1-\frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 \\
&= \mathrm{d}\mathbf{r}^2 + \frac{2m}{r}\mathrm{d}r^2 \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1-\frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r &= \frac{1}{r^2}\left(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right) \\
\mathrm{d}r^2 &= \frac{1}{r^4}\left(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right)^2
\end{aligned}$$

finden wir die *zweite Form* der Schwartzschildlösung

$$-\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}^2 + \frac{2m}{r^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\left(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right)^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2. \tag{5.54}$$

5.4.5 Eigenschaften der Schwartzschildlösung

Aus (5.53) folgt unmittelbar:

$$g_{ab} = \mathrm{diag}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right), -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}, -r^2, -r^2\sin^2\theta\right], \tag{5.55}$$

damit gilt

$$\partial_0 g_{ab} = 0, \tag{5.56}$$

und damit ist die Lösung *stationär*. Wir sehen, daß die Koordinaten dem Killing Vektorfeld $\xi^a = \delta^a{}_0$ nach (5.8) zugeordnet sind, da

$$\begin{aligned}
\xi_a &= g_{ab}\xi^b = g_{ab}\delta^b{}_0 = g_{0a} = g_{00}\delta^0{}_a \\
&= \left(1-\frac{2m}{r} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right),
\end{aligned}$$

was offensichtlich ein zeitähnliches Killing Feld ist. Damit folgt auch nach den Überlegungen von Abschnitt 5.4.2, daß ξ^a Hyperflächen orthogonal ist (Gleichung 5.14):

$$\xi_a = \lambda \partial_a f \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda = g_{00} \\ f(x^a) = t = \text{konst.} \end{array}$$

Somit ist das Killing Feld ξ^a orthonormal zur Familie der Hyperflächen $f(x^a) = t = \text{konst}$, und somit ist die Lösung *statisch* und t ist eine *Weltzeit*. Es folgt auch aus (5.53), daß die Lösung *zeitsymmetrisch* ist: sie ist invariant unter $t \rightarrow t' = -t$ und *zeittranslationsinvariant*, da (5.53) invariant unter Transformationen $t \rightarrow t' = t + \text{konst}$ ist. Daraus ist nochmals zu ersehen, daß die Lösung statisch ist. Es folgt das *Birkhoffsche Theorem*:

Theorem 5.4 *Eine sphärisch symmetrische Vakuumlösung ist* notwendig *statisch.*

Dieses Ergebnis ist unerwartet, da in der Newtonschen Theorie die sphärische Geometrie wohl kaum etwas mit Zeitabhängigkeit zu tun hat. Es folgt aus obigem Theorem weiter, daß eine sphärisch symmetrische Quelle – etwa ein Stern – ihre Form verändern kann, ohne in der Umgebung Störungen zu bewirken, sofern die sphärische Symmetrie erhalten bleibt. Somit kann ein pulsierender sphärisch symmetrischer Stern keine Gravitationswellen aussenden.

Lassen wir nun in (5.53) $r \rightarrow \infty$ gehen, so folgt:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

und damit ist unsere Lösung *asymtotisch eben*. Wir können diese Eigenschaft dazu benützen, um die Integrationskonstante m zu bestimmen. Dazu gehen wir auf entfernte Gravitationswirkung über. Wir verwenden dazu die Transformation

$$r = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2 r'; \quad \theta = \theta', \quad \text{und } \varphi = \varphi'$$

oder

$$\mathbf{r} = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2 \mathbf{r}'.$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{2m}{r}\right) &= \left(1-\frac{2m}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2 r'}\right) \\
&= \frac{\left(1+\frac{m}{2m'}\right)^2 r' - 2m}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2 r'} \\
&= \frac{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2 - \frac{2m}{r'}}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2} \\
&= \frac{1+\frac{m}{r'}+\left(\frac{m}{2r'}\right)^2 - \frac{2m}{r'}}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2} \\
\mathrm{d}r &= \left(1+\frac{m}{2r'}\right)\left(1-\frac{m}{2r'}\right)\mathrm{d}r' \\
\mathrm{d}r^2 &= \left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2\mathrm{d}r'^2 \\
r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) &= \mathrm{d}\mathbf{r}^2-\mathrm{d}r^2 \\
&= \left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4 r'^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \\
&= \left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4\left(\mathrm{d}\mathbf{r}'^2-\mathrm{d}r'^2\right)
\end{aligned}$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)+\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 \qquad (5.57) \\
&= -\frac{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2}{\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2}\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2\mathrm{d}r'^2 - \\
&\quad \left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4\left(\mathrm{d}\mathbf{r}'^2-\mathrm{d}r'^2\right)+\frac{\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2}c^2\mathrm{d}t^2 \\
\mathrm{d}s^2 &= -\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4\mathrm{d}\mathbf{r}'^2+\frac{\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2}c^2\mathrm{d}t^2. \qquad (5.58)
\end{aligned}$$

Womit die *dritte* Form der Schwartzschildlösung gefunden wurde.

Dieses Ergebnis (5.57 und 5.58) läßt sich mit dem früher bereits gefundenen Ergebnis (5.3) vergleichen, wenn wir auf den Limes $m/r' \to 0$ ($r' \to \infty$)

übergehen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\left(1+\frac{m}{2r'}\right)\mathrm{d}\mathbf{r}'^2 + \left(1-\frac{m}{2r'}\right)c^2\mathrm{d}t^2 \\ &= (1+\varepsilon_{00})\,c^2\mathrm{d}t^2 + (1-\varepsilon_{00})\,\mathrm{d}\mathbf{r}^2 \\ \varepsilon_{00} &= \frac{2}{c^2}\phi \\ &= -\frac{2}{c^2}\frac{\kappa_0 M}{r}. \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis:

$$m = \frac{M\kappa_0}{c^2} \tag{5.59}$$

mit M der konzentrierten Punktmasse und κ_0 der Gravitationskonstanten. Man bezeichnet m auch als den *Gravitationsradius* und er ergibt sich für die Einheitsmasse zu

$$m = 7\cdot 10^{-30}\ \text{Meter}. \tag{5.60}$$

Somit ergibt sich etwa für die Erde ein $m = 0.0015$ Meter.

Schließlich soll noch angemerkt werden, daß die Koordinaten r', θ', φ', für welche die Form (5.58) aufgefunden wurde, in der Literatur häufig als *isotrope Koordinaten* bezeichnet werden.

5.5 Die zeitähnliche geodätische Linie

Es soll nun das Einteilchenproblem der allgemeinen Relativitätstheorie gelöst werden. Dazu wird angenommen, daß der zentrale massive Körper ein kugelsymmetrisches Gravitationsfeld erzeugt. Damit ist dann die Schwartzschildlösung natürlich die passende Lösung. Ein Testteilchen bewegt sich in diesem Feld auf einer zeitähnlichen geodätischen Linie und es ist somit zur Lösung des Problems erforderlich die zeitähnliche geodätische Linie der Schwartzschildlösung zu bestimmen. Wir verwenden dazu Variationsmethoden:

$$S = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t\,\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} = \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,W \stackrel{!}{=} \text{ Min.} \tag{5.61}$$

Wir bilden die Variationsableitung

$$\delta S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^l} - \partial_l W \stackrel{!}{=} 0 = [s]_{x^l}\,. \tag{5.62}$$

Setzen wir nun $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$, so ist das Wirkungsintegral gleich dem Weg zwischen den beiden Punkten, also

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,W = \int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}s = S,$$

wenn s das Intervall zwischen zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 ist. Man arbeitet nun in (5.62) besser mit W^2 anstelle von W um die Quadratwurzel zu vermeiden. Man multipliziert daher mit $2L$:

$$2L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^l}-\partial_l W\right)=0$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial W^2}{\partial \dot{x}^l}\right)-\partial_l W^2=2\frac{\partial W}{\mathrm{d}\dot{x}^l}\frac{\partial W}{\partial t};$$

und mit $\mathrm{d}t=\mathrm{d}s$ folgt $W=1$, womit die rechte Seite dieser Beziehung verschwindet:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial W^2}{\partial \dot{x}^l}\right)-\partial_l W^2\right\}=0 \tag{5.63}$$

Diese Gleichung gehört aber zum Variationsprinzip

$$\delta\int_{P_0}^{P_1}\mathrm{d}s\,W^2=\delta\int_{P_0}^{P_1}\mathrm{d}s\,g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k=0.$$

Im Schwartzschildproblem gilt aber (5.25) für das $\mathrm{d}s^2$:

$$\mathrm{d}s^2=-e^{\lambda(r)}\mathrm{d}r^2+e^{\nu(r)}c^2\mathrm{d}t^2-r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= 1=W^2\\ &= -e^{\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2-r^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]+\\ & e^{\nu}c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2\end{aligned} \tag{5.64}$$

Wir betrachten nun eine *ebene* Bewegung (Abb. 5.5):

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2}; \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=0; \qquad \sin\theta=1\\ W^2=1 &= -e^{\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2-r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2+e^{\nu}c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2.\end{aligned} \tag{5.65}$$

W^2 selbst hängt nicht explizit von t oder φ ab, und es folgt:

$$\frac{\partial W^2}{\partial\varphi}=\frac{\partial W^2}{\partial t}=0$$

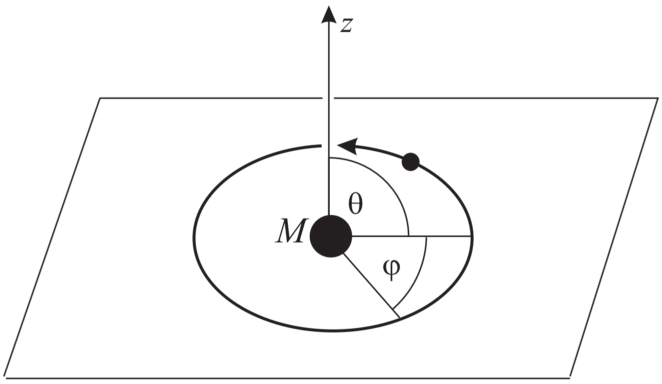

Abbildung 5.5: *Ebene Bewegung* in der Schwartzschildlösung.

also mit (5.63):

$$[s]_\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial W^2}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial W^2}{\partial \varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial W^2}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \tag{5.66}$$

$$[s]_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial W^2}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial W^2}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial W^2}{\partial \dot{t}}\right) = 0 \tag{5.67}$$

$$\tag{5.68}$$

mit $\dot{t} = \mathrm{d}t/\mathrm{d}s$ und $\dot{\varphi} = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s$. Mit (5.65) folgt weiter:

$$\frac{\partial W^2}{\partial \dot{\varphi}} = -2r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}; \qquad \frac{\partial W^2}{\partial \dot{t}} = -2c^2e^\nu\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

Wir bezeichnen nun mit

$$D = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}; \qquad K = ce^\nu\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \tag{5.69}$$

und erhalten dann aus (5.65):

$$1 = -e^\lambda\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{D}{r}\right)^2 + \frac{K^2}{e^\nu}. \tag{5.70}$$

Dies ist ein System von Differentialgleichungen für die Funktionen $\varphi = \varphi(s)$, $t = t(s)$, und $r = r(s)$. Für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ findet man weiter:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{D}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$$

und damit

$$e^\lambda\frac{D^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{D}{r}\right)^2 - \frac{K^2}{e^\nu} = -1. \tag{5.71}$$

Wir gehen nun von $r(\varphi)$ auf $u(\varphi)$ mit $u = 1/r$ über:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi},$$

und wir erhalten für (5.71):

$$\begin{aligned} e^{\lambda} D^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + D^2 u^2 - K^2 e^{-\nu} + 1 &= 0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + e^{-\lambda} u^2 - \left(\frac{K}{D}\right)^2 e^{-\lambda-\nu} + \frac{e^{-\lambda}}{D^2} &= 0. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Wir verwenden nun noch das frühere Ergebnis

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r}; \qquad e^{-\lambda-\nu} = 1$$

und es folgt

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2 (1 - 2mu) - \left(\frac{K}{D}\right)^2 + \frac{1}{D^2}(1 - 2mu) = 0$$

oder

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2 (1 - 2mu) + \frac{1}{D^2}\left(1 - 2mu - K^2\right) = 0. \tag{5.73}$$

Dies ist die strenge Differentialgleichung erster Ordnung für die geodätischen Linien der ebenen Bewegung der Schwartzschildlösung. Man geht nun günstiger Weise auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung über, indem man (5.73) differenziert ($u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi$):

$$\begin{aligned} 2u'u'' + 2uu'(1 - 2mu) - 2mu^2 u' - \frac{1}{D^2} 2mu' &= 0 \\ u'' + u(1 - 2mu) - mu^2 - \frac{m}{D^2} &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$u'' + u = \frac{m}{D^2} + 3mu^2 \tag{5.74}$$

Hiermit wurde die strenge Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Bewegung des Testteilchens aufgefunden.

5.5.1 Das klassische Äquivalent

Das klassische Äquivalent zum vorhergehenden Problem ist das Kepler Problem, also die Bewegung eines Testkörpers im Gravitationsfeld eines massiven Körpers. Es gilt das Kraftgesetz:

$$\mathbf{F} = -m\frac{\mu}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

mit der Konstanten μ. Das zweite Newtonsche Gesetz lautet nun:

$$m\ddot{r} = -m\frac{\mu}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wir führen nun das Drehmoment ein:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{r} \times \left(-m\frac{\mu}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und erkennen, daß das Drehmoment erhalten wird. Es gilt also:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{h}$$

mit $\mathbf{h}$ einem konstanten Vektor. Damit ist $\mathbf{r}$ stets senkrecht auf $\mathbf{h}$ wegen $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$, und das Teilchen wird sich stets in einer Ebene bewegen. Wir führen die Polarkoordinaten (r, φ) ein und finden die Bewegungsgleichung:

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Man bildet das Skalarprodukt mit $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ und integriert:

$$r^2\dot{\varphi} = h,$$

was wieder dem Erhaltungssatz für das Drehmoment entspricht. h ist dabei das Drehmoment pro Einheitsmasse. Bildet man nun das Skalarprodukt mit $\hat{\mathbf{r}}$, so erhält man:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{R^2}.$$

Man führt nun wieder $u = 1/r$ ein und findet:

$$\begin{aligned}
\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) &= -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{1}{u^2}hu^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \\
&= -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}
\end{aligned}$$

und analog

$$\ddot{r} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2},$$

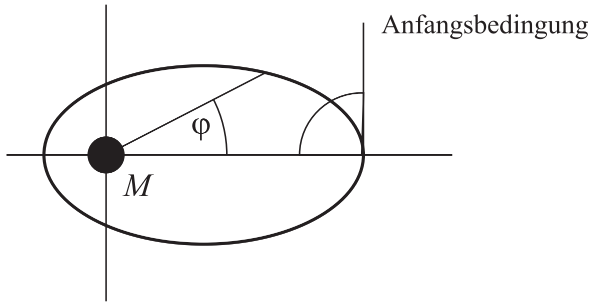

Abbildung 5.6: Die Anfangsbedingung für die Planetenbewegung.

was zu *Binets Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \tag{5.75}$$

führt. Identifiziert man nun m/D^2 aus (5.74) mit μ/h^2 aus (5.75), so sieht man, daß (5.74) die relativistische Version von Binets Gleichung ist.

5.5.2 Berechnung der geodätischen Linie

Für planetarische Bahnen ist der zweite Term auf der rechten Seite von (5.74) klein, und man untersucht daher zunächst den Fall $3mu^2 \ll m/D^2$:

$$\begin{aligned} u'' + u &= \frac{m}{D^2} \\ u_1 &= C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + \frac{m}{D^2}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung (Abb. 5.6) $\varphi = 0$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi = 0$ führt zu $C_2 = 0$ und man erhält:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_1 \cos\varphi + \frac{m}{D^2} \\ &= \frac{m}{D^2} (1 + \varepsilon \cos\varphi) \end{aligned} \tag{5.76}$$

mit der *numerischen Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{D^2 C_1}{m} \tag{5.77}$$

und

$$r = \frac{D}{m(1 + \varepsilon \cos\varphi)}. \tag{5.78}$$

Dies ist – wenig überraschend – die Gleichung einer Ellipse, mit der Exzentrizität ε und dem Koordinatenursprung als Attraktionszentrum. Für $\varepsilon = 0$ folgt die Kreisbahn als Lösung nullter Ordnung: $r_0 = D^2/m$.

Zur Ableitung einer Näherung zweiter Ordnung führen wir

$$w = u - \frac{m}{D^2}; \quad w' = u'; \quad w'' = u''$$

ein und erhalten aus (5.74):

$$w'' + w\left(1 - \frac{6m^2}{D^2}\right) = 3m\left(\frac{m^2}{D^4} + w^2\right). \tag{5.79}$$

Wir nähern nun:

$$\left(\frac{m}{D^2}\right)^2 = \frac{1}{r_0^2} \ll 1 \qquad \rightarrow \qquad w^2 \ll w,$$

und setzen die rechte Seite von (5.79) ≈ 0. Wir haben dann

$$w'' + w\left(1 - \frac{6m^2}{D^2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} w &= C\cos\sqrt{1 - \frac{6m^2}{D^2}}\varphi \\ &\approx C\cos\left(1 - \frac{3m^2}{D^2}\right)\varphi \end{aligned}$$

und

$$u = \frac{m}{D^2} + C\cos\left(1 - \frac{3m^2}{D^2}\right)\varphi.$$

Setzt man nun $C = m\varepsilon/D^2$ (in Übereinstimmung mit der Ellipsennäherung), so findet man die Bahngleichung

$$u = \frac{m}{D^2}\left[1 + \varepsilon\cos\left(1 - \frac{3m^2}{D^2}\right)\varphi\right]. \tag{5.80}$$

Nach einem Umlauf von 2π besitzt nun der cos–Term nicht mehr den gleichen Wert, und wir haben keine geschlossene Planetenbahn mehr. Wir finden eine zusätzliche *Periheldrehung*. Diese Drehung wird durch den Winkel $\Delta\varphi$ charakterisiert. Man kann diesen Winkel wie folgt bestimmen: es sei φ_p der Winkel, welcher zur neuen Lage der großen Achse nach einem vollständigen Umlauf gehört, so gilt:

$$\varphi_p = 2\pi + \Delta\varphi$$

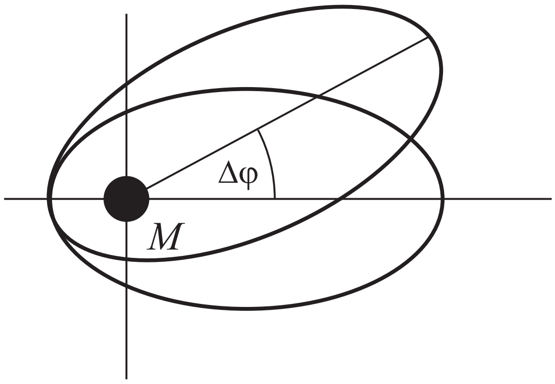

Abbildung 5.7: Die Periheldrehung der Planetenbewegung.

oder

$$\begin{aligned}
\cos\left(1-\frac{3m^2}{D^2}\right)(2\pi+\Delta\varphi) &= 1 \\
(2\pi+\Delta\varphi)\left(1-\frac{3m^2}{D^2}\right) &= 2\pi \\
2\pi\left(1-\frac{3m^2}{D^2}\right)+\Delta\varphi\left(1-\frac{3m^2}{D^2}\right) &= 2\pi
\end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\frac{3m^2}{D^2}}{1-\frac{3m^2}{D^2}}. \tag{5.81}$$

Nun gibt aber Newtons Theorie auch eine Perihelbewegung an, da die Planetenbewegung kein reines Zweikörperproblem ist, und die anderen Planeten (besonders Jupiter) auch einen Einfluß auf die Bahn eines speziellen Planeten haben.

Die Bahn von Merkur ist besonders exzentrisch und man hat schon sehr bald eine Bewegung des Perihels von 43 Sekunden in 100 Jahren beobachtet. Dies konnte klassisch – auch mit komplizierten Berechnungen – nicht erhalten werden. Die Abweichung lag aber auch um einen Faktor 100 über dem experimentellen Fehler, sodaß der Effekt als 'echt' einzustufen ist. (Man hat dann zum Beispiel einen Planeten innerhalb der Merkurbahn vermutet und ihn 'Vulkan' getauft.) Die folgende Tabelle soll nun die experimentellen Werte für verschiedenen Planeten den Ergebnissen der allgemeinen Relativitätstheorie gegenüberstellen:

Planet	Theorie (AR)	Beobachtung
Merkur	43.0	43.1 ± 0.5
Venus	8.6	8.4 ± 4.8
Erde	3.8	5.0 ± 1.2
Ikarus	10.3	9.8 ± 0.8

5.5.3 Das zeitliche Verhalten der Radialbewegung

Die Testmasse m_0 'fällt' in das Attraktionszentrum M hinein. Es gelten dann (5.69):

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} &= D \\ c e^{\nu} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= K \end{aligned}$$

und (5.65):

$$-e^{\lambda} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - r^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 + e^{\nu} c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1,$$

sowie

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m}{r}; \quad e^{-\lambda-\nu} = 1 = e^{\lambda+\nu}.$$

Bei rein radialer Bahn ist $\varphi = \varphi_0 =$ konst und es folgt somit:

$$\begin{aligned} e^{\lambda} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - e^{\nu} \left(\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 1 &= 0 \\ c \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= K e^{-\nu} \\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r}{c\mathrm{d}t} \frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= e^{-\nu} K \frac{\mathrm{d}r}{c\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left[e^{\lambda} \left(\frac{\mathrm{d}r}{c\mathrm{d}t}\right)^2 - e^{\nu} \right] \left(\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 1 &= \\ \left[e^{\lambda} \left(\frac{\mathrm{d}r}{c\mathrm{d}t}\right)^2 - e^{\nu} \right] K^2 e^{-2\nu} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{c^2} e^{\lambda} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - e^{\nu} = -\frac{e^{2\nu}}{K^2}. \tag{5.82}$$

Damit konnte die Differentialgleichung der Radialbewegung aufgefunden werden. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= e^{\nu}\sqrt{1-\frac{e^{\nu}}{K^2}} \\ &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{1}{K^2}}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}ct &= \int \mathrm{d}r \frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{1+\frac{2m}{K^2 r}-\frac{1}{K^2}}} \\ &= P\left(\sqrt{r}\right) - 4m^2 \log \frac{\sqrt{r}-\sqrt{2m}}{\sqrt{r}+\sqrt{2m}}. \qquad (5.83)\end{aligned}$$

Wobei $P\left(\sqrt{r}\right)$ eine stetige Funktion von $\sqrt{r}$ ist.

Wir untersuchen nun den Grenzwert $r \to 2m$:

$$\lim_{r\to 2m} \frac{\sqrt{r}-\sqrt{2m}}{\sqrt{r}+\sqrt{2m}} = \frac{0}{2\sqrt{2m}} = 0.$$

Somit gilt:

$$ct|_{r\to 2m} = -4m^2 \log 0 \quad \to \quad \infty. \qquad (5.84)$$

Zusätzlich sehen wir, daß

$$\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = Ke^{-\nu} = \left.\frac{K}{1-\frac{2m}{r}}\right|_{r\to 2m} \quad \to \infty. \qquad (5.85)$$

Es gilt aber:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1-(v/c)^2}c\mathrm{d}t = c\mathrm{d}\tau$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(v/c)^2}c\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Wenn also $r \to 2m$ strebt, geht $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s$ wegen (5.85) gegen Unendlich, was aber nur möglich ist, wenn die Geschwindigkeit des Probekörpers gegen die Lichtgeschwindigkeit strebt, was aber wieder aufgrund der spezielle Relativitätstheorie dazu führt, daß die Masse des Probekörpers für $r \to 2m$ gegen Unendlich geht. Somit finden wir, daß für Gravitationsradien m, die größer der Hälfte des Radius der als Attraktionszentrum dienenden Masse sind, der Probekörper das Attraktionszentrum nie erreichen kann. Umgekehrt kann in diesem Fall auch kein Körper das Attraktionszentrum verlassen. Der Gravitationsradius trennt also das Raumgebiet um das Attraktionszentrum in zwei Bereiche: das *Innengebiet* und das *Außengebiet*, welche nicht miteinander kommunizieren können.

5.6 Die Beugung von Licht

Wir untersuchen nun die Lichtbahn im sphärisch symmetrischen Gravitationsfeld. Die Rechnung ist nicht wesentlich verschieden von den bisher ausgeführten, mit dem signifikanten Unterschied, daß sich das Licht entlang einer

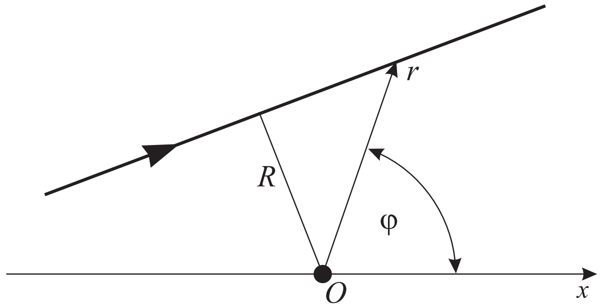

Abbildung 5.8: Geometrie der Lichtbahn.

Nullgeodätischen ausbreitet. Es gilt wieder:

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} = D; \qquad ce^{\nu} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} = K,$$

nur daß $D = K \to \infty$, wegen $\mathrm{d}s = 0$. Für die geodätische Linie gilt (5.74), nunmehr aber wegen $D \to \infty$ in der Form

$$u'' + u = 3mu^2. \tag{5.86}$$

In nullter Näherung ($mu^2 \ll 1$) wird

$$\begin{aligned} u'' + u = 0, \qquad & u = u_0 \cos\varphi \\ u = \frac{1}{r} \quad \to \quad & r = \frac{1}{u_0 \cos\varphi} \\ r\cos\varphi \quad = \quad & \frac{1}{u_0} = R \end{aligned} \tag{5.87}$$

(5.87) ist die Gleichung einer Geraden (Abb. 5.8), wobei R der kürzeste Abstand vom Koordinatenursprung O ist. Wir haben somit das Ergebnis der speziellen Relativitätstheorie gefunden.

Den Einfluß des Attraktionszentrums findet man nun durch Iteration

$$u'' + u = 3mu_0^2 \cos^2\varphi \tag{5.88}$$

mit der Lösung:

$$\frac{1}{r} = u = u_0 \cos\varphi + mu_0^2 \left(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\right).$$

Zum Beweis der Richtigkeit der Lösung setzen wir

$$\begin{aligned} w &= mu_0^2\left(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\right) \\ w' &= mu_0^2\left(-2\cos\varphi\sin\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi\right) \\ &= 2mu_0^2\cos\varphi\sin\varphi \\ w'' &= 2mu_0^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \end{aligned}$$

und setzen dies in (5.88) ein:

$$-u_0\cos\varphi + 2mu_0^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + u_0\cos\varphi + mu_0^2\left(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\right)$$

$$= 3mu_0^2\cos^2\varphi = u'' + u. \qquad \textbf{w.z.b.w.}$$

Somit erhalten wir mit

$$R = r\cos\varphi + \frac{m}{R}\left(r\cos^2\varphi + 2r\sin^2\varphi\right) \tag{5.89}$$

die Gleichung der isotropen Geraden. Zur Veranschaulichung gehen wir auf kartesische Koordinaten über:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} R = x + \frac{m}{R}\left(x^2 + 2y^2\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder

$$x = R - \frac{m}{R}\left(x^2 + 2y^2\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{5.90}$$

Asymptoten findet man für $|y/x| \gg 1$ oder $|y| \gg |x|$. Dann ist

$$x = R \mp \frac{m}{R}2y,$$

da

$$\frac{2y^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y^2}{\pm y}.$$

Damit findet man den Ablenkungswinkel

$$\delta = \frac{4m}{R} \tag{5.91}$$

Für den Sonnenradius von 695300 km wird $\delta = 1.75''$.

Es wurden Versuche unternommen, diese Ablenkung zu Zeiten totaler Sonnenfinsternis zu messen. Es kann dann die augenscheinliche Position von Sternen aufgezeichnet werden. Man vergleicht dann die Photographien von

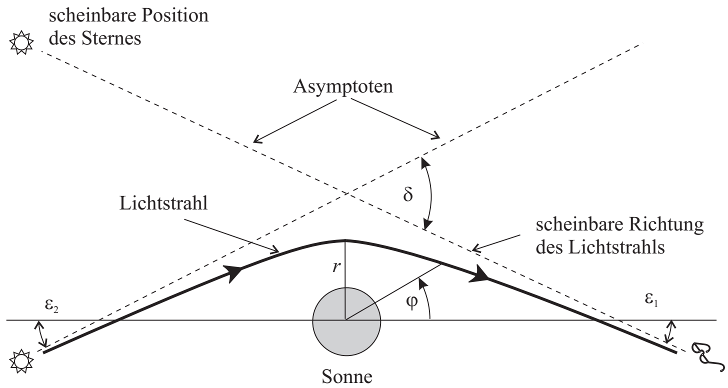

Abbildung 5.9: Ablenkung des Sternenlichtes durch die Sonne.

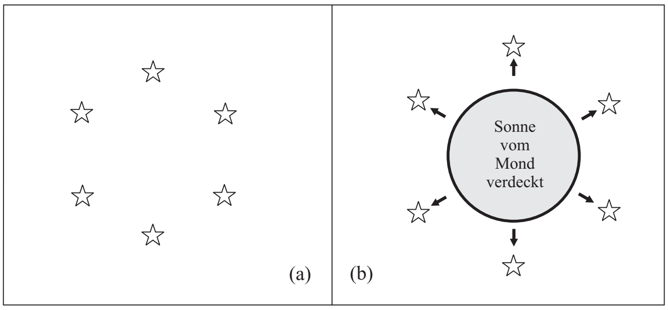

Abbildung 5.10: Verzerrung von Sternenpositionen (a) während einer Sonnenfinsternis (b).

Sternenfeldern in der Sonnenumgebung zum Zeitpunkt einer völligen Sonnenfinsternis mit solchen des selben Himmelsbereiches, wenn die Sonne nicht in diesem Bereich steht. Solche Aufnahmen zeigen, daß die Sterne scheinbar nach außen wandern.

1919 wurde unter der Leitung von Sir Arthur Eddington ein solches Experiment durchgeführt, welches Einsteins Vorstellungen bestätigte. Aus heutiger Sicht ist diese Bestätigung aber nicht mehr so offensichtlich gegeben, da Probleme, welche in der Sonnenkorona ihren Ursprung haben, nicht berücksichtigt wurden. In der Zwischenzeit wurden weitere, ähnliche, Experimente durchgeführt und sie liegen zwischen 0.55 bis 1.55 mal dem Einsteinschen Ergebnis.

Mit den neuen Radioteleskopen und der Entdeckung von Quasaren (quasistellare, punktähnliche Objekte, welche eine intensive elektromagnetische Strahlung aussenden) kann man interferrometrische Techniken anwenden, wenn solche Objekte nahe an der Sonne verbeiwandern. Erste Ergebnisse sprechen von eine Abweichung von 1.57 bis 1.82±0.2 Bogensekunden; die Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage ist also sehr gut.

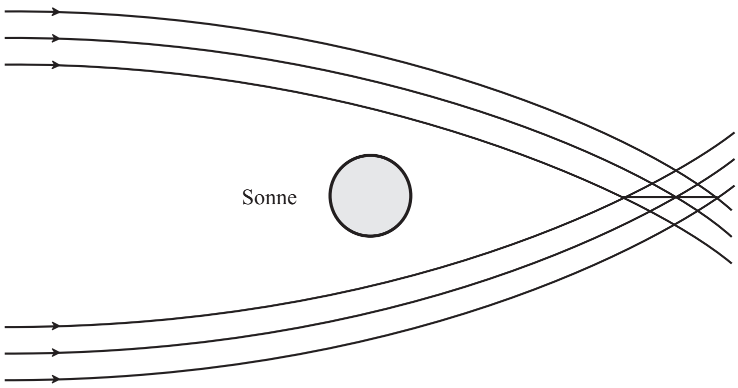

Abbildung 5.11: Die Sonne als Gravitationslinse.

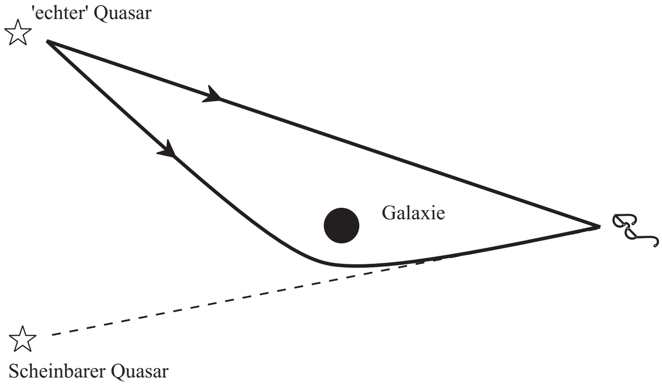

Abbildung 5.12: Scheinbare Quasar-Zwillinge.

Untersucht man nun viele Lichtbahnen, welche von einer weit entfernten Quelle parallel einfallen, so verursacht die Anwesenheit eines massiven Objektes eine Konvergenz der Lichtstrahlen und es wird eine Brennlinie erzeugt. Das sphärisch symmetrische Objekt wirkt somit als *Gravitationslinse.* Damit können entfernte, punktartige Quellen Doppelbilder produzieren. Bekannt ist der Fall zweier Quasare, welche etwa 6 Bogenminuten voneinander entfernt sind. Sie wurden als Abbilder ein und desselben Quasars identifiziert. Wie in Abb. 5.12 skizziert, liegt in etwa 1/4 des Abstandes des Quasars von der Erde eine Galaxie, welche die wesentliche Komponente einer Gravitationslinse darstellt.

5.7 Die Gravitations–Rotverschiebung des Lichtes

Dies ist ein klassischer Test, aber leider kein direkter Beweis für die Gültigkeit

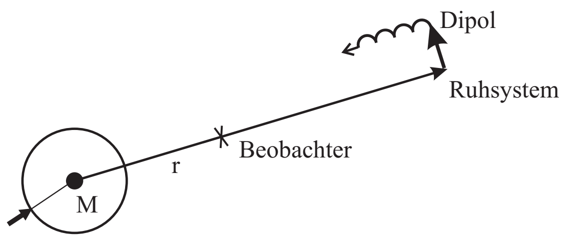

Abbildung 5.13: Zur Gravitations–Rotverschiebung des Lichtes.

der allgemeinen Relativitätstheorie, da jede relativistische Theorie, welche das Äquivalenzprinzip befolgt, eine solche Rotverschiebung vorhersagen wird.

Zur Lösung benützen wir die Schwartzschildlösung in ihrer zweiten Form (5.54):

$$-\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}^2 + \frac{2m}{r^2\,(r-2m)}\,(\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r})^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2c^2.$$

Zwei am gleichen Ort ($\mathrm{d}\mathbf{r}=0$) stattfindende Ereignisse, welche eine Zeitdifferenz $\mathrm{d}\tau$ aufweisen, haben dann am Beobachtungsort die Zeitdifferenz $\mathrm{d}t$. Das Verbindungsglied zwischen diesen beiden Zeitdifferenzen bildet die Invarianz von $\mathrm{d}s^2$:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 &= \mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 \\ \to \mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Ist nun ΔZ die Anzahl der Schwingungen, so gilt im Ruhsystem:

$$\nu_0 = \frac{\Delta Z}{\Delta\tau}.$$

Für den Beobachter gilt aber:

$$\begin{aligned}\nu = \frac{\Delta Z}{\Delta t} &= \frac{\Delta Z}{\Delta\tau}\sqrt{1-\frac{2m}{r}} = \nu_0\sqrt{1-\frac{2m}{r}} \\ \frac{\nu}{\nu_0} &= \sqrt{1-\frac{2m}{r}} \end{aligned} \tag{5.93}$$

Diese Gleichung beschreibt eine Rotverschiebung des Lichts. Insbesonders wird $\nu=0$ für $r=r_0=2m$ und man findet die totale Rotverschiebung. Am Gravitationsradius (Schwartzschildradius) r_0 kann daher die emittierte Welle nicht beobachtet werden. Es kann somit auch kein Licht das Attraktionszentrum verlassen $\to$ *Schwarzes Loch!*

Astronomische Messungen zur Überprüfung von (5.93) stoßen auf erhebliche Schwierigkeiten. Eine experimentelle Überprüfung auf der Erde ist somit von besonderer Bedeutung. Die Entdeckung des Mössbauer Effektes erlaubte die Erzeugung von Gammastrahlen, welche mit einer Genauigkeit von 10^{-12} monochromatisch sind. 1960 wurde dann von Pound und Rebka ein solcher Test durchgeführt. Gammastrahlen, welche vom Boden ausgesandt werden, erleiden eine Rotverschiebung, wenn sie gegen das Gravitationsfeld der Erde zu der Spitze eines Turmes aufsteigen, wo sich ein Absorber befindet. Durch die Rotverschiebung werden sie weniger effektiv absorbiert. Bewegt man den Emitter mit einer kleinen – gemessenen – Geschwindigkeit aufwärts, erzeugt man eine kompensierende Dopplerverschiebung, welche es dann wieder erlaubt, die Strahlung resonant zu absorbieren. Das Ergebnis ergab $0.997 \pm 0{,}009$ mal der vorhergesagten Verschiebung von 4.92×10^{-15}, was einer Übereinstimmung von besser als 1% entspricht. Ein anderes Beispiel für Untersuchungen dieser Art war die Rotverschiebung, welche Radiosignale zeigten, als Voyager I am Saturn vorbeiflog. Eine Erhöhung der Meßgenaugigkeit um zwei Größenordnungen wurde 1976 mit einer Wasserstoff–Maser Uhr in einer Scout Rakete erreicht.

5.8 Die Zeitdilatation von Licht

Dieses Experiment wurde 1964 von Shapiro vorgeschlagen. Die Idee besteht darin, Radar–Methoden zur Bestimmung der 'Reisezeit' eines Lichtsignales im Schwerefeld zu verwenden. Da die Raumzeit gekrümmt ist, ist bei Gegenwart eines Schwerefeldes die Reisezeit länger als im Fall des flachen Raumes. Wir verwenden das Linienelement in der Form (5.57):

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right)$$

in einer äquatoralen Ebene ($\vartheta = \pi/2$) für das Licht ($\mathrm{d}s = 0$):

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 \mathrm{d}\varphi^2 = 0. \tag{5.94}$$

Um nun die Reisezeit eines Lichtstrahls berechnen zu können, muß φ durch r eliminiert werden, damit eine Differentialgleichung für $\mathrm{d}t/\mathrm{d}r$ erhalten werden kann. Wir beschränken uns nun auf Terme erster Ordnung in m/r und wir verwenden die Lösung einer geraden Linie:

$$r \cos\varphi = R.$$

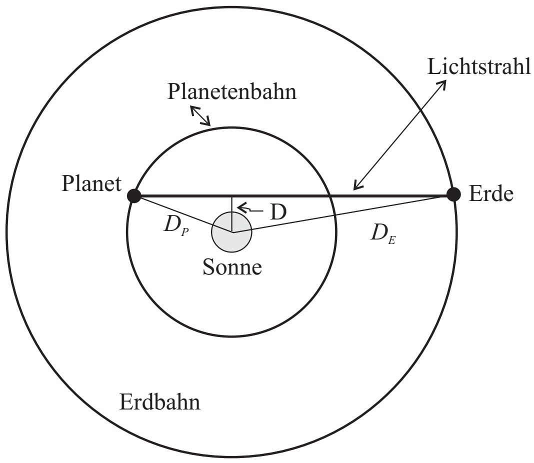

Abbildung 5.14: Geometrie zum Radarexperiment zur Messung der Zeitdilatation von Licht.

Differentiation führt zu:

$$
\begin{aligned}
-r\sin\varphi \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}r\cos\varphi &= 0 \\
r\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}r\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} &= -\mathrm{d}r\,\mathrm{ctan}\varphi \\
r^2\mathrm{d}\varphi^2 = \mathrm{ctan}^2\varphi \mathrm{d}r^2 &= \frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}\mathrm{d}r^2 \\
&= \frac{(R/r)^2}{1-(R/r)^2}\mathrm{d}r^2 \\
&= \frac{R^2}{r^2-R^2}\mathrm{d}r^2.
\end{aligned}
$$

Damit finden wir für (5.94):

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{R^2}{r^2-R^2}\mathrm{d}r^2 &= 0 \\
\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \left[\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} + \frac{R^2}{r^2-R^2}\right]\mathrm{d}r^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}t^2 &= \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}+\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\frac{R^2}{r^2-R^2}\right]\mathrm{d}r^2 \\
&\approx \frac{1}{c^2}\left[1+\frac{4m}{r}+\left(1+\frac{2m}{r}\right)\frac{R^2}{r^2-R^2}\right]\mathrm{d}r^2 \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{r^2+4mr-\frac{2mR^2}{r}}{r^2-R^2}\mathrm{d}r^2 \qquad (5.95)\\
&= \frac{1}{c^2}\frac{r^2}{r^2-R^2}\left[1+\frac{4m}{r}-\frac{2mR^2}{r^3}\right]\mathrm{d}r^2 \\
\mathrm{d}t &= \pm\frac{1}{c}\frac{r}{\sqrt{r^2-R^2}}\left[1+\frac{4m}{r}-\frac{2mR^2}{r^3}\right]^{1/2}\mathrm{d}r \\
&\approx \pm\frac{1}{c}\frac{r}{\sqrt{r^2-R^2}}\left[1+\frac{2m}{r}-\frac{mR^2}{r^3}\right]\mathrm{d}r. \qquad (5.96)
\end{aligned}
$$

Wir interessieren uns nun für die Reisezeit eines Signals zwischen einem Planeten und der Erde an der Sonne vorbei. Obige Gleichung ergibt dann (Abb. 5.14):

$$
\begin{aligned}
T = &\left[\sqrt{D_P^2-D^2}+\sqrt{D_E^2-D^2}\right] \\
&+2m\ln\left\{\left[\sqrt{D_P^2-D^2}+D_P\right]\left[\sqrt{D_E^2-D^2}+D_E\right]/D^2\right\} \\
&-m\left[\sqrt{D_P^2-D^2}/D_P+\sqrt{D_E^2-D^2}/D_E\right]
\end{aligned}
$$

mit $c=1$, D dem nächsten Abstand zur Sonne, D_P dem Abstand des Planeten von der Sonne und D_E dem Abstand der Erde von der Sonne.

Im Experiment wird ein gepulstes Radarsignal zur Venus oder zum Merkur gesandt und es wird das Eintreffen des Echos als Funktion der Position von Erde und Planet relativ zur Sonne gemessen. Für die Venus ist die Verzögerung etwa 200μs, was mit der Theorie besser als 5% übereinstimmt.

5.9 Mit Uhren rund um die Welt

Wir betrachten zwei genau gleiche Uhren A und B, die zunächst synchronisiert sind, gleich schnell gehen, und auf der Erde ruhen. A bleibt in Ruhe, während B in einer Höhe h in einem Flugzeug, dessen Geschwindigkeit in Bezug auf die Erde v ist, um die Erde herumfliegt. Nach der Umkreisung wird A mit B, also die verstrichene Eigenzeit τ_A mit der für B verstrichenen Eigenzeit τ_B verglichen. Es ist nicht zu erwarten, daß τ_A und τ_B gleich

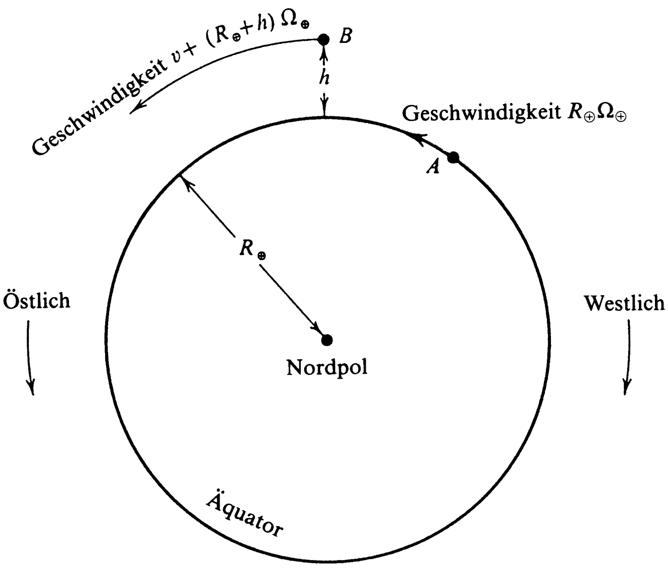

Abbildung 5.15: Das Uhren-Experiment.

sind, weil A und B zwischen dem ersten Ereignis (Synchronisation) und dem letzten (Vergleich) auf verschiedenen Bahnen gelaufen sind.

Wir verwenden:

$$\Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2\Delta\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\Delta\varphi^2.$$

Für die Uhr A gilt dann:

$$\Delta r = 0, \quad \Delta\vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad r = R_E,$$

also

$$\tau_A = \int \Delta\tau_A = \int \sqrt{\left(1 - \frac{2\kappa_0 M_E}{R_E}\right)\Delta t^2 - R_E^2\Delta\varphi^2}.$$

Die Geschwindigkeit von A relativ zum lokalen Inertialsystem ist durch

$$R_E\Omega_E = R_E\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

gegeben; dies führt zu

$$\begin{aligned}\tau_A &= \int \Delta t\sqrt{\left(1 - \frac{2\kappa_0 M_E}{R_E}\right) - R_E^2\Omega_E^2} \\ &= t\sqrt{\left(1 - \frac{2\kappa_0 M_E}{R_E}\right) - R_E^2\Omega_E^2},\end{aligned}$$

wenn t die Koordinatenzeit zwischen zwei Ereignissen ist.

Für B gilt, daß es wohl zunächst auf h gebracht werden muß, und später wiederum auf die Erdoberfläche. Wurden aber viele Umkreisungen durchgeführt, so ist dies vernachlässigbar. Es gilt dann:

$$\tau_B = \int \Delta t \sqrt{\left(1 - \frac{2\kappa_0 M_E}{R_E + h}\right) - (R_E + h)^2 \frac{\Delta\varphi^2}{\Delta t^2}}.$$

Die Koordinatengeschwindigkeit ergibt sich zu

$$(R_E + h)\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) \approx (R_E + h)\,\Omega_E + v,$$

was nur näherungsweise gilt, da die relativistische Korrektur der Geschwindigkeitsformel fehlt. (Positives v gilt für die Bewegung mit der Erde, also ostwärts.) Damit folgt:

$$\tau_B = t\sqrt{\left(1 - \frac{2\kappa_0 M_E}{R_E + h}\right) - \left[(R_E + h)\,\Omega_E + v\right]^2},$$

und der Zeitunterschied wird als

$$\delta = \frac{\tau_B - \tau_A}{\tau_A}$$

definiert, was es erlaubt die Koordinatenzeit zu eliminieren. Es gilt nun:

$$\frac{\kappa_0 M_E}{c^2 R_E} \ll 1, \quad \frac{h}{R_E} \ll 1, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad \frac{h\Omega_E}{v} \ll 1,$$

und dies ermöglicht eine Vereinfachung der Quadratwurzel. Wir erhalten

$$\delta = \frac{gh}{c^2} - \frac{2R_E\Omega_E + v}{2c^2}, \qquad g = \frac{\kappa_0 M_E}{R_E^2}.$$

Mit $h = 10^4\text{m}$ und $v = 300\text{ms}^{-1}$ folgt:

$$\delta_{v<0} = 2.1 \times 10^{-12}, \qquad \delta_{v>0} = -1.0 \times 10^{-12}.$$

Cäsiumuhren, wie sie heute Verwendung finden, haben eine Genauigkeit von 10^{-13}. Es wurde daher 1971 ein entsprechendes Experiment durchgeführt (allerdings nicht über dem Äquator, sodaß noch Korrekturen an den angegebenen Formeln anzubringen waren.) Die Ergebnisse sind aus der angeschlossenen Tabelle zu ersehen.

Umlaufrichtung	$\tau_A - \tau_B$ (Nanosekunden)			
	Experiment		Theorie	
westlich	273	7	275	21
östlich	-59	10	-40	23