Kapitel 6

Nicht rotierende schwarze Löcher

6.1 Charakterisierung der Koordinaten

Schwarze (weiße) Löcher sind wohl die signifikanteste Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie. Sie folgen als unmittelbare Konsequenz der Schwartzschildlösung. Um aber die physikalischen Konsequenzen besser diskutieren zu können, ist es zunächst notwendig, nochmals die Bedeutung unterschiedlicher Koordinatensysteme zu diskutieren, da diese bei der Interpretation der Lösungen von auschlaggebender Bedeutung sind.

Was man zum Beispiel machen kann, ist festzustellen, ob die Koordinatenhyperfläche

$$x^{(a)} = \text{konst}$$

in einem Punkt zeitartig, null, oder raumartig ist. (Der Index in den runden Klammern deutet an, welche Koordinate festgehalten wird.) Wir haben dazu das Normalenvektorfeld

$$n_b = \delta_b^{(a)}$$

oder

$$n^c = g^{cb} n_b = g^{cb} \delta_b^{(a)} = g^{c(a)}.$$

Daraus ergibt sich der Absolutbetrag:

$$n^2 = n^c n_c = g^{c(a)} \delta_c^{(a)} = g^{(a)(a)},$$

wobei über a nicht summiert wird. Haben wir nun eine Metrik mit der Signatur -2, so wird die Hyperfläche in einem Punkt P für $g^{(a)(a)} > 0$ *zeitähnlich*, für $g^{(a)(a)} = 0$ *null*, und für $g^{(a)(a)} < 0$ *raumähnlich* sein. In jedem Punkt, in welchem das Koordinatensystem regulär ist, können die Koordinatenhyperflächen jeden Charakter haben, es müssen nur die vier Normalenvektorfelder $n^b_{(a)}$ linear voneinander unabhängig sein.

Wir haben schon im 5. Kapitel diskutiert, daß natürlich der metrische Tensor in jedem Koordinatensystem beschrieben werden kann. Besitzt er aber Symmetrien, so wird es bevorzugte Koordinatensysteme geben, welche diesen Symmetrien angepaßt sind. Es sind dies die in Kap. 5.3 eingeführten Killing Vektorfelder. Hat eine Lösung mehr als ein Killing Vektorfeld, so kann man die Koordinaten auf jedes einzelne anpassen, solange die Vektorfelder kommutieren. (Bei nicht kommutierenden wird es bloß schwieriger, man kann aber trotzdem die Symmetrien dazu benützen, ein mögliches Koordinatensystem festzulegen.)

Aus (5.55) folgt nun für die Elemente des metrischen Tensors:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Daraus folgt, daß für $x^0 = t$ $g^{(0)(0)} > 0$, also zeitartig ist, während $x^1 = r$ mit $g^{(1)(1)} < 0$ raumartig ist, solange $r > 2m$ ist. $x^2 = \vartheta$ und $x^3 = \varphi$ sind stets raumartig. Der metrische Tensor ist von t unabhängig und es bestehen keine Kreuzterme mit $\mathrm{d}t$, weshalb die Lösung statisch ist, und t ist die invariant definierte Weltzeit. Die Koordinate r ist ein radialer Parameter mit der Eigenschaft, daß die 2–Kugel $t =$ konst und $r =$ konst das Standardlinienelement

$$\mathrm{d}s^2 = -r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right)$$

hat.

Daraus folgt, daß die Oberfläche der 2–Kugel durch $4\pi r^2$ gegeben ist. Dieses Ergebnis hätte man zum Beispiel nicht aufgefunden, wenn man als radialen Parameter die isotrope Koordinate r' aus (5.58), $r = \left(1 + \frac{2m}{r}\right)^2 r'$, genommen hätte. Schließlich sind dann die Koordinaten ϑ und φ die üblichen sphärischen polaren Winkelkoordinaten auf 2–Kugeln, welche durch die sphärische Symmetrie invariant definiert werden. Somit sind die Schwartzschildkoordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ kanonische Koordinaten, welche durch die sphärische Symmetrie invariant definiert sind.

Wir haben aber noch ein weiteres Problem, welches mit den Koordinaten zusammenhängt: im allgemeinen deckt ein Koordinatensystem nur einen Teil der Mannigfaltigkeit ab. So decken die Schwartzschildkoordinaten zum Beispiel nicht die Achsen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ab, da das Linienelement hier entartet (siehe (6.1)) und die Metrik nicht mehr vom Rang 4 ist. (Man kann diese Entartung leicht durch einen Übergang auf kartesische Koordinaten beheben.) Solche Punkte werden *Koodinaten – Singularitäten* genannt. Sie reflektieren die Unvollkommenheiten des verwendeten Koordinatensystems und sind damit *entfernbar*. Wir haben aber noch zwei andere Werte für Koordinaten, für welche die Schwartzschildlösung entartet: $r = 2m$ und $r = 0$. Aus den Ergebnissen von Abschnitt 5.4.4 folgt, daß

$$R = R_{abcd}R^{abcd} = 48m^2r^{-6}$$

ist, was für $r = 2m$ endlich ist. Somit ist $r = 2m$ ebenfalls eine entfernbare Koordinatensingularität, da R als Skalar in allen Koordinatensystemen invariant ist. Hingegen divergiert R für $r = 0$ und damit kann diese Singularität nicht entfernt werden. Es ist diese eine *intrinsische, Krümmungs–, physikalische*, oder *reelle Singularität*. Es folgt weiter aus (5.93), daß die Fläche $r = 2m$ eine *Fläche unendlicher Rotverschiebung* ist.

Man interpretiert nun die Schwartzschildlösung als eine Vakuumlösung im Außenbereich eines kugelförmigen Körpers vom Radius $a > 2m$. Ein anderer metrischer Tensor würde den Körper selbst für $r < a$ beschreiben und er wird dann einer bestimmten Masseverteilung in einem von Null verschiedenen Energie–Impulstensor entsprechen. Schwartzschild hat auch eine solche Lösung angegeben, welche die *innere* Schwartzschildlösung genannt wird.

Aus unserer Diskussion wurde schließlich auch klar, daß die $r = 2m$ Hyperfläche eine Nullhyperfläche ist, welche die Mannigfaltigkeit in zwei Teile zerlegt:

$$\begin{array}{ll} \text{Bereich I:} & 2m < r < \infty \\ \text{Bereich II:} & 0 < r < 2m, \end{array}$$

wobei in Bereich II r und t ihren Charakter vertauschen: r wird zeitähnlich und t raumähnlich.

6.2 Raum– und Raumzeit–Diagramme

Die Technik zur Interpretation der Lösungen besteht darin den lokalen Zukunfts–Lichtkegel zu untersuchen. Ein lokaler Lichtkegel ist dabei der Ort aller Punkte $x_0^a + \mathrm{d}x^a$ in der Umgebung des Punktes x_0^a, für welchen

$$g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^a = 0$$

ist. Der Lichtkegel schränkt mögliche Historien eines Beobachters ein, da sich ein Beobachter auf einer zeitähnlichen Weltlinie bewegt, deren Richtung in jedem Punkt innerhalb des Zukunftslichtkegels dieses Punktes liegen muß. (Der Beobachter kann sich ja nicht schneller als Licht bewegen.)

In einem *Raum–Diagramm* interessiert man sich dafür, was an verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit an zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_1 und t_2 geschieht. Zur Zeit t_1 wird von jedem interessierenden Punkt ein

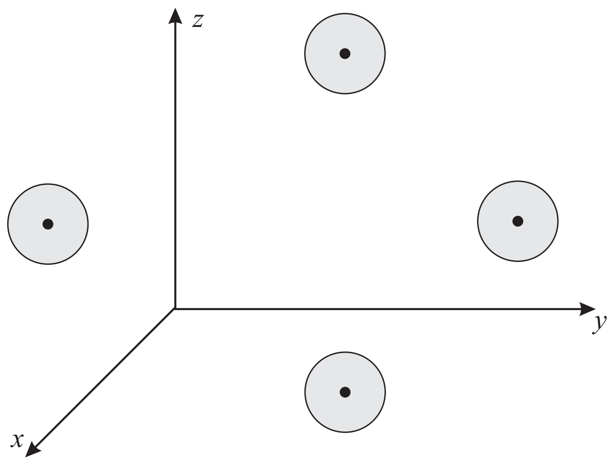

Abbildung 6.1: Das Raumdiagramm.

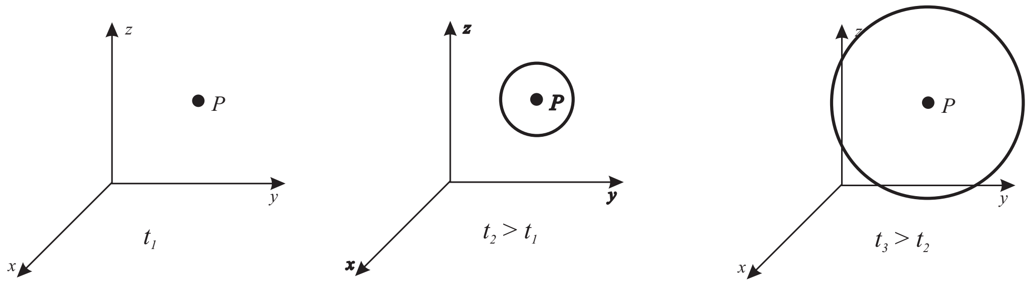

Abbildung 6.2: Das Raum–Zeit Diagramm.

Lichtblitz ausgesandt, und das Raumdiagramm gibt an, wo die Wellenfronten der Lichtblitze zur Zeit t_2 sind. In Abb. 6.1 wird das Licht aus jedem Punkt eine sphärische Wellenfront bilden, die um die Quelle zentriert ist. Sind noch spezielle Symmetrien gegeben, so kann man eine Raumdimension entfernen.

Im *Raum–Zeit Diagramm* sind wir an der Geschichte dieser Lichtblitze interessiert. Man macht etwa aufeinanderfolgende Momentaufnahmen der Wellenfronten. Die Idee besteht nun darin, diese Einzelbilder in der Zeit zu überlagern. (Dies würde im allgemeinen ein vierdimensionales Bild erfordern.) Man kann aber bei Vorliegen entsprechender Symmetrien unmittelbar zu gut lesbaren Diagrammen kommen.

In einer gekrümmten Raumzeit zeigt sich die Krümmung in Raum–Zeit Diagrammen durch zusammengedrückte oder aufgeweitete Lichtkegel; sie können auch gekippt oder verdreht sein.

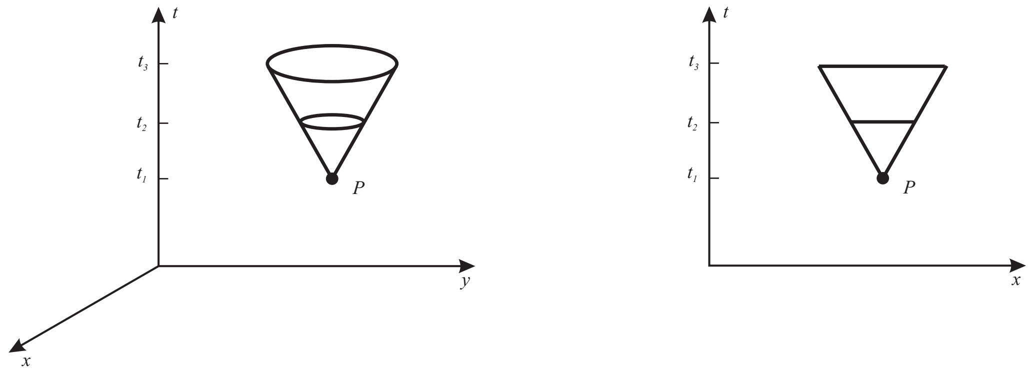

Abbildung 6.3: Überlagerte Raum–Zeit Diagramme für verschiedene Symmetrien.

6.3 Das Raumzeit–Diagramm in Schwartzschild Koordinaten

Wir wollen die Bewegung eines Photons in radialer Richtung auf das Gravitationszentrum darstellen. Dazu benötigen wir die in Abschnitt 5.5 berechnete radiale Nullgeodätische. Für sie gilt nach (5.69, 5.70):

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = D \tag{6.2}$$

$$c e^{\nu(r)} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = c\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = K \tag{6.3}$$

$$-\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1. \tag{6.4}$$

Nun gilt aber auch für das Photon:

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2 \mathrm{d}\tau^2, \tag{6.5}$$

mit $\mathrm{d}\tau$ dem Differential der Eigenzeit. Wir beziehen obige Gleichungen auf die Eigenzeit und finden:

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = B \tag{6.6}$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} = A \tag{6.7}$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\left(\frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -c^2. \tag{6.8}$$

Wir setzen (6.7) in (6.8) ein und erhalten für radiale Geodäten ($\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} &= \pm\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} && (6.9)\\ \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} &= A\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. && (6.10) \end{aligned}$$

Aus

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 = 0$$

folgt

$$\mathrm{d}r = \pm\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c\mathrm{d}t, \tag{6.11}$$

oder für positives Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r &= \left(\frac{r - 2m}{r}\right)c\mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{c}\frac{r}{r - 2m} && (6.12) \end{aligned}$$

oder ($c = 1$):

$$t = r + 2m\,\ln|r - 2m| + \mathrm{konst.} \tag{6.13}$$

In der Region I (Abb. 6.4) gilt:

$$r > 2m \rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} > 0$$

und damit nimmt r mit t zu. (6.13) beschreibt daher eine Schar von *auslaufenden* radialen Nullgeodätischen. Für das negative Vorzeichen von (6.11) finden wir mit

$$t = -\left(r + 2m\,\ln|r - 2m| + \mathrm{konst}\right) \tag{6.14}$$

die Schar *einlaufender* Nullgeodäten.

Diese Scharen von Nullgeodäten werden nun dazu benützt, das Raumzeit–Diagramm der Schwartzschildlösung in Schwartzschild Koordinaten zu zeichnen. Dabei werden die Koordinaten ϑ und φ unterdrückt. (Es ist eigentlich ein $\vartheta =$ konst, $\varphi =$ konst, r, t Diagramm). Jeder Punkt im (r, t) Diagramm stellt dabei eine 2–Kugel der Fläche $4\pi r^2$ dar. Für $t \rightarrow \infty$ schließen die Nullgeodäten Winkel von 45° mit den Koordinatenachsen ein, wie es sich für einen flachen Raum in relativistischen Einheiten gehört. Die lokalen Lichtkegel kippen in Region II, wo r und t ihren Charakter verändern. Ein Beobachter in dieser Region kann nicht in Ruhe bleiben (also auf einem konstanten Wert

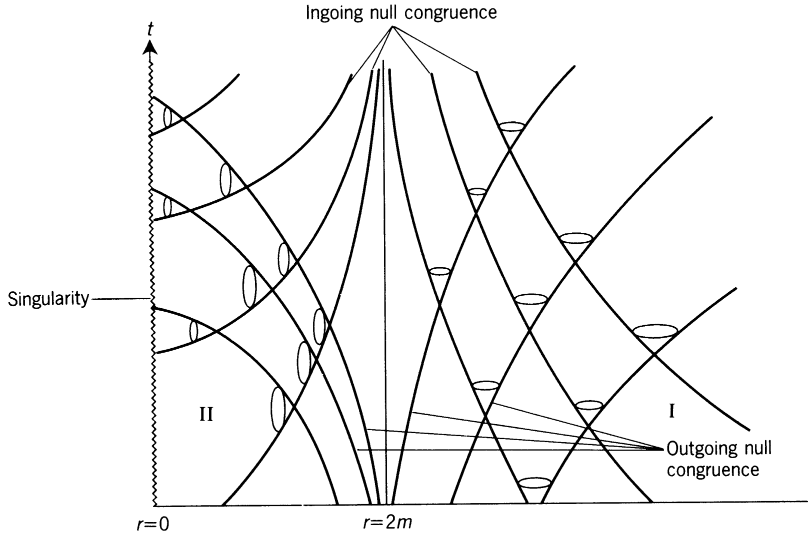

Abbildung 6.4: Die Schwartzschildlösung in Schwartzschild Koordinaten (zwei Koordinaten wurden unterdrückt).

von r); er muß sich auf die intrinsische Singularität zubewegen. Man sieht auch aus diesem Diagramm, daß ein Beobachter in Region I, welcher sich auf den Ursprung zubewegt, unendlich lange braucht um $r = 2m$ zu erreichen, dasselbe gilt auch für einen einlaufenden Lichtstrahl.

Wir wollen diese Aussage im Eigenzeitsystem des Teilchens näher untersuchen; es gilt (6.7, 6.8):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= A \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Wir wählen $A = 1$, was dem Fallenlassen eines Teilchens im Unendlichen mit der Geschwindigkeit Null entspricht. Für große r ist daher $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \simeq 1$ und damit asymptotisch $t \simeq \tau$. Es folgt dann aus (6.9) ($c = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} &= \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = \sqrt{\frac{2m}{r}} \\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r} &= \sqrt{\frac{r}{2m}} \\ \tau - \tau_0 &= \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right), \end{aligned}$$

wenn das Teilchen zur Zeit τ_0 im Punkte r_0 war. Dies ist aber genau das klassische Resultat, und wir finden am Schwartzschildradius keinerlei singuläres Verhalten. Der Körper fällt kontinuierlich nach $r = 0$ in endlicher Eigenzeit!

In Schwartzschildkoordinaten folgt hingegen:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau} = -\sqrt{\frac{r}{2m}}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \tag{6.15}$$

Für r nahe $2m$ geht $\mathrm{d}t/\mathrm{d}r$ offensichtlich gegen ∞, man nähert sich also an $r = 2m$ an, erreicht es aber nicht.

Somit ist die Zeit t nur im asymtotischen Bereich brauchbar und auch von physikalischer Bedeutung, da sie dort der Eigenzeit entspricht, welche von einem Beobachter gemessen wird, welcher sich in großer Entfernung vom Attraktionszentrum (Ursprung) befindet und dort in Ruhe ist. Es benötigt daher das Teilchen für den *Beobachter* eine unendliche Zeit um $r = 2m$ zu erreichen; das Teilchen selbst erreicht natürlich in endlicher Zeit $r = 2m$ und auch $r = 0$. Für diesen Fall sind somit die Schwartzschildkoordinaten unbrauchbar um mit ihnen die Physik der Bewegung selbst zu beschreiben – sie beschreiben die *beobachtete* Bewegung!

6.4 Eddington–Finkelstein Koordinaten

Der Gedanke ist einfach: wir wechseln zu einer neuen Zeitkoordinate, in welcher die einlaufenden radialen Nullgeodäten gerade Linien werden. Aus (6.13) folgt unmittelbar:

$$t \to \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m) \tag{6.16}$$

für $r > 2m$. Im $(\bar{t}, r, \vartheta, \varphi)$ System wird (6.14) zu

$$\bar{t} = -r + \text{konst}, \tag{6.17}$$

was einer Geraden mit Winkel von -45° zur r–Achse entspricht. (Siehe auch Abb. 6.5.) Wir differenzieren (6.16) und finden:

$$\mathrm{d}\bar{t} = \mathrm{d}t + \frac{2m}{r - 2m}\mathrm{d}r,$$

und damit folgt die *Eddington–Finkelstein Form* des Wegelementes:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}\bar{t}^2 - \frac{4m}{r}\mathrm{d}\bar{t}\mathrm{d}r - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2\right). \tag{6.18}$$

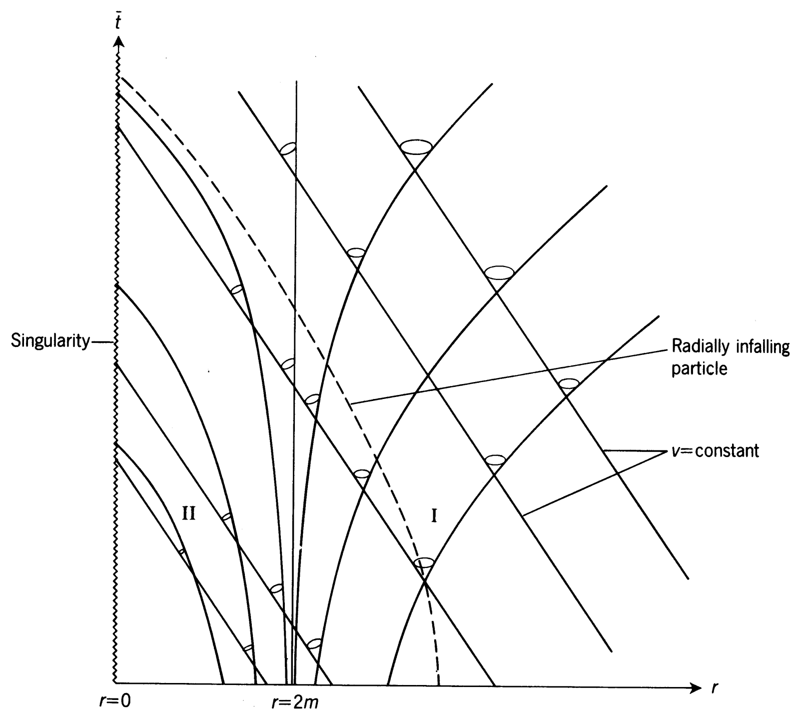

Abbildung 6.5: Die avancierten Eddington–Finkelstein Koordinaten (zwei Koordinaten wurden unterdrückt).

Offensichtlich ist (6.18) für $r = 2m$ regulär; (6.18) ist sogar im ganzen Bereich $0 < r < 2m$ regulär und damit wurde der Koordinatenbereich auf $0 < r < \infty$ ausgedehnt. Man nennt daher (6.18) auch oft die *analytische Erweiterung* der Schwartzschildlösung. Man könnte nun einwerfen, daß die Transformation (6.16) für $r = 2m$ singulär wird. Wir haben aber eigentlich von (5.53) und von (6.18) auszugehen. Der Gültigkeitsbereich von (5.53) ist für $2m < r < \infty$ gegeben, während der von (6.18) für $0 < r < 2m$ gegeben ist. Im *Überlappungsbereich* stehen die Lösungen über (6.16) in Verbindung und stellen daher *die selbe* Lösung dar.

Wir können eine weitere Lösung finden, indem wir

$$t \to t^\star = t - 2m \ln (r - 2m) \tag{6.19}$$

einführen, welches die auslaufenden radialen Nullgeodäten zu Geraden macht. Wir führen jetzt

$$v = \bar{t} + r \tag{6.20}$$

ein, den *avancierten Zeitparameter*. Wir erhalten nun:

$$\begin{aligned}
v &= \bar{t} + r; \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}\bar{t} + \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\bar{t} &= \mathrm{d}r - \mathrm{d}v \\
\mathrm{d}\bar{t}^2 &= \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}v^2 - 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r \\
\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}\bar{t}^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}r^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}v^2 - 2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}r \\
\frac{4m}{r}\mathrm{d}\bar{t}\mathrm{d}r &= \frac{4m}{r}\left(\mathrm{d}v - \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{4m}{r}\mathrm{d}v\mathrm{d}r - \frac{4m}{r}\mathrm{d}r^2.
\end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}\bar{t}^2 - \frac{4m}{r}\mathrm{d}\bar{t}\mathrm{d}r - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}r^2 = \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}r^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}v^2 - \left(2 - \frac{4m}{r}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}r - \\
&\quad \frac{4m}{r}\mathrm{d}v\mathrm{d}r + \frac{4m}{r}\mathrm{d}r^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}r^2 \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}v^2 - 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

was dann (6.18) in

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}v^2 - 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{6.21}$$

überführt. Die Schar der einlaufenden radialen Nullgeodäten ist dann durch $v =$ konst gegeben. Wir sehen (Abb. 6.5), daß das Raumzeit–Diagramm nunmehr das Verhalten radial einfallender Teilchen korrekt beschreibt.

Das Raumzeit–Diagramm unterdrückt die Winkelinformation der Schwartzschild Lösung. Man muß daher ein Raumdiagramm, etwa in der Äquatorialebene (Abb. 6.7) zeichnen. Weit vom Ursprung entfernt sieht das Bild wie ein Bild der speziellen Relativitätstheorie aus. Näher zum Ursprung werden die Wellenfronten einwärts gezogen, womit die Quellen nicht mehr im Zentrum sind. Innerhalb von $r = 2m$ werden sie dann nach Innen gezogen, selbst "auslaufende" Wellenfronten. Somit wirkt die Fläche $r = 2m$ wie eine *Einwegmembran*; sie läßt zukunftsgerichtete zeitartige und Null–Kurven von Region I in die Region II übertreten. Keine zukunftsgerichteten, null, oder zeitartigen Kurven können aus Region II entkommen. Die Fläche $r = 2m$ wird daher *Ereignishorizont* genannt, da sie eine Grenze für alle Ereignisse

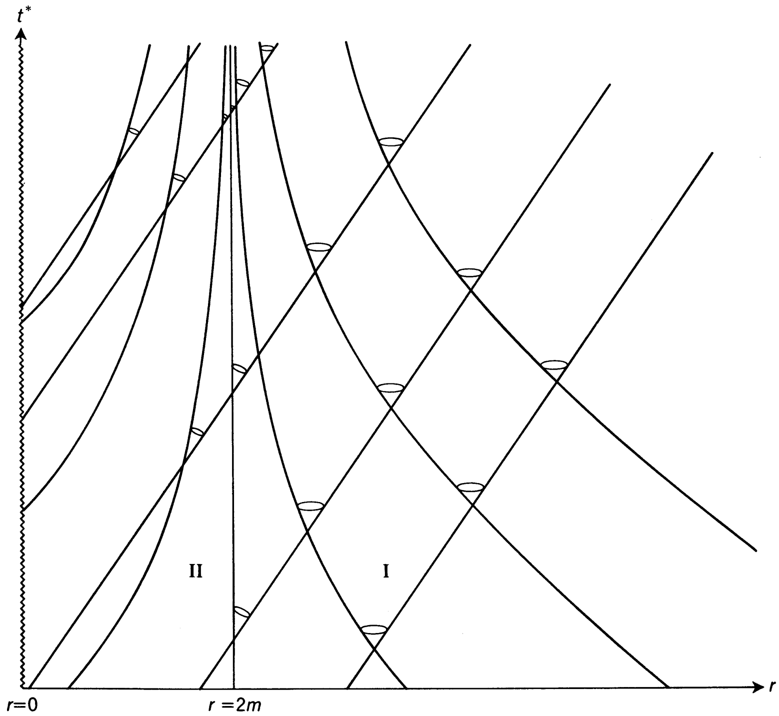

Abbildung 6.6: Die Eddington–Finkelstein Koordinaten mit retardiertem Zeitparameter (zwei Koordinaten wurden unterdrückt).

darstellt, welche im Prinzip von einem externen, ruhenden Beobachter registriert werden können. Der Schwartzschild–Ereignishorizont ist absolut, da er alle inneren Ereignisse vom externen Beobachter abschirmt.

Verwenden wir andererseits die Null–Koordinate

$$w = t^\star - r,$$

welche auch *retardierter Zeitparameter* genannt wird, so erhalten wir das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}w^2 + 2\mathrm{d}w\mathrm{d}r - r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{6.22}$$

Diese Lösung ist wiederum regulär für $0 < r < \infty$. Die Fläche $r = 2m$ ist wiederum eine Null–Oberfläche, welche als Einweg–Membrane wirkt. Diesmal allerdings können in die Vergangenheit gerichtete zeitartige oder Null–Geodäten von außen nach innen gelangen (Abb. 6.6).

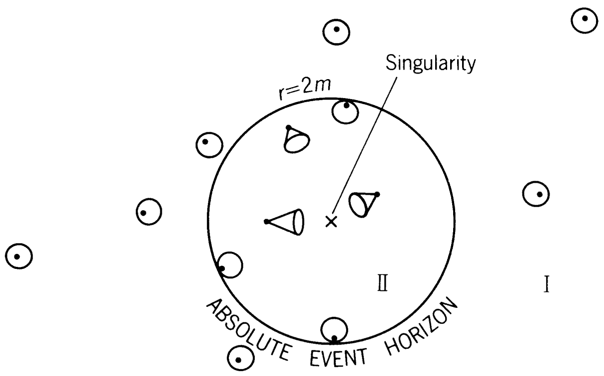

Abbildung 6.7: Raumdiagramm der Schwartzschildlösung in der Äquatorialebene. (Avancierte Eddington–Finkelstein Koordinaten)

6.5 Schwarze Löcher

Die Theorie der Sternentwicklung sagt aus, daß Sterne von der Masse der Sonne einen Gleichgewichtszustand als weißer Zwerg oder Neutronenstern erreichen. Für wesentlich größere Massen ist ein solches Gleichgewicht nicht möglich, und der Stern wird sich derart zusammenziehen, daß die Gravitationskräfte die internen Drücke und Spannungen überwinden und so zu einer weitergehenden Kontraktion führen. Die allgemeine Relativitätstheorie sagt für einen solchen Fall voraus, daß ein sphärisch symmetrischer Stern sich notwendig so lange zusammenzieht bis seine gesamte Masse an der Singularität im Zentrum angekommen ist.

Der Kollaps des sphärisch symmetrischen, nicht rotierenden Sternes setzt sich fort bis die Oberfläche den Schwarzschildradius erreicht. Solange er sphärisch symmetrisch bleibt, ist das externe Feld durch die Schwartzschildlösung gegeben. Der Beobachter kann dann entsprechend Abb. 6.8 den Kollaps des Sternes beobachten. Allerdings werden die in regelmäßigen Abständen von der Oberfläche des Sternes ausgesandten Signale in immer größeren Intervallen beim Beobachter ankommen. Tatsächlich wird der Stern aber bald vom Beobachter wegen der rapide sinkenden Intensität nicht mehr beobachtet werden können. Der Stern läßt also im Raum ein *schwarzes Loch* zurück.

Da die Theorie zeitumkehrinvariant ist, erlaubt sie auch die Umkehrung des schwarzen Loches – das *weiße Loch*. Es erscheint also plötzlich ein Stern . . .

Wir wollen nun im weiteren eine Verteilung von nicht wechselwirkenden Teilchen untersuchen, welche dem Gravitationszentrum frei entgegenfallen. Die ursprüngliche Verteilung sei dabei kugelförmig. Nun fallen aber die, wel-

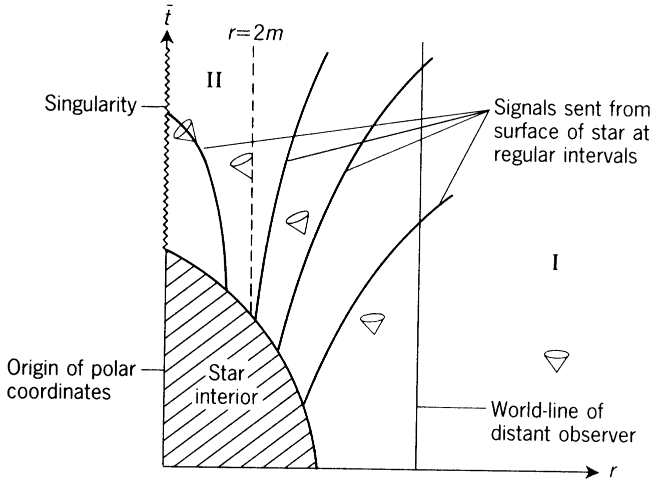

Abbildung 6.8: 'Beobachten' eines Stern–Kollapses.

che dem Gravitationszentrum näher sind, schneller und außerdem fällt jedes einzelne auf einer Linie, welche durch das Erdzentrum geht. Die Kugel wird dadurch in ein Ellipsoid verformt – die Gravitation verursacht somit eine *Gezeitenkraft* in der Teilchenkugel. Der Effekt ist eine Verlängerung der Verteilung in Richtung der Bewegung und eine Verengung senkrecht dazu. Dasselbe geschieht nun natürlich auch mit einem ausgedehnten Körper, und wenn dieser in ein schwarzes Loch fällt, so ist dies natürlich besonders ausgeprägt.

Man versteht dies besser, wenn man Ergebnisse verwendet, welche im Rahmen der Bestimmung der geodätischen Abweichung (Kap. 4.3.2 und Kap. 4.4) gewonnen wurden. Wir fanden für die geodätische Abweichung (4.21 und 4.22):

$$\frac{\mathrm{D}^2\eta^{(\alpha)}}{\mathrm{D}\tau^2} - R^a_{bcd} e^{(\alpha)}_a v^b v^c e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)} = 0 \tag{6.23}$$

für die raumartigen Komponenten des orthogonalen Verbindungsvektors η^a, welcher hier zwei fallende Partikel verbindet. (In den früheren Kapiteln hatte dieser Vektor zwei geodätische Linien verbunden.) Wir definieren nun das

Vierbein e_i^a in Schwartzschildkoordinaten:

$$\begin{aligned}
e_0^a &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\
e_1^a &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \\
e_2^a &= r^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \\
e_3^a &= (r\sin\vartheta)^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und η^a sei durch

$$\eta^a = \begin{pmatrix}\eta^1 & \eta^2 & \eta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta^r & \eta^\vartheta & \eta^\varphi\end{pmatrix}$$

gegeben. Wir erhalten:

$$\frac{\mathrm{D}^2\eta^r}{\mathrm{D}\tau^2} = \frac{2m}{r^3}\eta^r; \qquad \frac{\mathrm{D}^2\eta^\vartheta}{\mathrm{D}\tau^2} = -\frac{m}{r^3}\eta^\vartheta; \qquad \frac{\mathrm{D}^2\eta^\varphi}{\mathrm{D}\tau^2} = -\frac{m}{r^3}\eta^\varphi. \tag{6.24}$$

Das positive Vorzeichen für η^r deutet die Streckung in Radialrichtung an, während die negativen Vorzeichen für die Winkelanteile die Stauchung in den transversalen Richtungen angibt.

Wir wollen nun eine dieser Beziehungen im Detail ableiten. Es sind folgende grundlegende Beziehungen gegeben:

$$\begin{aligned}
g^{ik} &= \mathrm{diag}\left[\left(1-\tfrac{2m}{r}\right)^{-1} \quad -\left(1-\tfrac{2m}{r}\right) \quad -\tfrac{1}{r^2} \quad -\tfrac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\right] \\
g_{ik} &= \mathrm{diag}\left[\left(1-\tfrac{2m}{r}\right) \quad -\left(1-\tfrac{2m}{r}\right)^{-1} \quad -r^2 \quad -r^2\sin^2\vartheta\right],
\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich folgende Kette:

$$g_{ab} \to \Gamma_{abc} \to \Gamma^a_{bc} \to R^a_{bcd}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{abc} &= \frac{1}{2}\left(\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{ac} - \partial_a g_{bc}\right) \\
\Gamma^a_{bc} &= g^{ar}\Gamma_{rbc} \\
R^a_{bcd} &= \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ra}\Gamma^r_{bd} - \Gamma^a_{rd}\Gamma^r_{bc}.
\end{aligned}$$

Aus den allgemeinen Symmetriebeziehungen folgt, daß nur vier Elemente des Riemannschen Tensors von Null verschieden sind, nämlich

$$R_{0101}, \quad R_{0202}, \quad R_{2323}, \quad R_{1212}.$$

Damit ergibt sich aus (6.23), etwa für $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}^2\eta^1}{\mathrm{D}\tau^2} &= R^a_{bcd} e^{(1)}_a v^b v^c e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)} \\
&= g^{ar} R_{rbcd} e^{(1)}_a v^b v^c e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)} \\
&= g^{aa} R_{abcd} e^{(1)}_a v^b v^c e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)} \\
& \quad [\text{da nur eine Radialbewegung stattfindet, gilt: } b = c = 1] \\
&= g^{aa} R_{a11d} e^{(1)}_a v^1 v^1 e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)} \\
&= -g^{aa} R_{a1d1} e^{(1)}_a v^1 v^1 e^d_{(\beta)} \eta^{(\beta)} \\
& \quad [\text{Symmetrien des Riemann Tensors: } a = d]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g^{aa} R_{a1a1} e^{(1)}_a v^1 v^1 e^a_{(\beta)} \eta^{(\beta)} \\
& \quad \left[e^{(\alpha)}_a e^a_{(\beta)} = \delta^\alpha{}_\beta\right] \\
&= -g^{aa} R_{a1a1} e^{(1)}_a v^1 v^1 e^a_{(1)} \eta^{(1)} \\
& \quad \left[e^{(\alpha)}_a e^b_{(\alpha)} = \delta^b{}_a\right] \\
&= -g^{aa} R_{a1a1} v^1 v^1 \eta^{(1)} \\
& \quad \left[v^1 = g^{1r} v_r = g^{11} v_1\right] \\
&= -g^{aa} g^{11} R_{a1a1} v^1 v_1 \eta^{(1)} \\
& \quad \left[v^1 v_1 = 1, \text{ da } v \text{ ein Tangenteneinheitsvektor ist}\right] \\
&= -g^{aa} g^{11} R_{a1a1} \eta^{(1)} \\
& \quad [\text{Symmetrien des Riemann Tensors: } a = 0] \\
&= -g^{00} g^{11} R_{0101} \eta^{(1)} \\
&= -g^{11} R^0_{101} \eta^{(1)}.
\end{aligned}$$

Es ist also noch das Element R^0_{101} des Riemannschen Krümmungstensors zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
R^0_{101} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{r0}\Gamma^r_{11} - \Gamma^r_{10}\Gamma^0_{r1} \\
\Gamma^0_{r0}\Gamma^r_{11} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{11} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{11} \\
\Gamma^0_{r1}\Gamma^r_{10} &= \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} + \Gamma^0_{21}\Gamma^2_{10} + \Gamma^0_{31}\Gamma^3_{10} \\
\Gamma^0_{11} &= g^{0r}\Gamma_{r11} = g^{00}\Gamma_{011} \\
\Gamma_{011} &= \frac{1}{2}\left(\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}\right) = 0 \\
&\rightarrow \partial_0\Gamma^0_{11} = 0 \\
\Gamma^0_{10} &= g^{0r}\Gamma_{r10} = g^{00}\Gamma_{010} \\
\Gamma_{010} &= \Gamma_{001} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{01}\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_1 g_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \frac{m}{r^2} \\
\Gamma^0_{10} &= \frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} \\
\partial_1\Gamma^0_{10} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right) \\
&= -\frac{2m}{r^3}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} + \frac{m}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{r-2m}\right) \\
&\left[\begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{r-2m} &=& \frac{1}{r-2m} - \frac{r}{(r-2m)^2} \\
&=& \frac{r-2m-r}{(r-2m)^2} \\
&=& -\frac{2m}{(r-2m)^2}
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2m}{r^3}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{m}{r^2}\frac{2m}{(r-2m)^2} \\
&= -\frac{2m}{r^3}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{2m^2}{r^4}\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2} \\
\Gamma^0_{00} &= g^{0r}\Gamma_{r00} = g^{00}\Gamma_{000} \\
\Gamma_{000} &= \frac{1}{2}\left(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) = 0 \\
\Gamma^1_{11} &= g^{1r}\Gamma_{r11} = g^{11}\Gamma_{111} \\
\Gamma_{111} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2m}{(r-2m)^2} = \frac{m}{(r-2m)^2} = \frac{m}{r^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2} \\
\Gamma^1_{11} &= -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{m}{r^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2} = -\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} \\
\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} &= -\left(\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)^2 \\
\Gamma^2_{11} &= g^{22}\Gamma_{211} \\
\Gamma_{211} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}\right) = 0 \\
\Gamma^3_{11} &= g^{33}\Gamma_{311} = 0 \\
\Gamma^0_{01}\Gamma^0_{10} &= \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} = \left(\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)^2 \\
\Gamma^0_{21} &= g^{00}\Gamma_{021} \\
\Gamma_{021} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{02} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{21}\right) = 0 \\
\Gamma^0_{31} &= g^{00}\Gamma_{031} = 0.
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{r0}\Gamma^r_{11} - \Gamma^0_{r1}\Gamma^r_{10} &= \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{10} \\
&= -2\left(\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= \frac{2m}{r^3}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} + 2\left(\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{r^2}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)^2 \\ &= \frac{2m}{r^3}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}. \end{aligned}$$

Schließlich folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}^2\eta^r}{\mathrm{D}\tau^2} &= -g^{11}R^0_{101}\eta^r \\ &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{2m}{r^3}\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\eta^r \\ &= \frac{2m}{r^3}\eta^r \qquad\qquad \textbf{w.z.b.w} \end{aligned}$$

Die weiteren Gleichungen aus (6.24) folgen analog.

Wir wollen nun die longitudinale Spannungskomponente im Massenzentrum bestimmen: ein Volumselement habe die Masse $\mathrm{d}\mu$ und sei in der Höhe h über dem Massenzentrum angesiedelt (gemessen in r–Richtung). Könnte sich dieses Element frei bewegen, so würde es sich mit einer Beschleunigung $a = (2m/r^3)h$ vom Massenzentrum wegbewegen. Somit ergibt sich die Kraft, welche zum Zusammenhalt notwendig ist:

$$\mathrm{d}F = a\mathrm{d}\mu = \frac{2m}{r^3}\,h\mathrm{d}\mu.$$

Die Gesamtkraft ergibt sich nun aus der Summe der Einzelkräfte:

$$\begin{aligned} F &= \int\limits_{\substack{\text{Bereich oberhalb}\\ \text{des Schwerpunktes}}} \mathrm{d}\mu\, a \\ &= \int_0^{l/2} \mathrm{d}h\,\frac{2mh}{r^3}\frac{\mu}{lw}w^2 \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mu m l}{r^3}. \end{aligned}$$

Hiebei wurde ein homogener, rechteckiger Körper der Masse μ, der Länge l, sowie der Breite und Tiefe w in den ϑ– und φ–Richtungen angenommen. Die Spannung ist dann die Kraft dividiert durch die Querschnittsfläche w^2, also

$$T_{rr} = -\frac{1}{4}\frac{\mu m l}{w^2 r^3}.$$

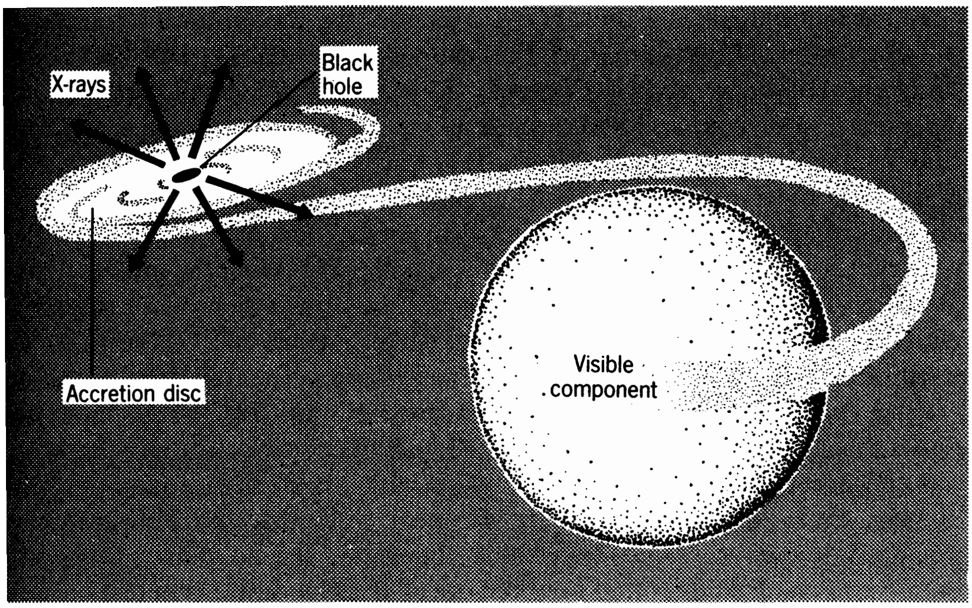

Abbildung 6.9: Mögliche Konstellation zur Auffindung eines schwarzen Loches.

Analog findet man

$$T_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{8}\frac{\mu m}{l r^3}.$$

Der Körper, welcher sich auf das schwarze Loch zubewegt, wird also immer dünner und immer länger, bis dann bei $r = 0$ eine unendliche Massendichte erreicht ist. Wurde einmal der Ereignishorizont überschritten, so ist der Fall in die Singularität $r = 0$ nicht mehr vermeidbar.

6.6 Evidenz für schwarze Löcher

Eine direkte Beobachtung ist natürlich nicht möglich (außer man sieht zufällig einen Stern verschwinden). Man sucht nach Doppelsternsystemen mit einer nicht sichtbaren Komponente. Es gibt einen Punkt auf der Linie zwischen dem primären (sichtbaren) Stern und seinem unsichtbaren Begleiter, in welchem das Gravitationspotential flach ist. Diesen Punkt bezeichnet man als den *Lagrange Sattelpunkt*, L_1. Die Äquipotentialfläche, welche beide Sterne umschließt und durch L_1 geht, wird der *Roche–Lappen* genannt und ist in Abb. 6.10 schematisch dargestellt. Überschwemmt nun das vom primären Stern abgegebene Gas den Roche–Lappen während einer Periode der Expansion, so wird dieses Gas in den unsichtbaren Begleiter stürzen. Fließt darüber hinaus das Gas in L_1 langsamer als sich der Begleiter um den Primärstern bewegt, so wird der resultierende Drehimpuls dazu führen, daß das Gas hinter dem Begleiter herumfließen wird. Auf diese Weise entsteht die in Abb. 6.9 dargestellte *Adhäsionsscheibe*. Durch die Abgabe von Synchrotronstrahlung verliert das ionisierte Gas an Drehimpuls, und das angezogene Gas fällt längs einer spiralförmigen Bahn in den Begleiter. Es wird mehr und mehr Gravitationsenergie in Wärme umgesetzt, bis Röntgen–Temperaturen erreicht sind. (Es ist sicher von Interesse, festzustellen, daß die Menge an Gravitationsenergie, welche dabei in Strahlung umgewandelt wird, einen beachtlichen Teil der Restmasse ausmachen kann; dadurch wird dieser Prozess wesentlich effektiver in der Energieerzeugung als jede Kernreaktion.)

Wie bereits festgestellt, ist der Begleiter des Doppelsternsystems nicht sichtbar, man kann aber manchmal seine Bahn und seine Masse abschätzen, indem man Dopplerdaten des Primärsternes benützt. Aus dieser Information kann man die Periode und die Geschwindigkeitsveränderung relativ zum und vom Beobachter auf der Erde bestimmen und daraus kann man eine Beziehung zwischen den Massen M_1 und M_2 des Doppelsternsystems herstellen und auch den Neigungswinkel der Bewegungsebene feststellen.

Es gibt etwa fünf Kandidaten für ein schwarzes Loch. Der bedeutendste Kandidat wurde 1971 mit Cygnus X–I entdeckt; inzwischen hat man noch weitere mögliche Kandidaten entdeckt. In allen Fällen handelt es sich um binäre Systeme, welche schnelle Variationen in der abgestrahlten Röntgenstrahlung zeigen, und wo die beteiligten Massen $> 3M_{\text{Sonne}}$ sind. Da aber weiße Zwerge und Neutronensterne bei Massen bis zu $3M_{\text{Sonne}}$ liegen, ist der einfachste Schluß der, daß hier ein schwarzes Loch vorliegt.

6.7 Die relativistische Sternstruktur

6.7.1 Die Strukturgleichungen

Wir wollen in diesem Abschnitt das Problem der Sternstruktur im Bild des Energie–Impulstensors der idealen Flüssigkeit entwickeln. Dieses Modell entspricht einer kalten katalytischen Sternmaterie. Wir müssen hier eine passende Form für die Metrik finden und ihre Beziehung zur Dichte und zum Druck im Inneren des Sternes herstellen.

Wir wollen hier stets annehmen, daß wir es mit einer statischen, sphärisch symmetrischen Massenkonfiguration zu tun haben, in welcher Dichte und Druck nur von der Radialkoordinate r abhängen:

$$\rho = \rho(r), \qquad p = p(r).$$

Es wird weiter angenommen, daß zwischen diesen beiden Größen eine lokale

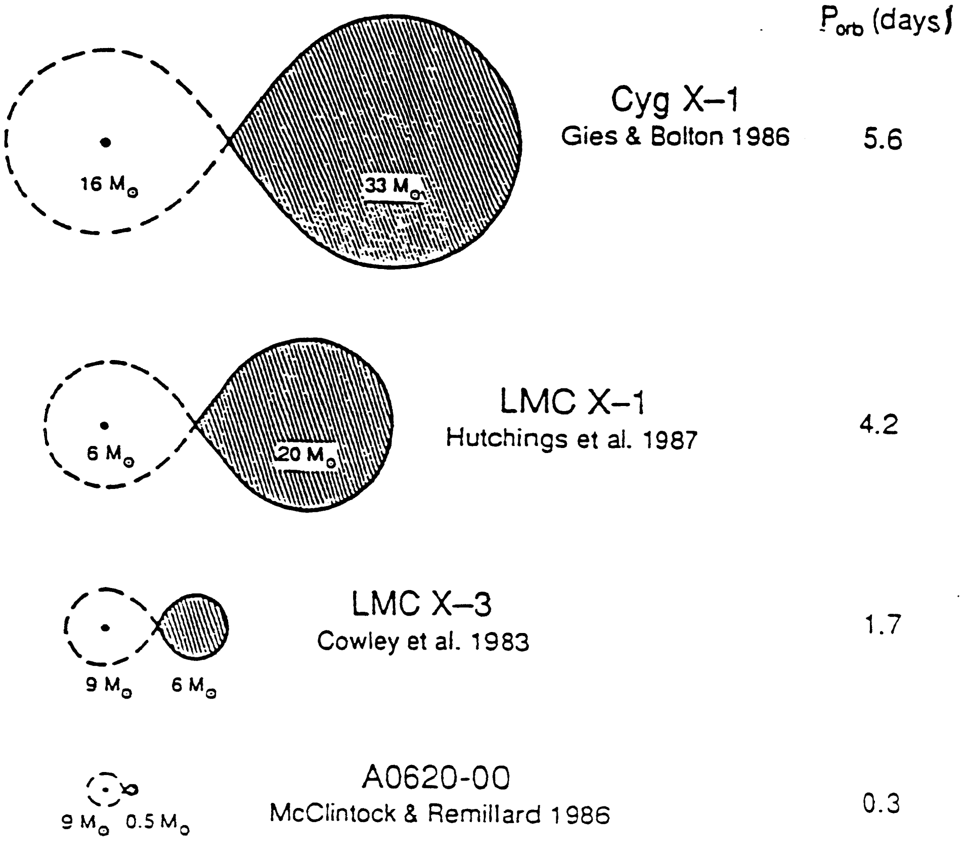

Abbildung 6.10: Vier mögliche Doppelsternsysteme mit einem schwarzen Loch als Partner. Darstellung des Roche–Lappen.

Beziehung besteht, die *Zustandsgleichung*:

$$p = p(\rho).$$

Es gilt wieder die Schwartzschildmetrik, also:

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu} c^2 \mathrm{d}t^2 - \left[e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right],$$

wobei $\nu = \nu(r)$ und $\lambda = \lambda(r)$ aus den Feldgleichungen zu bestimmen sind. Der Energie–Impulstensor entspricht der in (4.34) angegebenen Form, wobei wir noch über den Spannungstensor $p^{\mu\nu}$ zu befinden haben werden. Wir spalten zunächst den Materietensor ab:

$$M^{ab} = \rho_0 u^a(x) u^b(x); \qquad u^a(x) = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\tau}. \tag{6.25}$$

Der Einfluß der inneren Kräfte kann nun so eingebaut werden, wie es bereits in Kap. 4.6.1 angedeutet wurde: man setzt die Divergenz eines passend eingeführten Energie–Impulstensors gleich Null, was dann zu den korrekten Bewegungsgleichungen führt und damit die Erhaltung der Energie ausdrückt.

Wir arbeiten zunächst im klassischen Grenzfall, mit kleinen Flüssigkeitsgeschwindigkeiten und geringem Druck. Man kann dann Terme der Ordnung v^2/c^2 und $p(v/c)$ vernachlässigen. Ist der Druck auch klein genug, dann kann man die elastische Energiedichte der Flüssigkeit gegenüber der Energie aufgrund der Massendichte vernachlässigen. Dann kann man die Energieerhaltung vollständig über die Materiedichte beschreiben:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla\left(\rho_0 \mathbf{v}\right) = 0. \tag{6.26}$$

Aus der Fluiddynamik folgt weiters, daß die kräftefreie Bewegung eines Materiefelds durch Nullsetzen der Eulerschen Ableitung beschrieben wird. Die Eulersche Ableitung (Änderungsrate) einer Größe $Q(x)$ ist dabei durch

$$\frac{\mathrm{D}Q}{\mathrm{D}t} \stackrel{!}{=} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x^\alpha} v^\alpha = \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla Q$$

gegeben. Für den Materiefluß $\rho_0 \mathbf{v}$ gilt dann

$$\frac{\mathrm{D}v^\alpha}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla v^\alpha = 0.$$

Bei Vorhandensein von Druck enthält diese Gleichung dann auf der rechten Seite eine Volumenskraft, welche dem Druckgradienten entgegengesetzt ist:

$$\rho_0 \frac{\mathrm{D}v^\alpha}{\mathrm{D}t} = \rho_0 \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla v^\alpha\right) = f^\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}. \tag{6.27}$$

Diese Gleichung entspricht dem zweiten NEWTONschen Gesetz.

Das Ergebnis ist aber ganz offensichtlich noch nicht relativistisch invariant – wir müssen auf eine Tensorformulierung übergehen: verwenden wir (6.25), so können wir für die Erhaltung der Energie (6.26) auch

$$\partial_i M^{0i} = c\left[\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla\left(\rho_0 \mathbf{v}\right)\right] = 0 \tag{6.28}$$

schreiben. Für die Bewegungsgleichung (6.27) finden wir nun aber:

$$\partial_i M^{\alpha i} = \frac{\rho_0}{c^2}\frac{\mathrm{D}v^\alpha}{\mathrm{D}t} = \frac{\rho_0}{c^2}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla v^\alpha\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} \neq 0 \tag{6.29}$$

wodurch M^{ab} nicht divergenzfrei ist, wenn eine innere Kraft vorhanden ist. Zur Behebung dieses Problemes führen wir die Matrix

$$\partial_\mu S^{\nu\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x^\mu}; \qquad S^{\nu\mu} = \frac{p}{c^2}\mathrm{diag}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

ein, wobei S der bekannte dreidimensionale Spannungstensor ist. Seine Divergenz ist eine Kraft, und damit kann man (6.29) auch als

$$\partial_i M^{\alpha i} + \partial_\mu S^{\alpha\mu} = 0$$

schreiben. Wir können S sogar auf eine 4×4–Matrix erweitern:

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und zusammenfassen:

$$\partial_j \left(M^{ij} + S^{ij} \right) = \partial_j T^{ij} = 0 \tag{6.30}$$

mit

$$T^{ij} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_x}{c} & \frac{v_y}{c} & \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_y}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_z}{c} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

im klassischen Limes. Man hat aber zu beachten, daß wegen der nicht kovarianten Beziehung zwischen $\mathbf{v}$, p und T^{ij}, T^{ij} selbst kein Tensor ist.

Es soll nun aber (6.31) so verallgemeinert werden, daß (6.31) ein echter Tensor wird. M^{ij} ist dabei kein Problem, es muß also nur für S^{ij} eine passende Form gefunden werden. Man kann diese finden, wenn man beachtet, daß mit der Flüssigkeit nur zwei Tensoren zweiter Stufe verknüpft sind, nämlich g^{ij} und $u^i u^j$. Somit muß S^{ij} eine Linearkombination der Form

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} \left[\alpha u^i u^j + \beta g^{ij} \right]$$

sein, welche sich auf (6.31) für kleine Geschwindigkeiten und Drücke reduziert. Vernachlässigt man v^2/c^2 und $p(v/c)$, so findet man

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} \left[\alpha \, \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \, \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

und wir sehen, daß mit $\alpha = -\beta = 1$ Übereinstimmung mit (6.31) erzielt wird. Damit haben wir den vollständigen Energie–Impulstensor in der Form

$$T^{ik} = \rho_0 u^i u^k + \frac{p}{c^2} \left(u^i u^k - g^{ik} \right) \tag{6.32}$$

aufgefunden.

In Korrespondenz zur klassischen Matrixgleichung (6.30) nehmen wir nun an, daß der vollständige Energie–Impulstensor die Divergenz Null im flachen Riemann Raum besitzt:

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \tag{6.33}$$

Wir müssen nun (6.32) dahingehend erweitern, daß wir ρ_0 durch ρ ersetzen; wir schreiben

$$T_{ik} = \rho u_i u_k + \frac{p}{c^2}\left(u_i u_k - g_{ik}\right). \tag{6.34}$$

Die Materie ist aber in jedem Punkt in Ruhe und damit ergeben sich die Komponenten des Vierer–Geschwindigkeitsvektors mit

$$u^i = \begin{pmatrix} u^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

es ist dann auf der Trajektorie jedes Materieteilchens der Flüssigkeit die Beziehung zwischen Eigenzeit und Koordinatenzeit durch

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\left(\mathrm{d}x^0\right)^2 = g_{00}c^2\mathrm{d}t^2 \quad \rightarrow \quad 1 = g_{00}\left(u^0\right)^2$$

gegeben. Wir haben weiter

$$u_0 = g_{0i}u^i = g_{00}u^0 = \sqrt{g_{00}},$$

da die u_α alle gleich Null sind. Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \rho \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{p}{c^2}\begin{pmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{c^2}e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{c^2}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{c^2}r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.35}$$

für jede Flüssigkeit in Ruhe. Wir setzen dies nun in die verallgemeinerten Feldgleichungen ein:

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}T^{ik}. \tag{6.36}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned} G^{ik} &= g^{rk}G^i{}_r \\ g^{rk}R^i{}_r - \frac{1}{2}g^{rk}g^i{}_r R &= -\frac{8\pi\kappa}{c^2}g^{rk}T^i{}_r. \end{aligned}$$

Wir verjüngen $(r = i)$

$$\underbrace{R^i{}_i}_{=R} - \frac{1}{2}\underbrace{g^i{}_i}_{=4} R = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\underbrace{T^i{}_i}_{=T}$$

$$-R = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}T,$$

wobei mit T der *Laue Skalar* eingeführt wurde. Also folgt für (6.36):

$$\begin{aligned} R^{ik} &= -\frac{8\pi\kappa}{c^2}T^{ik} + \frac{1}{2}g^{ik}R \\ &= -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\left(T^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}T\right). \end{aligned} \tag{6.37}$$

Setzen wir nun (6.35) in (6.37) ein, so erhalten wir einen Satz von Gleichungen, welche die geometrischen Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ mit den Flüssigkeitsparametern $\rho(r)$ und $p(r)$ in Beziehung setzen, wobei natürlich (6.37) eine besonders günstige Form hat, da T unmittelbar aus (6.35) bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} T^i{}_k &= g^{ir}T_{rk} = g^{ii}T_{ik} \\ T^i{}_i &= g^{ii}T_{ii} = \rho - 3\frac{p}{c^2}. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Somit sind alle von Null verschiedenen Terme aus (6.37) bekannt und wir erhalten:

$$\begin{aligned} T_{00} - \tfrac{1}{2}g_{00}T &= \tfrac{e^\nu}{2}\left(\rho + \tfrac{3p}{c^2}\right) \\ T_{11} - \tfrac{1}{2}g_{11}T &= \tfrac{e^\lambda}{2}\left(\rho - \tfrac{p}{c^2}\right) \\ T_{22} - \tfrac{1}{2}g_{22}T &= \tfrac{r^2}{2}\left(\rho - \tfrac{p}{c^2}\right) \\ T_{33} - \tfrac{1}{2}g_{33}T &= \tfrac{r^2\sin^2\vartheta}{2}\left(\rho - \tfrac{p}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{6.39}$$

Die R_{ik} sind wiederum aus (5.49 etc.) bekannt:

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right) \\ R_{11} &= \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}\right) - 1 \\ R_{33} &= R_{22}\sin^2\vartheta. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $C = -8\pi\kappa/c^2$, so folgen aus (6.36, 6.39 mit 5.49 etc.) die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right] &= \frac{C}{2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \\ e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right] &= \frac{C}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \\ e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right] - \frac{1}{r^2} &= \frac{C}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{6.40}$$

Die Gleichung für R_{33} wurde nicht angeschrieben, da sie der für R_{22} proportional ist. Wir addieren die ersten beiden:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'+\nu'}{r}\right)=C\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right). \tag{6.41}$$

Nachdem nun C negativ ist und sowohl Dichte als auch Druck größer oder gleich Null sind, folgt, daß $\lambda'+\nu'$ positiv oder gleich Null sind. Letzteres gilt nur für den freien Raum, also für $\rho=p=0$. Wir lösen zunächst (6.41) zusammen mit der dritten Gleichung aus (6.40):

$$\begin{aligned}
C\frac{p}{c^2} &= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'+\nu'}{r}\right)-C\rho\\
e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'-\lambda'}{2r}\right)-\frac{1}{r^2} &= \frac{C}{2}\rho+\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{\lambda'+\nu'}{r}\right)+\frac{C}{2}\rho\\
C\rho &= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{6.42}$$

und analog:

$$C\frac{p}{c^2}=\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right). \tag{6.43}$$

Schließlich eliminiert man noch ρ and p aus den letzten zwei Gleichungen von (6.40):

$$\frac{e^{\lambda}}{r^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'+\lambda'}{2r}-\frac{\nu''}{2}. \tag{6.44}$$

Bisher wurden Dichte und Druck der Flüssigkeit als unabhängige Variable behandelt, die Gleichungen (6.42, 6.43 and 6.44) bestimmen aber nur 3 von 6 Unbekannten. Zur Vervollständigung wird noch eine *Zustandsgleichung* $p=p(\rho)$ der Flüssigkeit eingeführt.

(Es besteht eine andere interessante Möglichkeit: e^{ν} könnte innerhalb des Sterns beliebig sein; man kann aber fordern, daß $\nu=1-2m/r$ an der Grenze ist, also dort der Schwartzschildlösung entspricht. Dann ist (6.44) eine einfache Differentialgleichung erster Ordnung, welche nach λ aufgelöst werden kann. Dann können ρ und p aus (6.42) und (6.43) bestimmt werden, was dann zu einer Zustandsgleichung führt. Es ist nur die Frage, ob diese physikalisch sinnvoll sein wird oder nicht.)

In den letzten Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, um Zustandsgleichungen für kalte, katalytische Materie bis zu Kerndichten und darüber zu formulieren ($\sim 10^{14}$ g/cm^3). Wir führen aber zunächst eine Funktion $m(r)$ ein und setzen:

$$e^{-\lambda}=1-\frac{2m(r)}{r}. \tag{6.45}$$

Diese Funktion $m(r)$ spielt die Rolle einer geometrischen Masse innerhalb einer Kugel vom Radius r, wie man sehen kann:

$$\begin{aligned}
-2m(r) &= -r\left(1-e^{-\lambda}\right) \\
-2m'(r) &= -\left[r\left(1-e^{-\lambda}\right)\right]' \\
&= -\left(1-e^{-\lambda}\right) - r\lambda' e^{-\lambda} \\
&= -1 + e^{-\lambda}\left(1 - r\lambda'\right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{r^2}2m'(r) = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{6.46}$$

und mit (6.42) folgt:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r^2}2m'(r) &= C\rho = -\frac{8\pi\kappa\rho}{c^2} \\
m'(r) &= \frac{\kappa\rho}{c^2}4\pi r^2
\end{aligned} \tag{6.47}$$

oder

$$m(r) = \int_0^m \mathrm{d}m = \frac{\kappa}{c^2}\int_0^r \mathrm{d}r\, 4\pi r^2 \rho = \frac{\kappa M(r)}{c^2}, \tag{6.48}$$

wobei wir für $r = 0$ m gleich Null gesetzt haben um eine Null im metrischen Term e^{λ} für $r = 0$ zu vermeiden. Wir sehen, daß $m(r)$ tatsächlich eine geometrische Masse innerhalb des Radius r ist. Außerhalb des Sternes wird man $m(r)$ gleich der Sternmasse setzen und man erhält dann die Außenlösung nach Schwartzschild.

Damit haben wir eine kontinuierliche metrische Größe g_{11} auf der Sternoberfläche. Wir lösen nun zuerst (6.43) nach ν' auf:

$$\begin{aligned}
C\frac{p}{c^2} - \frac{1}{r^2} &= -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) \\
e^{\lambda}\left(C\frac{p}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) &= -\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \\
-\frac{\nu'}{r} &= e^{\lambda}\left(C\frac{p}{c^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2}\right) \\
&\quad \left[\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} = \frac{1 + \frac{2m(r)}{r} - 1}{r^2} = \frac{2m(r)}{r^3}\right] \\
e^{\lambda}\left(C\frac{p}{c^2} - \frac{2m(r)}{r^3}\right) &= -\frac{\nu'}{r} \\
\frac{\nu'}{r} &= \left(\frac{8\pi\kappa p}{c^4} + \frac{2m(r)}{r^3}\right)\frac{r}{r-2m(r)} \\
\nu' &= \frac{2}{r^3}\left(\frac{4\pi\kappa p r^3}{c^4} + m(r)\right)\frac{r^2}{r-2m(r)}
\end{aligned}$$

oder

$$\nu' = 2\frac{m + 4\pi\kappa p r^3/c^4}{r\,(r - 2m(r))}. \tag{6.49}$$

Im nächsten Schritt stellen wir die Beziehung zwischen p' und ν' her; wir differenzieren (6.43):

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi\kappa}{c^4}p' &= -\frac{2}{r^3} + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda'\nu'}{r} - \frac{\nu''}{r} + \frac{\nu'}{r^2} + \frac{2}{r^3}\right) \\ &\quad [\nu'' \text{ wird durch (6.44) ausgedrückt }] \\ &= e^{-\lambda}\,(\nu' + \lambda')\,\frac{\nu'}{2r}. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Wir verwenden nun (6.41) und erhalten weiter

$$\frac{p'}{c^2} = -\frac{\nu'}{2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \tag{6.51}$$

und mit (6.49) folgt schließlich

$$p' = -\frac{(\rho + p/c^2)\,(m + 4\pi\kappa p r^3/c^4)\,c^2}{r\,(r - 2m)} \tag{6.52}$$

die *Tolman–Oppenheimer–Volkov* (TOV) Gleichung.

Diese Gleichung ist, wie man unschwer erkennen kann, die relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gleichung für hydrostatisches Gleichgewicht. Betrachten wir dazu einen kleinen Würfel im Inneren der Flüssigkeit; er befinde sich mit seiner Grundfläche $\mathrm{d}A$ im Abstand r vom Zentrum und habe die Kantenlänge $\mathrm{d}r$. Die Auftriebskraft ist dann durch den Druckabfall gegeben, also gleich $-p'\mathrm{d}r\mathrm{d}A$. Hydrostatisches Gleichgewicht ist dann gegeben, wenn die Gravitationskraft, welche von der Restmasse $M(r)$ auf den Würfel ausgeübt wird, die Auftriebskraft aufhebt. Die Gravitationskraft ist durch

$$F = \frac{\kappa M(r)\mathrm{d}A\mathrm{d}r\rho}{r^2}$$

gegeben, und damit gilt

$$p' = -\frac{\kappa M(r)\rho}{r^2}. \tag{6.53}$$

Dasselbe Ergebnis folgt aus (6.52) für $m(r) = \kappa M(r)/c^2$, (6.50), $r \gg 2m$, $\rho \gg p/c^2$ und $m \gg 4\pi\kappa p r^3/c^4$. Für die meisten Sterne ist die Dichte klein genug, sodaß (6.53) ausreichend ist. Für Neutronensterne muß man aber bereits (6.52) verwenden.

Wir können nun unsere Ergebnisse zusammenfassen und die Gleichungen der relativistischen Sternstruktur für statische, kalte und katalytische Materie anschreiben:

$$
\begin{aligned}
p &= p(\rho) \quad \ldots \quad \text{Zustandsgleichung} && (6.54)\\
m' &= \frac{\kappa\rho}{c^2}4\pi r^2 && (6.55)\\
\frac{p'}{c^2} &= -\frac{m + 4\pi\kappa p r^3/c^4}{r(r-2m)}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) && (6.56)\\
e^{-\lambda} &= 1 - \frac{2m}{r} && (6.57)\\
\nu' &= -\frac{2p'}{\rho c^2 + p}. && (6.58)
\end{aligned}
$$

Die ersten drei Gleichungen bilden ein einfaches System von Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Funktionen $m(r)$, $\rho(r)$ und $p(r)$ für gegebene Anfangswerte bestimmen (etwa $m(0) = 0$; $\rho(0) = \rho_0$). Der Radius des Sternes ist in natürlicher Weise jener Radius r_0, für welchen der Druck verschwindet, $p(r_0) = 0$, und die Gesamtmasse ist $m(r_0)$. Ein solcher Radius sollte stets existieren. Aus $m(r)$ findet man dann die metrische Funktion $e^{-\lambda}$ und die letzte metrische Funktion, ν, wird durch Auflösung von (6.58) gefunden. Die Lösung wird bis auf eine Konstante beliebig sein. Diese Konstante findet man durch Anpassung der inneren Lösung an die äußere Schwartzschildlösung im Punkte r_0:

$$e^{\nu(r_0)} = 1 - \frac{2m(r_0)}{r_0}. \tag{6.59}$$

6.7.2 Die innere Schwartzschildlösung

Wir wollen nun für den einfachsten Fall $\rho(r) = \text{konst}$ die Gleichungen (6.54–6.59) lösen. Dieses Modell wurde schon von Schwartzschild behandelt. Eine konstante Dichte ρ impliziert aber nicht, daß die physikalische Dichte der Flüssigkeit konstant sein muß, da diese ja von der Metrik abhängt, und diese ist nicht konstant. (6.55) kann unmittelbar integriert werden:

$$m(r) = \frac{4\pi\kappa}{3c^2}r^3\rho$$

und damit folgt nach (6.57):

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi\kappa}{3c^2}r^2\rho.$$

Wir definieren nun

$$\hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho}$$

und erhalten dann

$$g_{11} = -e^{\lambda} = -\left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1}. \tag{6.60}$$

In unserem Fall haben wir keine Zustandsgleichung (wir beschreiben ja eigentlich eine inkompressible Flüssigkeit), aber wir können dafür (6.51) unmittelbar ausintegrieren:

$$\begin{aligned}
p' &= -\frac{\nu'}{2}\left(p + \rho c^2\right) \\
&\quad \rightarrow \left(p + \rho c^2\right)' = p' \quad \text{wegen } \rho = \text{konst} \\
\left(p + \rho c^2\right)' &= -\frac{\nu'}{2}\left(p + \rho c^2\right) \\
\frac{\left(p + \rho c^2\right)'}{p + \rho c^2} &= -\frac{\nu'}{2} \\
\ln\left(p + \rho c^2\right) &= -\frac{\nu}{2} + X
\end{aligned}$$

$$De^{-\nu/2} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \tag{6.61}$$

mit D als Integrationskonstanten. Wir setzen dies in (6.41) ein und erhalten eine Differentialgleichung zwischen $\lambda(r)$ und $\nu(r)$:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\nu' + \lambda'\right) = De^{-\nu/2}. \tag{6.62}$$

oder

$$\begin{aligned}
rDe^{-\nu/2} &= e^{-\lambda}\nu' + \lambda' e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\nu' - \left(e^{-\lambda}\right)'.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun $e^{-\lambda}$ aus (6.60) und erhalten:

$$\begin{aligned}
rDe^{-\nu/2} &= \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)\nu' + \frac{2r}{\hat{R}^2} \\
&\quad \left[\quad \gamma(r) = e^{\nu/2}; \quad \gamma'(r) = \frac{\nu'}{2}e^{\nu/2} \quad\right] \\
\frac{1}{2}rD &= \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)\gamma'(r) + \frac{r}{\hat{R}^2}\gamma(r).
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Offensichtlich ist

$$\gamma_P = \frac{1}{2}D\hat{R}^2$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Zusammen mit der Lösung für die homogene Differentialgleichung erhalten wir dann

$$e^{\nu/2} = \frac{1}{2} D\hat{R}^2 - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2} \tag{6.64}$$

mit B als einer weiteren Integrationskonstanten. Somit können wir die letzte unbekannte Komponente des metrischen Tensors bestimmen:

$$g_{00} = e^{\nu} = \left[\frac{1}{2} D\hat{R}^2 - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{6.65}$$

und damit folgt mit $A = \frac{1}{2} D\hat{R}^2$ und $D = \frac{2\rho}{3}\frac{8\pi\kappa}{c^2} A$ für das Wegelement:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \left[A - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}\right]^2 c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - \\ &\quad r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{6.66}$$

Man muß jetzt noch den Druck an der Sternoberfläche Null setzen um unsere Lösung mit der äußeren Schwartzschildlösung zu verschmelzen.

Aus (6.66) sehen wir, daß das Wegelement in g_{11} eine Singularität für $r = \hat{R}$ aufweist. Wir haben also auch hier ein Verhalten, welches schon von früher bekannt ist. Wir wollen aber zunächst annehmen, daß $r_0 < \hat{R}$ ist, sodaß wir diese Singularität nicht beachten müssen.

Wir bestimmen nun A aus der Forderung, daß der Druck in der Flüssigkeit an der Oberfläche Null sein soll und damit kontinuierlich an den Druck Null im Raum außerhalb der Flüssigkeit anschließt. Wir verwenden nun (6.64) und die Beziehungen für A und D und setzen diese in (6.61) ein:

$$\begin{aligned} \rho + \frac{p}{c^2} &= \frac{c^2 D}{8\pi\kappa} e^{-\nu/2} \\ &= \frac{c^2 D}{8\pi\kappa} \frac{1}{\frac{1}{2} D\hat{R}^2 - B \left(1 - r^2/\hat{R}^2\right)^{1/2}} \\ &= \frac{2\rho A/3}{A - B \left(1 - r^2/\hat{R}^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \tag{6.67}$$

und mit $p = 0$ für $r = r_0$ folgt:

$$1 = \frac{2A/3}{A - B \left(1 - r_0^2/\hat{R}^2\right)^{1/2}}$$

oder

$$A = 3B\left(1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.68}$$

Somit verbleibt nur noch die Bestimmung von B.

Wir verwenden hiezu unsere zweite Randbedingung; nach dieser müssen g_{00} und g_{11} kontinuierlich in die externe Lösung übergehen. Setzen wir nun voraus, daß $r_0 > 2m$ ist, so folgt

$$1-\frac{2m}{r_0} = 1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}; \qquad m = \frac{\kappa M}{c^2} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned} 1-\frac{2m}{r_0} &= \left[A - B\left(1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &= 4B^2\left(1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right) \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\rightarrow \quad B = \frac{1}{2} \tag{6.71}$$

und

$$\frac{2m}{r_0} = \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}; \qquad \frac{2\kappa M}{c^2} = \frac{r_0^3}{3c^2}8\pi\kappa\rho$$
$$\rightarrow \quad M = \frac{4\pi}{3}r_0^3\rho$$

wie es auch sein soll. Damit gilt:

$r \leq r_0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-r_0^2/\hat{R}^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-r^2/\hat{R}^2}\right]^2 c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2/\hat{R}^2} - \\ & r^2\left(\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2\right) \end{aligned}$$

$r > r_0$:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2\left(\sin^2\vartheta^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2\right). \tag{6.72}$$

Wir haben einschränkend angenommen, daß r_0 größer als der Schwartzschildradius ist; dies schränkt die Masse ein:

$$r_0 > 2m = \frac{2\kappa M}{c^2} \quad \rightarrow \quad M < \frac{c^2 r_0}{2\kappa}. \tag{6.73}$$

Wir haben auch angenommen, daß $r_0 < \hat{R}$ ist, was zum selben Ergebnis (6.73) führt:

$$\begin{aligned}
r_0^2 < \hat{R}^2 &= \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho} \\
&\quad \left[\quad \rho = \frac{3M}{4\pi r_0^3} \quad \right] \\
&= \frac{3c^2}{8\pi\kappa}\frac{4\pi r_0^3}{3M} \\
&= \frac{c^2 r_0^3}{2\kappa M} \\
\rightarrow \quad M &< \frac{c^2 r_0}{2\kappa}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (6.67) ergibt eine stärkere Einschränkung für M. Soll der Druck in der Flüssigkeit nie unendlich werden, so darf der Nenner in (6.67) nie verschwinden; dies ist der Fall, wenn $A > B$ ist, also

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}} &> \frac{1}{2} \\
\frac{9}{4}\left(1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right) &> \frac{1}{4} \\
\rightarrow \quad r_0^2 &< \frac{8}{9}\hat{R}^2 = \frac{c^2}{3\pi\kappa\rho}
\end{aligned}$$

oder mit $\rho = 3M/4\pi r_0^3$:

$$B < \frac{4}{9}\frac{c^2 r_0}{\kappa} \tag{6.74}$$

was ein wenig kleiner als (6.73) ist. (6.74) garantiert auch, daß der Koeffizient von $(\mathrm{d}x^0)^2$ stets positiv ist, sogar im Zentrum der Kugel.

Alle diese Beziehungen limitieren die Masse für einen gegebenen Radius. Man kann natürlich diese Beziehungen auf die Masse einer Kugel von beliebigem Radius aber festem ρ umschreiben. (6.74) ergibt dann etwa

$$M^2 < \frac{16c^2}{243\pi\rho\kappa^3}.$$

Wir wollen nun noch die Konsequenzen besprechen, welche sich aus der Annahme $\rho =$ konst ergeben. Wir haben bereits im Abschnitt 4.7.2 und insbesonders auf Seite 105 darauf hingewiesen, daß das physische Volumselement in einem Raum mit der metrischen Determinante g gleich $\sqrt{|g|}$ mal den Koordinatenintervallen ist. Dies ergibt in unserem Fall:

$$\mathrm{d}V = \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1/2} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \tag{6.75}$$

wobei $(1 - r^2/\hat{R}^2)^{-1/2} > 1$ ist. Wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned} V &= \int \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \frac{r^2 \sin^2\vartheta}{\sqrt{1 - r^2/\hat{R}^2}} \\ &= 4\pi \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2/\hat{R}^2}} \\ & \quad \left[\quad \sin\alpha = r/\hat{R}, \quad \sin\alpha_0 = r_0/\hat{R} \quad \right] \\ &= 4\pi\hat{R}^3 \int_0^{\alpha_0} \mathrm{d}\alpha \, \sin^2\alpha \\ &= 4\pi\hat{R}^3 \left(\alpha_0 - \sin\alpha_0 \cos\alpha_0\right) \\ &= 2\pi\hat{R}^3 \left[\arcsin\frac{r_0}{\hat{R}} - \frac{r_0}{\hat{R}}\left(1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned} \tag{6.76}$$

Für die meisten normalen Sterne wird $r_0/\hat{R}$ eine sehr kleine Zahl sein und wir entwickeln

$$\arcsin\frac{r_0}{\hat{R}} - \frac{r_0}{\hat{R}}\left(1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^5 + \cdots$$

und

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^2 + \cdots\right] \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned} \langle\rho\rangle &= \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r_0^3}\left[1 - \frac{3}{10}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= \rho\left[1 - \frac{3}{10}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^2 + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{6.78}$$

Wir sehen also, daß $\langle\rho\rangle$ sich von ρ durchaus unterscheidet. Wir können aus (6.78) aber noch weitere interessante Schlüsse ziehen: wir sollten erwarten, daß ein Volumen V mit der lokalen Dichte ρ eine Masse von $V\rho$ hat. Wir haben aber eine kleinere Masse und werden jetzt den Massendefekt diskutieren:

$$V\rho - M = V\rho \left[\frac{3}{10} \left(\frac{r_0}{\hat{R}} \right)^2 + \cdots \right]. \tag{6.79}$$

Diesen Massendefekt können wir dem Energieverlust zurechnen, welcher entsteht, wenn die Materie unter dem Einfluß der eigenen Gravitation verdichtet wird.

In der klassischen Mechanik hat eine Kugel vom Radius r und homogener Dichte ρ an ihrer Oberfläche das Potential

$$V(r) = -\kappa \frac{4\pi}{3} \frac{r^3 \rho}{r} = -\frac{4\pi\kappa}{3} r^2 \rho.$$

Vergrößern wir nun den Radius um dr, so wird $4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r$ an Masse vom Nullniveau auf das Niveau $V(r)$ angehoben. Dadurch verliert sie die Energie

$$\mathrm{d}E(r) = -\frac{16\pi^2 \kappa \rho^2}{3} r^4 \mathrm{d}r.$$

Damit ergibt sich der Energieverlust infolge der Gravitation zu

$$E = \int_0^{r_0} \mathrm{d}E = -\frac{16}{15} \pi^2 \kappa \rho^2 r_0^5.$$

Der Massendefekt ergibt sich aus (6.79):

$$\Delta M = \left(\frac{4\pi}{3} r_0^3 \right) \left(\frac{8\pi\kappa\rho}{3c^2} \right) \frac{3r_0^2 \rho}{10} = \frac{16}{15} \pi^2 \kappa \rho^2 \frac{r_0^5}{c^2}$$

$$\rightarrow \quad \Delta M = -\frac{E}{c^2}. \tag{6.80}$$

Der Masseverlust entspricht somit der fundamentalen Masse–Energie Relation. Damit ergibt sich auch, daß die Masse M, welche in der Schwartzschildmetrik auftritt, die gesamte Massenenergie beschreibt, welche in der Quelle enthalten ist – sogar die negative Gravitationsbindungsenergie.

6.7.3 Stabilität und stellare Materie

Will man realistische Modelle untersuchen, so ist es natürlich notwendig realistische Zustandsgleichungen zu verwenden, zum Beispiel, wenn man sich mit weißen Zwergen oder Neutronensternen beschäftigt. Solche Sterne entstehen als Endprodukte der Explosion eines roten Giganten in eine Supernova. Hierbei bleibt der Kern des roten Giganten bestehen und hier ist eine

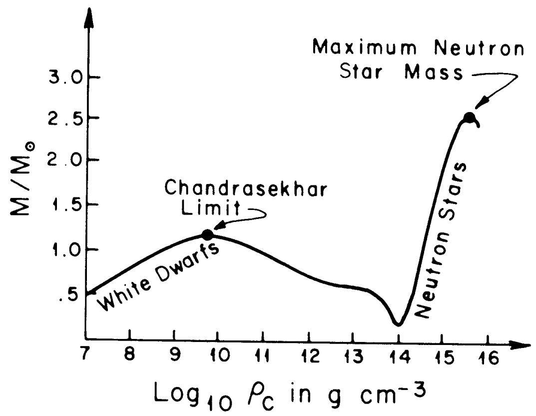

Abbildung 6.11: Die Sternenmasse als Funktion der zentralen Dichte. Die zu erwartenden Maximalwerte für weiße Zwerge und Neutronensterne sind angedeutet.

große Variation der Materiedichte von 10^6 g/cm^3 bei weißen Zwergen bis zu 10^{16} g/cm^3 bei Neutronensternen zu beobachten.

Hat man nun eine Zustandsgleichung und eine zentrale Dichte ρ_c gegeben, so kann man aus (6.55) und (6.56) die Masse des Sterns durch die zentrale Dichte ausdrücken. Dazu ist es notwendig, diese Gleichungen für p, ρ und m zu integrieren. Diese Größen hängen dann von ρ_c ab. Für ein vernünftiges Modell muß auch ein r_0 existieren, für welches $p(r_0) = 0$ ist. Dieser Sternradius und die totale Sternmasse $m(r_0)$ werden ebenfalls von ρ_c abhängen. Die Ergebnisse sind für verschiedene realistische Modelle qualitativ sehr ähnlich, sodaß man diese Ergebnisse gut diskutieren kann.

Beginnen wir mit weißen Zwergen: man kann aus der Atomphysik eine Zustandsgleichung für dicht gepackte Atome angeben. Mit Hilfe einer solchen Zustandsgleichung findet man, daß die Gesamtmasse monoton mit ρ_c in einem Intervall von 10^5 g/cm^3 bis etwa 10^9 g/cm^3 zunimmt. Es wird dann bei etwa 1.2 Sonnenmassen ein Maximum erreicht – die *Chandrasekhar Grenze*. Ein stellares Modell mit größerer Masse wird instabil und muß sich in ein zeitabhängiges System umwandeln. Es sollte also keine weißen Zwerge geben, die schwerer als 1.2 Sonnenmassen sind, was mit den bisherigen Beobachtungen übereinstimmt. (Dieses Ergebnis hängt kaum von der Zustandsgleichung ab, da der dominierende Druck vom entarteten Elektronengas erzeugt wird, und dieses versteht man recht gut. Auch ist die allgemeine Relativitätstheorie in diesem Fall nicht notwendig, da (6.53) hier als Näherung für die TOV–Gleichung vollkommen ausreichend ist.)

Oberhalb der Chandrasekhar Grenze muß das Problem zeitabhängig betrachtet werden. Der Stern zieht sich zusammen und im Inneren treten extreme Drücke und Dichten auf. Dies führt dazu, daß die Elektronen von den Protonen adsorbiert werden, wodurch *Neutronen und Neutrinos* entstehen. $\rightarrow$ *Inverser Beta–Zerfall.* So kann sich ein Stern von großer Dichte und kleiner Größe ($\sim$ 10 km) formen, welcher im wesentlichen aus Neutronen besteht. Wir sehen, daß es für solche Neutronensterne wieder einen Stabilitätsbereich gibt. Pulsare etwa, Quellen, welche intensive Ausbrüche elektromagnetischer Energie zeigen, wurden als Neutronensterne in schneller Rotation identifiziert.

Neutronensterne kann man unter Verwendung identer Methoden studieren. Allerdings sind die Zustandsgleichungen für sehr dichte Neutronengase nicht sehr gut verstanden; hier sind aber relativistische Effekte von großer Bedeutung. Die meisten Modelle, welche realistisch erscheinen, haben aber eine Eigenschaft gemein: die Funktion $m(\rho_c)$ steigt monoton mit ρ_c an, bis bei etwa 10^{15} g/cm^3 eine Sonnenmasse erreicht ist. Die meisten untersuchten Neutronensterne scheinen auch eine solche Masse zu besitzen. Aber selbst diese Sterne sind sehr instabil und zeichnen sich durch äußerst regelmäßige Ausbrüche von Röntgenstrahlung aus. Es erscheinen aber Neutronensterne bis zu zentralen Dichten von 10^{18} g/cm^3 möglich und das obere Limit für 'stabile' Neutronensterne scheint aus heutiger Sicht bei etwa 3 Sonnenmassen zu liegen. Ein schwererer Stern würde instabil werden und mit der Zeit schrumpfen. Dieser Prozess ist als *Gravitationskollaps* bekannt. Ein solcher sollte zur Entstehung eines schwarzen Loches führen.

Wir haben aber noch eine zweite Instabilität im System: nicht große Dichten, aber große Massen sind hier das Problem. Wir haben bereits auf Seite 201 die Massenbeschränkung für die Bedingung, daß im Zentrum der Druck endlich bleibt angegeben. Für $\rho = 1$ g/cm^3 ist die kritische Masse etwa 10^8 Sonnenmassen. Dies sind Massen, welche große Galaxien, aber auch große Staubwolken im Universum aufweisen. Auch hier kommt es dann zu Instabilitäten, welche den Anfang der Sternbildung bedeuten könnten.

6.8 Die Kruskal Lösung

Wir haben in Abschnitt 6.4 gesehen, daß die Schwartzschildlösung für $2m < r < \infty$ entweder zur avancierte Eddington–Finkelstein Lösung (6.21) oder zur retardierte Eddington–Finkelstein Lösung (6.22) erweitert werden kann, wobei dann der Bereich durch $0 < r < \infty$ gegeben ist. Dies hängt mit der Tatsache zusammen, daß eine radiale, zeitartige geodätische Linie durch $r = 2m$ hindurch nach $r = 0$ erweitert werden kann. Es ergibt sich nun die Frage, ob diese Lösungen noch weiter in ihrem Geltungsbereich ausgedehnt werden können.

Wir führen eine avancierte Nullkoordinate v und eine retardierte Nullkoordinate w ein, und erhalten dann für das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}v\mathrm{d}w - r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\varphi^2\right). \tag{6.81}$$

r ist dann eine Funktion von v und w; es ist implizit durch

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2m \ln(r - 2m) \tag{6.82}$$

gegeben. Der zweidimensionale Raum $\vartheta =$ konst und $\varphi =$ konst hat dann die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}v\mathrm{d}w, \tag{6.83}$$

welche als zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit konform flach ist. Dabei ist eine Metrik dann konform, wenn zwei Metriken durch

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

ineinander übergeführt werden können. $\Omega(x)$ ist dabei eine differenzierbare Funktion. Man kann dabei leicht zeigen, daß die Winkel zwischen Vektoren und die Größenverhältnisse zwischen Vektoren erhalten bleiben. Darüber hinaus fällt die Nullgeodätische einer Metrik mit jener, der anderen Metrik zusammen.

Dies wird durch die konforme Abbildung

$$t = \frac{1}{2}(v + w), \qquad x = \frac{1}{2}(v - w)$$

transparent, welche (6.83) in

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2\right)$$

umwandelt. Wir führen nun die allgemeinst mögliche Transformation durch:

$$v \quad \rightarrow \quad v' = v'(v), \qquad w \quad \rightarrow \quad w' = w'(w)$$

mit dem Ergebnis

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}v'} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}w'} \mathrm{d}v'\mathrm{d}w'.$$

Nun führen wir

$$t' = \frac{1}{2}(v' + w'), \qquad x' = \frac{1}{2}(v' - w')$$

ein, und finden dann für (6.83) die allgemeine Form

$$\mathrm{d}s^2 = F^2\left(t', x'\right)\left(\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2\right).$$

Kruskal traf nun die Wahl:

$$v' = \exp\left(\frac{v}{4m}\right); \qquad w' = -\exp\left(-\frac{w}{4m}\right). \tag{6.84}$$

Die Radialkoordinate r ist dann eine Funktion von t' und x', für welche man folgende implizite Gleichung findet:

$$t'^2 - x'^2 = -\left(r - 2m\right)\exp\left(\frac{r}{2m}\right) \tag{6.85}$$

und für F folgt

$$F^2 = \frac{16m^2}{r}\exp\left(\frac{r}{2m}\right)$$

was zum Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{16m^2}{r}\exp\left(\frac{r}{2m}\right)\left(\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2\right) - r^2\left(\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2\right) \tag{6.86}$$

führt. Ein zweidimenionales Diagramm dieser Lösung ist in Abb. 6.12 dargestellt. Alle Lichtkegel sind nunmehr 45° Kegel und die ein– und auslaufenden radialen Nullgeodäten sind gerade Linien. Wir sehen auch eine radiale zeitähnliche Geodätische eingezeichnet, welche von $r = 4m$ und $t' = 0$ ausgeht, in den Ereignishorizont bei $r = 2m$ eintritt und in der Zukunftssingularität bei $r = 0$ endet. Die Abbildung zeigt auch einige Signale (strichlierte Linien), welche von dieser Geodäte ausgesandt werden.

Da (6.85) in t' und x' quadratisch ist, folgt, daß ein Wert von r zwei Hyperflächen bestimmt. In zwei Dimensionen ist die Raumzeit durch zwei Hyperbeln begrenzt; sie werden als Vergangenheits– und Zukunftssingularität bezeichnet. Die Zukunftssingularität ist raumartig und daher in Quadrant II unvermeidlich. Die Asymptoten an die Hyperbeln stellen die Ereignishorizonte für $r = 2m$ dar. Diese zwei Asymptoten bestimmen auch die vier Quadranten I, II, I′ und II″. I, II entsprechen dabei der avancierten Eddington–Finkelstein Lösung. Bereich I der Schwartzschildlösung für $r > 2m$ und Bereich II der Lösung für das schwarze Loch.

Eine Überraschung ist der neue Bereich I′, welcher geometrisch ident zur asymptotisch flachen äußeren Schwartzschildlösung von Bereich I ist. Sie entspricht einem Phänomen, welches *Einstein–Rosen Brücke* genannt wird. Wir können diese Eigenschaft besser herausarbeiten, wenn wir von (6.86) die Untermannigfaltigkeit $t' = 0$ betrachten; hier gilt

$$\mathrm{d}s^2 = -F^2\mathrm{d}x'^2 - r^2\left(\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2\right).$$

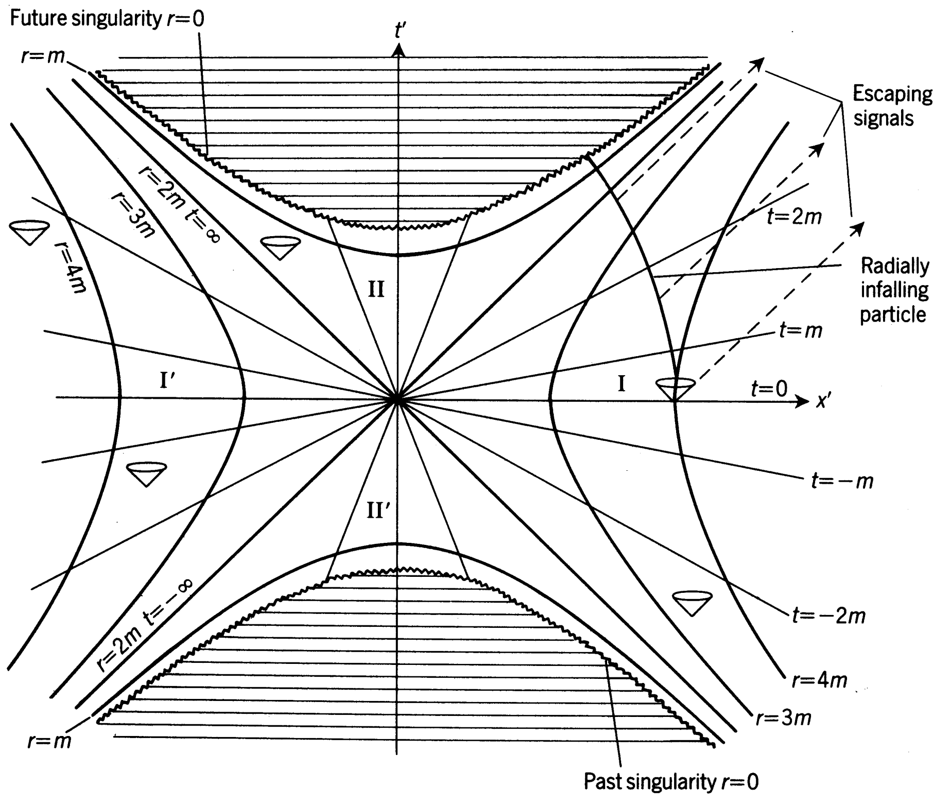

Abbildung 6.12: Raum–Zeit Diagramm der Kruskal Lösung.

Wenn wir also auf der x'–Achse von $+\infty$ nach $-\infty$ gehen, so nimmt der Wert von r bis zum Minimum $2m$ für $x' = 0$ ab und nimmt dann wieder zu, wenn x' nach $-\infty$ geht. Wir können einen Querschnitt dieser Mannigfaltigkeit zeichnen, indem wir die Äquatorebene $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ betrachten. Dies reduziert (6.86) noch weiter:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(F^2 \mathrm{d}x'^2 + r^2 \mathrm{d}\varphi^2\right) .$$

Zur Interpretation betrachten wir eine zweidimensionale Fläche, in welcher dieses Linienelement liegt, und welche in einem dreidimensionalen flachen Raum eingebettet ist. Das Ergebnis ist dann in Abb. 6.13 wiedergegeben. Man kann sich also bei $t' = 0$ die Kruskal Mannigfaltigkeit aus zwei unterschiedlichen aber identen asymptotisch flachen Schwartzschildmannigfaltigkeiten zusammengesetzt denken, welche beim 'Hals' $r = 2m$ miteinander verbunden sind. Nimmt nun t' zu, so bleibt dieses Bild erhalten, nur wird der Hals enger und die Universen treffen sich für $r < 2m$. Für $t' = 1$ schnürt der Hals völlig ab und die Universen berühren sich an der Singularität $r = 0$. Für noch größere Werte von t' sind die Universen vollständig voneinander getrennt und enthalten jeweils die Singularität bei $r = 0$. Da die Kruskal

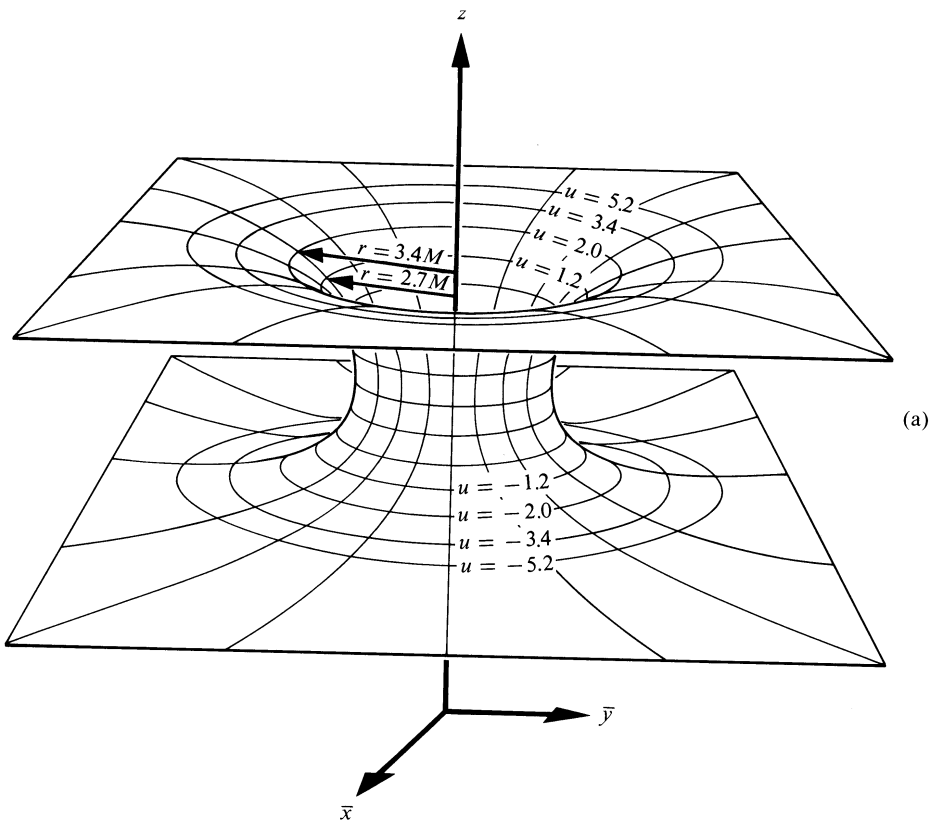

Abbildung 6.13: Die Einstein–Rosen Brücke.

Lösung zeitsymmetrisch ist in Bezug auf t', geschieht das selbe, wenn die Zeit rückwärts läuft. Es ergibt sich dann die in Abb. 6.14 dargestellte Zeitentwicklung.

Die Frage, ob die mathematische Vorgangsweise, welche zur Erweiterung auf das neue Universum I′ geführt hat, auch vom physikalischer Bedeutung ist, ist noch nicht geklärt. Man kann, wenn man will, die Topologie der Schwartzschildgeometrie verändern, indem man die zwei asymptotisch flachen Universen weit entfernt vom Hals zusammenhängt. Es entsteht dadurch ein Universum, welches mehrfach zusammenhängt. Das *Schwartzschild Wurmloch* ermöglicht dann einen Weg von Punkt A zum Punkt B (siehe Abb. 6.15) und das im Unendlichen nahezu flache Universum ermöglicht dann wieder die Rückkehr.

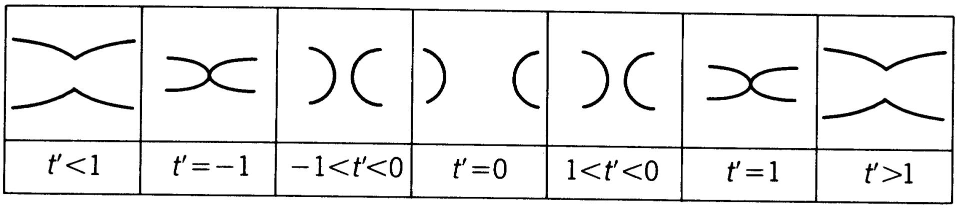

Abbildung 6.14: Zeitliche Entwicklung der Einstein–Rosen Brücke.

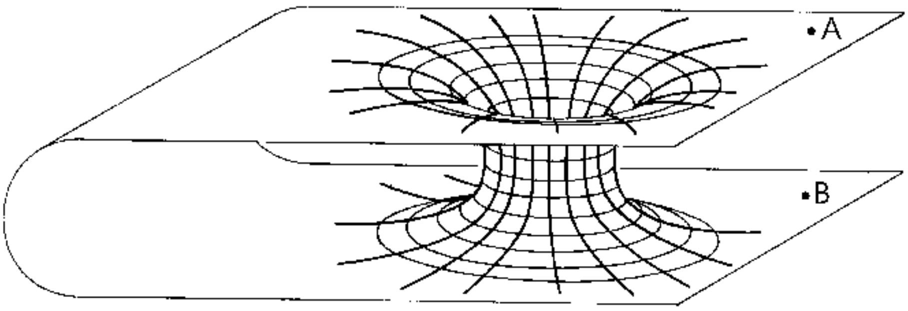

Abbildung 6.15: Ein Schwartzschild 'Wurmloch'.

6.9 Penrose Diagramme

Die Idee des Penrose Diagramms wird am einfachsten in der Minkovski Raumzeit entwickelt. Die Idee besteht darin von einem metrischen Tensor g_{ab} auszugehen, welcher *physikalisch* genannt wird, und einem anderen Tensor $\bar{g}_{ab}$ einzuführen, welcher *unphysikalisch* genannt wird. $\bar{g}_{ab}$ ist konform zu g_{ab}, also gilt

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \tag{6.87}$$

mit Ω, dem konformen Faktor. Eine passende Wahl von Ω^2 kann nun dazu führen, daß die Punkte im Unendlichen auf endliche Positionen gebracht werden, was dann das Studium der kausalen Struktur des Unendlichen erlaubt. (Siehe Diskussion im Rahmen von Abschnitt 6.8.) Insbesonders aber transformieren die Nullgeodäten in sich selbst. Diese bestimmen aber die Lichtkegel und damit auch die kausale Struktur. Der wesentliche Gedanke beim 'Hereinbringen' der Punkte aus dem Unendlichen besteht darin Koordinatentransformationen wie arctan$x$ zu verwenden, welche das unendliche Intervall $(-\infty, \infty)$ auf das endliche Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ abbilden.

Wir führen zweifach Null Koordinaten ein, welche wie folgt definiert sind:

$$v = t + r, \qquad w = t - r. \tag{6.88}$$

Das Linienelement im Minkovski Raum lautet:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right).$$

Wir verwenden jetzt (6.88):

$$\begin{aligned} t &= v - r \\ w &= v - 2r \\ r &= \frac{1}{2}(v - w) \\ r^2 &= \frac{1}{4}(v - w)^2 \\ \mathrm{d}v\mathrm{d}w &= (\mathrm{d}t + \mathrm{d}r)(\mathrm{d}t - \mathrm{d}r) \\ &= \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 \end{aligned} \tag{6.89}$$

und damit folgt

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}v\mathrm{d}w - \frac{1}{4}(v - w)^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{6.90}$$

Entsprechend (6.89) folgt für den Koordinatenbereich $(-\infty < t < \infty; 0 \leq r \leq \infty)$ der neue Koordinatenbereich $(-\infty < v < \infty; -\infty < w < \infty)$ mit der Nebenbedingung

$$r \geq 0 \quad \rightarrow \quad v - w \geq 0 \quad \rightarrow \quad v \geq w. \tag{6.91}$$

Daraus folgt das in Abb. 6.16 dargestellte Raum–Zeit Diagramm.

Wir definieren nun die neuen Koordinaten

$$p = \arctan v, \qquad q = \arctan w, \tag{6.92}$$

welche dann die Koordinatenbereiche $-\frac{1}{2}\pi < p < \frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi < q < \frac{1}{2}\pi$ mit $p \geq q$ überdecken. Damit erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b \\ &= \frac{1}{4}\sec^2 p \sec^2 q \left[4\mathrm{d}p\mathrm{d}q - \sin^2(p - q)\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right] \end{aligned} \tag{6.93}$$

und in der unphysikalischen Metrik erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{s}^2 &= \bar{g}_{ab}\mathrm{d}\bar{x}^a\mathrm{d}\bar{x}^b \\ &= 4\mathrm{d}p\mathrm{d}q - \sin^2(p - q)\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{6.94}$$

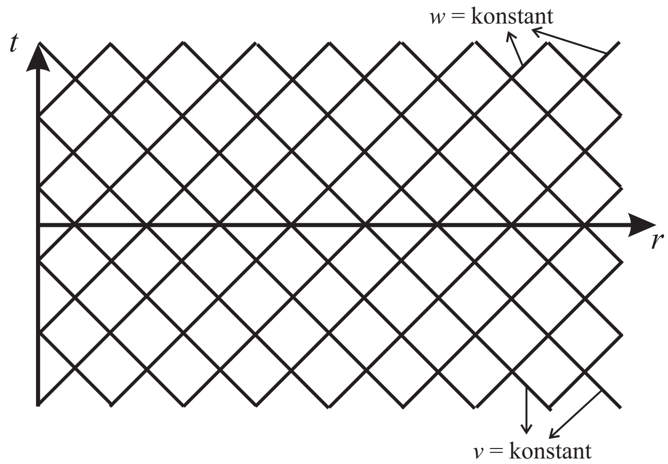

Abbildung 6.16: Raum–Zeit Diagramm der Minkovski Raumzeit.

mit dem konformen Faktor

$$\Omega^2 = \frac{1}{4}\sec^2 p \sec^2 q.$$

Nun führen wir schließlich noch die Koordinaten

$$t' = p + q; \qquad r' = p - q \tag{6.95}$$

ein, wobei wir nun den Koordinatenbereich

$$\begin{array}{rcccl} -\pi & < & t' + r' & < & \pi \\ -\pi & < & t' - r' & < & \pi \\ & & r' \geq 0 & & \end{array} \tag{6.96}$$

haben, wobei $r' \geq 0$ unmittelbar aus $p \geq q$ folgt. Zum Koordinatenbereich (6.96) gehört nun das unphysikalische Linienelement

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}r'^2 - \sin^2 r' \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{6.97}$$

Dieses Linienelement entspricht dem *Einsteinschen statischen Universum* und die Topologie dieser Lösung ist zylindersymmetrisch, wobei die Zeitkoordinate entlang der Generatoren des Zylinders verläuft. Ein Querschnitt des Zylinders für $t' =$ konst, hat die Topologie einer 3–Kugel. Der Koordinatenbereich der Mannigfaltigkeit ist dann durch

$$-\infty < t' < \infty, \quad 0 \leq r' \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi \tag{6.98}$$

gegeben, wobei $r' = 0, \pi$ und $\vartheta = 0, \pi$ Koordinatensingularitäten sind. Man kann sich eine 3–Kugel als eine Verallgemeinerung einer 2–Kugel vorstellen. Tatsächlich kann man das statische Einstein Universum als einen Zylinder

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

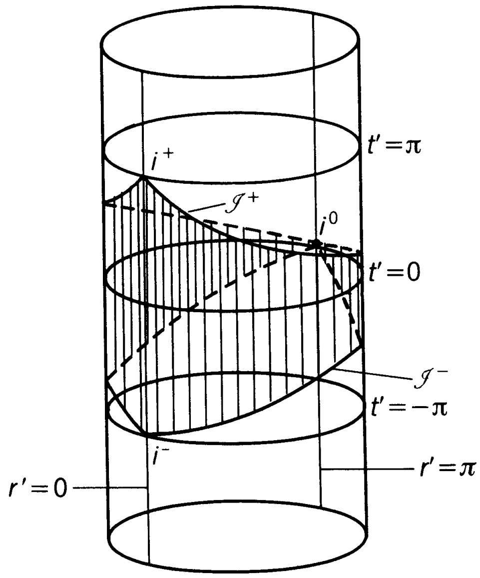

Abbildung 6.17: Kompaktifizierte Minkovski Raumzeit. (Zwei Dimensionen wurden unterdrückt.)

in einem fünfdimensionalen Raum der Signatur -3 mit dem Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}w^2$$

einbetten. (Unterdrückt man zwei Dimensionen, so findet man die bekannte Gleichung für den Zylinder mit $x^2+y^2 = 1$ in einem dreidimensionalen Raum vom Minkovski Typ: $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.)

Das statische Einstein Universum hat dann das Linienelement (6.97) und den Koordinatenbereich (6.98). Die Minkovski Raumzeit ist dann konform zu jenem Teil des Einsteinschen statischen Universums, welches durch den Koordinatenbereich (6.96) definiert wird. Es ist dies der karoartige Bereich des Zylinders, wie er in Abb. 6.17 dargestellt ist. Somit wurde die gesamte Minkovski Raumzeit in diesen endlichen Breich kompaktifiziert. Man nennt dies eine *konforme Kompaktifizierung* und der angedeutete Bereich ist dann die *kompaktifizierte Minkovski Raumzeit.* Die Begrenzung dieses Bereiches beschreibt dann die konforme Struktur des Unendlichen der Minkovski Raumzeit. Drücken wir dies durch die Koordinaten p und q aus, so finden wir:

- Eine Nullfläche $p = \frac{1}{2}\pi$, $\mathcal{J}^+$ genannt,
- eine Nullfläche $q = -\frac{1}{2}\pi$, $\mathcal{J}^-$ genannt,
- einen Punkt $(p = \frac{1}{2}\pi, q = \frac{1}{2}\pi)$, i^+ genannt,

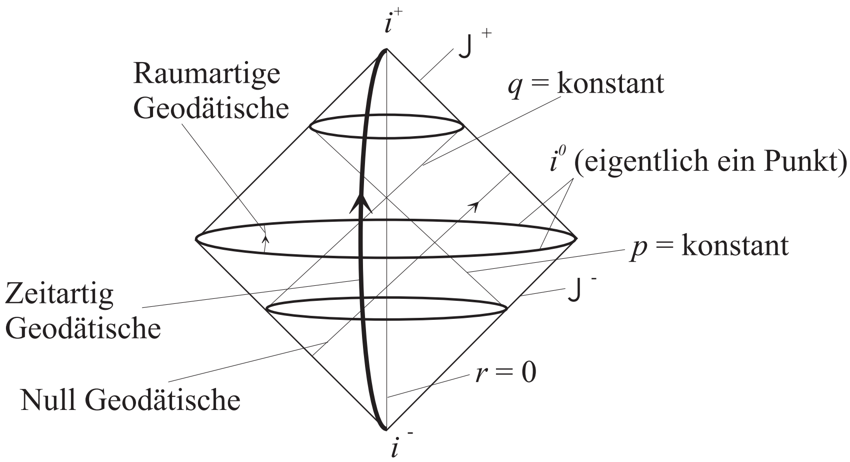

Abbildung 6.18: Beginn und Ende von geodätischen Linien in der kompaktifizierten Minkovski Raumzeit. (Eine Dimension wurde unterdrückt.)

- einen Punkt ($p = \frac{1}{2}\pi, q = -\frac{1}{2}\pi$), i^0 genannt, und
- einen Punkt ($p = -\frac{1}{2}\pi, q = -\frac{1}{2}\pi$), i^- genannt.

Man kann nun unschwer zeigen, daß alle zeitartigen geodätischen Linien in i^- ihren Ursprung haben und in i^+ enden. Nullgeodätische entspringen Punkten von $\mathcal{J}^-$ und enden in Punkten von $\mathcal{J}^+$, während raumähnliche Geodätische in i^0 entspringen und auch dort enden. Man nennt daher i^+ und i^- die *Zukunft* und die *Vergangenheit* des *zeitartig Unendlichen*, $\mathcal{J}^+$ und $\mathcal{J}^-$ die *Zukunft* und *Vergangenheit* des *Null–Unendlichen*, und i^0 das *raumartig Unendliche*. Dies ist in Abb. 6.18 dargestellt.

Ein *Penrose Diagramm* ist nun ein Raum–Zeit Diagramm einer konform kompaktifizierten Raumzeit. Das Penrose Diagramm der Minkovski Raumzeit ist in Abb. 6.19 dargestellt. Dieses Diagramm zeigt die Kurve $r =$ konst, welche den Historien von 2–Kugeln mit $r =$ konst entsprechen, und die Kurven $t =$ konst, welche zeitartigen Ausschnitten entsprechen. Ein– und auslaufende Nullgeodätische werden durch die geraden Linien $p =$ konst und $q =$ konst unter den Winkeln -45° bzw. 45° dargestellt.

6.10 Das Penrose Diagramm der Kruskal Lösung

Eine große Klasse asymptotisch flacher Raumzeiten, welche Penrose *einfache* Raumzeiten nennt, können auf die zuvor beschriebene Weise analysiert werden. So kann man die Kruskal Lösung kompaktifizieren, indem man neue

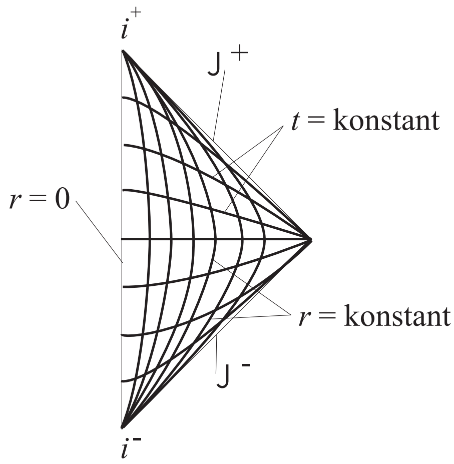

Abbildung 6.19: Penrose Diagramm der Minkovski Raumzeit. (Zwei Dimensionen wurden unterdrückt.)

avancierte und retardierte Nullkoordinaten unter der Verwendung der Nullkoordinaten v' und w' von Seite 207 einführt:

$$
\begin{aligned}
v'' &= \arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{2m}}\right) \\
w'' &= \arctan\left(\frac{w'}{\sqrt{2m}}\right)
\end{aligned}
$$

mit dem Koordinatenbereich

$$
\begin{array}{rcccl}
-\frac{1}{2}\pi & < & v'' & < & \frac{1}{2}\pi \\
-\frac{1}{2}\pi & < & w'' & < & \frac{1}{2}\pi \\
-\pi & < & v'' + w'' & < & \pi .
\end{array}
$$

Die Berechnungen verlaufen völlig analog zu früher. Es sei daher nur das zugehörige Penrose Diagramm in Abb. 6.20 dargestellt. Die Nullgeodätischen und die Lichtkegel haben die Winkel $\pm 45°$. Beide Bereiche I und I$'$ haben ihre eigene Zukunft, Vergangenheit und Null–Unendliche. Für jeden Punkt außerhalb $r = 2m$ endet eine auslaufende radiale Nullgeodätische in $\mathcal{J}^+$, eine einlaufende radiale Nullgeodätische endet hingegen in der Zukunftssingularität. Für jeden Punkt innerhalb von $r = 2m$ enden sowohl aus– wie einlaufende radiale Nullgeodätische in der Zukunftssingularität.

Wir berücksichtigen nun, daß jeder Diagrammpunkt einer 2–Kugel entspricht. Wir betrachten etwa in Abb. 6.21a eine 2–Kugel S_0, welche im Bereich I liegt, und welche zu einer beliebigen Zeit beleuchtet wird. Dann fliegen die Photonen von jedem Punkt auf S_0 in einer 2–Kugel weg und die Einhüllenden all dieser 2–Kugeln sind die 2–Kugeln S_1 und S_2. Die Fläche S_2 wird dabei

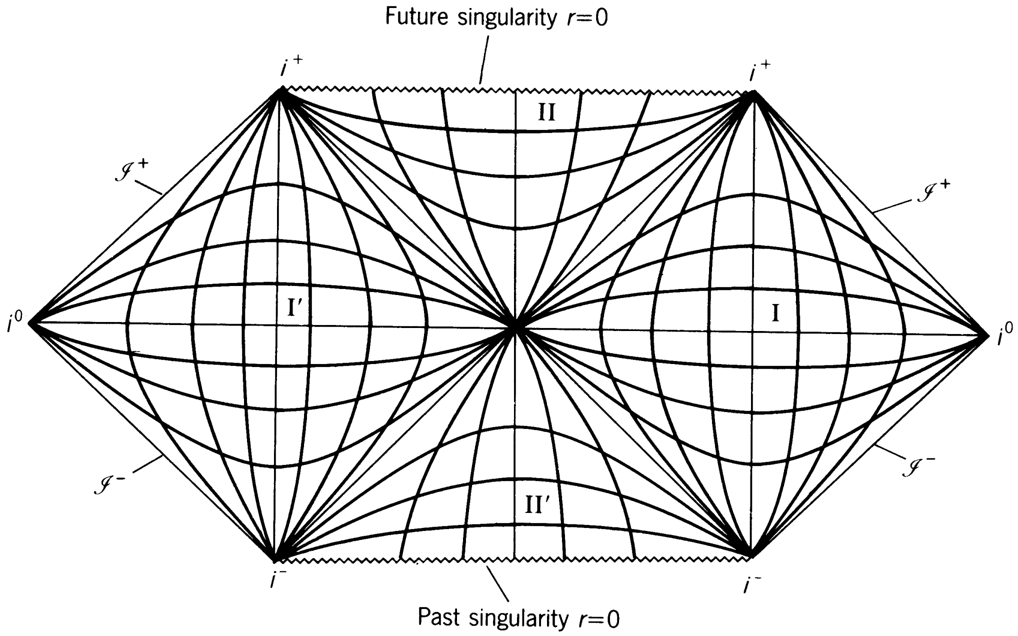

Abbildung 6.20: Kompaktifizierte Minkovski Raumzeit. (Zwei Dimensionen wurden unterdrückt.)

größer als die von S_0 sein, während die von S_1 kleiner als die von S_0 sein wird. Liegt aber S_0 im Bereich II (Abb. 6.21b), so werden beide Wellenfronten implodieren und die Flächen von S_1 und S_2 werden beide kleiner als jene von S_0 sein. Solche 2–Oberflächen werden *geschlossene, eingefangene Oberfläche* genannt.

Schließlich zeigt Abb. 6.22 noch das Penrose Diagramm eines kollabierenden kugelförmigen Sterns. (Vergleiche mit Abb. 6.8.)

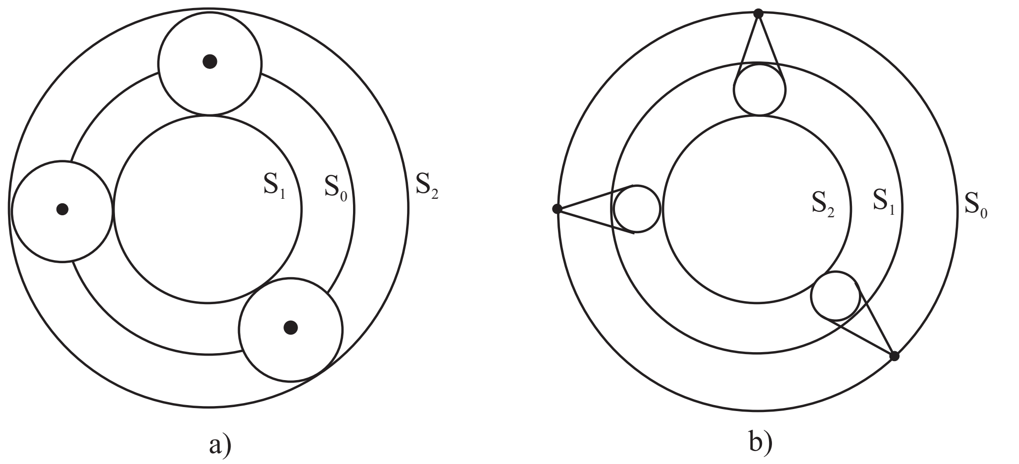

Abbildung 6.21: a) Sphärische Wellenfronten einer beleuchteten 2–Kugel S_0. b) Das Analagon zu a) aber für eine geschlossene eingefangene Fläche)

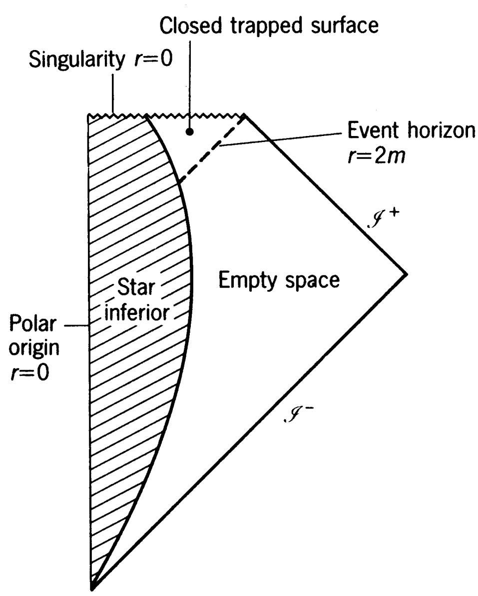

Abbildung 6.22: Penrose Diagramm eines sphärisch symmetrischen Gravitationskollapses.