Kapitel 7

Ebene Gravitationswellen

7.1 Linearisierte Feldgleichungen

Der Ausgangspunkt zur Behandlung von Gravitationsstrahlung oder von Gravitationswellen liegt in der Arbeit von Einstein und beruht auf einer linearisierten Form der Feldgleichungen. In diesem linearisierten Grenzfall wird die allgemeine Relativitätstheorie wiederum Lorentz–kovariant.

Wir beginnen wieder mit der Annahme, daß die Metrik nur geringfügig von der Minkovski–Metrik (η_{ab}) abweicht, daß also (4.38)

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \varepsilon h_{ab} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{7.1}$$

gilt, wobei ε ein kleiner dimensionsloser Parameter ist, und $h_{ab} = h_{ab}(x^k)$. Wir vernachlässigen generell Terme zweiter und höherer Ordnung in ε. Wir verwenden zusätzlich die Randbedingung, daß der Raum asymtotisch flach sein muß, also für den Radialparameter r

$$\lim_{r\to\infty} h_{ab} = 0 \tag{7.2}$$

gilt. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} h^{ab} &= g^{ac}g^{bd}g_{cd} \\ &= \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Wir bestimmen im weiteren:

$$\begin{aligned} \left(\eta_{ab} + \varepsilon h_{ab}\right)\left(\eta^{bc} - \varepsilon h^{bc}\right) &= \underbrace{\eta_{ab}\eta^{bc}}_{=\delta_a{}^c} + \varepsilon\eta^{bc}h_{ab} - \varepsilon\eta_{ab}h^{bc} \\ & \left[\begin{array}{rcl} \eta_{ab}h^{bc} &=& \underbrace{\eta_{ab}\eta^{br}}_{=\delta_a{}^r}\eta^{cs}h_{rs} \\ &=& \delta_a{}^r\eta^{cs}h_{rs} = \eta^{cs}h_{as} \end{array}\right] \\ &= \delta_a{}^c + \varepsilon\eta^{bc}h_{ab} - \varepsilon\eta^{cs}h_{as} \\ &= \delta_a{}^c. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Wenn nun

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \varepsilon h_{ab}$$

gilt und auch

$$g_{ab} g^{bc} = \delta_a{}^c$$

gelten muß, so folgt aus (7.4) unmittelbar

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \varepsilon h^{ab}. \tag{7.5}$$

η_{ab} ist aber konstant und damit gilt für die Verknüpfungen (3.37)

$$\begin{aligned}
\Gamma^a_{bc} &= \frac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{ad} \left(\varepsilon \partial_b h_{dc} + \varepsilon \partial_c h_{db} - \varepsilon \partial_d h_{bc}\right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \eta^{ad} \left(\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{db} - \partial_d h_{bc}\right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \left(\partial_b h^a{}_c + \partial_c h^a{}_b - \partial^a h_{bc}\right).
\end{aligned}$$

Für den Riemann–Tensor gilt dann:

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd} &= \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^p_{bd} \Gamma^a_{pc} - \Gamma^p_{bc} \Gamma^a_{pd} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \eta^{ar} \left(\partial_c \partial_b h_{rd} + \partial_c \partial_d h_{rb} - \partial_c \partial_r h_{bd}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \varepsilon \eta^{ar} \left(\partial_d \partial_b h_{rc} + \partial_d \partial_c h_{rb} - \partial_d \partial_r h_{bc}\right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \eta^{ar} \left(\partial_b \partial_c h_{rd} + \partial_d \partial_r h_{bc} - \partial_c \partial_r h_{bd} - \partial_b \partial_d h_{rc}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}
g_{sa} R^a{}_{bcd} = R_{sbcd} &= \frac{1}{2} \varepsilon \underbrace{\eta_{sa} \eta^{ar}}_{=\delta_s{}^r} \left(\partial_b \partial_c h_{rd} + \partial_d \partial_r h_{bc} - \partial_c \partial_r h_{bd} - \partial_b \partial_d h_{rc}\right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \left(\partial_b \partial_c h_{sd} + \partial_d \partial_s h_{bc} - \partial_c \partial_s h_{bd} - \partial_b \partial_d h_{sc}\right)
\end{aligned}$$

oder

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\partial_b \partial_c h_{ad} + \partial_a \partial_d h_{bc} - \partial_a \partial_c h_{bd} - \partial_b \partial_d h_{ac}\right). \tag{7.6}$$

Die Bianchi–Identität (3.71) ist natürlich erfüllt und wir erhalten für den Ricci–Tensor:

$$\begin{aligned}
R_{ab} &= \eta^{cd} R_{cadb} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \left(\eta^{cd} \partial_a \partial_d h_{cb} + \eta^{cd} \partial_c \partial_b h_{ad} - \underbrace{\eta^{cd} \partial_c \partial_d}_{=\Box} h_{ab} - \partial_a \partial_b \underbrace{\eta^{cd} h_{cd}}_{=h^d{}_d = h} \right) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \left(\partial_b \partial_c h_a{}^c + \partial_a \partial_c h^c{}_b - \Box h_{ab} - \partial_a \partial_b h\right),
\end{aligned} \tag{7.7}$$

mit $\Box$ dem d'Lambertschen Operator. Damit ergibt sich der Ricci–Skalar zu

$$\begin{aligned} R = g^{ab}R_{ab} &= \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_b\partial_c h^{bc} + \partial_a\partial_c h^{ca} - \Box h_a{}^a - \eta^{ab}\partial_a\partial_b h\right) \\ &= \varepsilon\left(\partial_d\partial_c h^{dc} - \Box h\right), \end{aligned} \tag{7.8}$$

und daraus folgt schließlich für den Einstein–Tensor:

$$\begin{aligned} G &= R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_b\partial_c h^c{}_a + \partial_a\partial_c h^c{}_b - \Box h_{ab} - \partial_a\partial_b h\right. \\ &\quad \left. - \eta_{ab}\partial_c\partial_d h^{cd} + \eta_{ab}\Box h\right). \end{aligned} \tag{7.9}$$

7.2 Eichtransformationen

Wir untersuchen nun Koordinatentransformationen der Art

$$x^a \quad \mapsto \quad x'^a = x^a + \varepsilon\xi^a. \tag{7.10}$$

Dann gilt:

$$\partial_b x'^a = \delta^a{}_b + \varepsilon\partial_b\xi^a,$$

und wir verwenden diese Beziehung im Transformationsgesetz für den Tensor h_{ab}:

$$\begin{aligned} g'^{ab} &= \partial_r x'^a \partial_s x'^b g^{rs} \\ &= \left(\delta_r{}^a + \varepsilon\partial_r\xi^a\right)\left(\delta_s{}^b + \varepsilon\partial_s\xi^b\right) g^{rs} \\ &= \delta_r{}^a\delta_s{}^b g^{rs} + \varepsilon\delta_r{}^a g^{rs}\partial_s\xi^b + \varepsilon\delta_s{}^b g^{rs}\partial_r\xi^a \\ &= g^{ab} + \varepsilon g^{as}\partial_s\xi^b + \varepsilon g^{rb}\partial_r\xi^a \\ g'^{ab} - g^{ab} &= \varepsilon g^{as}\partial_s\xi^b + \varepsilon g^{rb}\partial_r\xi^a \end{aligned}$$

oder

$$\left(\eta'^{ab} - \varepsilon h'^{ab}\right) - \left(\eta^{ab} - \varepsilon h^{ab}\right) = \varepsilon\eta^{as}\partial_s\xi^b + \varepsilon\eta^{rb}\partial_r\xi^a.$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir:

$$\begin{aligned} \eta'^{ab} &= \eta^{ab} \\ -h'^{ab} + h^{ab} &= \eta^{as}\partial_s\xi^b + \eta^{rb}\partial_r\xi^a. \end{aligned}$$

Aus (7.3) folgt unmittelbar:

$$h_{cd} = \eta_{ac}\eta_{bd}h^{ab}$$

was eine weitere Umformung erlaubt:

$$\begin{aligned}
-\eta_{av}\left(h'^{ab}-h^{ab}\right) &= \eta_{av}\eta^{as}\partial_s\xi^b+\eta^{rb}\partial_r\eta_{av}\xi^a \\
&= \delta_v{}^s\partial_s\xi^b+\eta^{rb}\partial_r\xi_v \\
-\eta_{bw}\eta_{av}\left(h'^{ab}-h^{ab}\right) &= \eta_{bw}\partial_v\xi^b+\eta_{bw}\eta^{rb}\partial_r\xi_v \\
&= \partial_v\xi_w+\delta_w{}^r\partial_r\xi_v \\
&= \partial_v\xi_w+\partial_w\xi_v,
\end{aligned}$$

oder

$$h_{ab} \quad \mapsto \quad h'_{ab}=h_{ab}-\left(\partial_a\xi_b+\partial_b\xi_a\right). \tag{7.11}$$

Es ist vielleicht angebracht, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß noch allgemeiner

$$\begin{aligned}
x^a \quad \mapsto \quad x'^a &= x^a+\varepsilon\xi^a \\
g'_{ab}(x) &= g_{ab}(x)-\varepsilon\left(\nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a\right)
\end{aligned}$$

für eine allgemeine Metrik unter infinitesimaler Koordinatenänderung gilt.

In Analogie zur Elektrodynamik nennt man (7.11) eine *Eichtransformation* von h_{ab}. Man kann durch Einsetzen leicht überprüfen, daß der linearisierte Krümmungstensor (7.6) und seine Kontraktionen eichinvariant sind.

Es ist nun möglich dem System weitere Bedingungen aufzuerlegen um die Eichung zu fixieren. Führen wir etwa neue Variable

$$\psi_{ab}=h_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}h$$

ein, so gilt zunächst (7.7)

$$R_{ab}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_b\partial_c h_a{}^c+\partial_a\partial_c h^c{}_b-\Box h_{ab}-\partial_a\partial_b h\right).$$

Wir untersuchen weiter:

$$\begin{aligned}
\psi_{ab} &= h_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}h \\
\eta^{rb}\psi_{ab} &= \eta^{rb}h_{ab}-\frac{1}{2}\eta^{rb}\eta_{ab}h \\
\psi_a{}^r &= h_a{}^r-\frac{1}{2}\delta^r{}_a h
\end{aligned}$$

oder

$$h_a{}^r=\psi_a{}^r+\frac{1}{2}\delta^r{}_a h,$$

also

$$
\begin{aligned}
h_a{}^c &= \psi_a{}^c + \frac{1}{2}\delta^c{}_a h \\
\partial_b\partial_c h_a{}^c &= \partial_b\partial_c\psi_a{}^c + \frac{1}{2}\partial_b\partial_c\delta^c{}_a h \\
&= \partial_b\partial_c\psi_a{}^c + \frac{1}{2}\partial_b\partial_a h \\
h^c{}_b &= \psi^c{}_b + \frac{1}{2}\delta^c{}_b h \\
\partial_a\partial_c h^c{}_b &= \partial_a\partial_c\psi^c{}_b + \frac{1}{2}\partial_a\partial_c\delta^c{}_b h \\
&= \partial_a\partial_c\psi^c{}_b + \frac{1}{2}\partial_a\partial_b h,
\end{aligned}
$$

und damit folgt

$$R_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_b\partial_c\psi_a{}^c + \partial_a\partial_c\psi^c{}_b - \Box h_{ab}\right), \tag{7.12}$$

und für (7.8)

$$R = \frac{1}{2}\varepsilon\left(2\partial_c\partial_d\psi^{cd} - \Box h\right). \tag{7.13}$$

Schließlich folgt noch für (7.9):

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_b\partial_c\psi_a{}^c + \partial_a\partial_c\psi^c{}_b - \Box\psi_{ab} - \eta_{ab}\partial_c\partial_d\psi^{cd}\right). \tag{7.14}$$

Diese Gleichung läßt vermuten, daß die Feldgleichungen zu *Wellengleichungen* reduzieren, wenn die Bedingung

$$\partial_a\psi_b \stackrel{!}{=} 0 \tag{7.15}$$

oder

$$\partial_a h^a{}_b - \frac{1}{2}\partial_b h = 0$$

erfüllt ist. Dies wird die *Einstein, deDonder, Hilbert*, oder die *Fock–Eichung* genannt. Man findet weiter für die Eichtransformation (7.10):

$$
\begin{aligned}
\psi_{ab} \quad \mapsto \quad \psi'_{ab} &= h'_{ab} - \frac{1}{2}\eta'_{ab}h' \\
&= h_{ab} - \partial_a\xi_b - \partial_b\xi_a - \frac{1}{2}\eta_{ab}h' \\
&\quad \left[\begin{array}{rcl} \eta^{ab}h'_{ab} = h' &=& \eta^{ab}\left(h_{ab} - \partial_a\xi_b - \partial_b\xi_a\right) \\ &=& h - \partial_a\xi^a - \partial_b\xi^b \end{array}\right] \\
&= h_{ab} - \partial_a\xi_b - \partial_b\xi_a - \frac{1}{2}\eta_{ab}h + \frac{1}{2}2\eta_{ab}\partial_c\xi^c
\end{aligned}
$$

also

$$\psi'_{ab} = \psi_{ab} - \partial_a\xi_b - \partial_b\xi_a + \eta_{ab}\partial_c\xi^c.$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\eta^{ar}\psi'_{ab} &= \eta^{ar}\psi_{ab} - \eta^{ar}\partial_a\xi_b - \eta^{ar}\partial_b\xi_a + \eta^{ar}\eta_{ab}\partial_c\xi^c \\
\psi'^r{}_b &= \psi^r{}_b - \eta^{ar}\left(\partial_a\xi_b + \partial_b\xi_a\right) + \delta^r{}_b\partial_c\xi^c \\
\partial_r\psi'^r{}_b &= \partial_r\psi^r{}_b - \underbrace{\eta^{ar}\partial_r\partial_a}_{=\Box}\xi_b - \eta^{ar}\partial_r\partial_b\xi_a + \delta^r{}_b\partial_r\partial_c\xi^c.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}
\partial_b\partial_c\xi^c = \eta^{cr}\partial_b\partial_c\xi_r &= \eta^{ca}\partial_b\partial_c\xi_a \\
&= \eta^{ra}\partial_b\partial_r\xi_a,
\end{aligned}$$

was wiederum zum Ergebnis

$$\partial_r\psi'^r_b = \partial_r\psi^r{}_b - \Box\xi_b \tag{7.16}$$

führt. Daraus folgt wiederum, daß die Einsteineichung entsprechend (7.15)

$$\partial\psi'^r{}_b = 0$$

unter den Eichtransformationen (7.10) infolge (7.16) nur dann folgt, wenn das Vektorfeld ξ_a der Bedingung

$$\Box\xi_a = \partial_r\psi^r{}_a \tag{7.17}$$

gehorcht. Behandeln wir die ξ_a als die Unbekannten, dann verlangt die Lösung des Problemes die Lösung der Wellengleichung mit einem Quellterm. Es folgt dann aus den vollen Feldgleichungen

$$G_{ab} = \kappa\, T_{ab}$$

in der Einsteineichung

$$\frac{1}{2}\varepsilon\Box\psi_{ab} = -\kappa T_{ab}. \tag{7.18}$$

Gleichung (7.17) fixiert aber auch die Eichung nicht vollständig, da man stets zusätzliche Transformationen mit

$$\Box\xi_a = 0 \tag{7.19}$$

ausführen kann, welche ja $\partial_a\psi^a{}_b$ unverändert lassen.

Die Vakuumfeldgleichungen lauten dann in der Einsteineichung

$$\Box\psi_{ab} = 0.$$

Es folgt daraus weiterhin:

$$
\begin{aligned}
\eta^{ab}\Box\psi_{ab} &= \Box\left(\eta^{ab}\psi_{ab}\right) \\
&= \Box\left[\eta^{ab}\left(h_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}h\right)\right] \\
&= \Box\left(h-\frac{1}{2}\eta^{ab}\eta_{ab}h\right) \\
&= \Box(h-2h) \\
&= -\Box h = 0.
\end{aligned}
$$

Dann gilt aber in der Einsteineichung:

$$
\begin{aligned}
\Box\psi_{ab} = 0 &= \Box\left(h_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}h\right) \\
&= \Box h_{ab} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Diese entspricht ausgedrückt durch h_{ab}:

$$
\partial_a h^a{}_b - \frac{1}{2}\partial_b h = 0. \tag{7.21}
$$

7.3 Linearisierte ebene Gravitationswellen

Bevor nun die linearisierten Feldgleichungen gelöst werden sollen, wollen wir untersuchen, welche theoretische Motivation existieren könnte, die Existenz von Gravitationswellen anzunehmen. Zunächst haben wir gesehen, daß die linearisierten Vakuumfeldgleichungen zur Wellengleichung

$$
\Box h_{ab} = 0
$$

in der Einsteineichung reduzieren. Dies verführt zum Schluß, daß sich Gravitationseffekte wie Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Dies läßt aber den Einwand zu, daß die Störung h_{ab} an ein beliebiges Koordinatensystem gebunden ist, und damit die Existenz von nicht verschwindendem h_{ab} kein invariantes Anzeichen für die Existenz eines Gravitationsfeldes ist. Ein besseres Argument beruht auf der Tatsache, daß bei Gültigkeit von (7.19) aufgrund von (7.6) auch

$$
\Box R_{abcd} = 0 \tag{7.22}
$$

gilt. Somit gehorcht auch der Riemanntensor, welcher ja ein absolutes Kriterium für die Existenz eines Gravitationsfeldes darstellt, der Wellengleichung. Daraus folgt schließlich, daß in der linearisierten Theorie sich die Gravitationswirkung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Dies beweist aber noch nicht, daß Gravitationsstrahlung existiert, da Strahlung stets Energieübertragung impliziert.

Wir versuchen nun eine einfache Lösung der linearisierten Vakuumfeldgleichungen aufzusuchen, welche einer unbegrenzten ebenen Welle entspricht, die sich in x–Richtung ausbreitet. Hiezu führen wir die Koordinatenzuordnung

$$\begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix}$$

mit c = 1 durch und verwenden den Ansatz

$$h_{ab} = h_{ab}(t, x), \tag{7.23}$$

welcher auch

$$\partial_2 h_{ab} = \partial_3 h_{ab} = 0$$

bedingt. Man kann nun unmittelbar unter Verwendung von (7.6) R_{abcd} ausrechnen und erhält:

$$R_{0123} = R_{0223} = R_{0323} = R_{1223} = R_{1323} = R_{2323} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} R_{0101} & = & \frac{1}{2}\varepsilon\left(2\partial_0\partial_1 h_{01} - \partial_1\partial_1 h_{11} - \partial_0\partial_0 h_{11}\right) \\ R_{0102} & = & \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_0\partial_1 h_{02} - \partial_0\partial_0 h_{12}\right) \\ R_{0103} & = & \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_0\partial_1 h_{03} - \partial_0\partial_0 h_{13}\right) \\ R_{0112} & = & \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_1\partial_1 h_{02} - \partial_0\partial_1 h_{12}\right) \\ R_{0113} & = & \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_1\partial_1 h_{03} - \partial_0\partial_1 h_{13}\right) \end{array}\right\} \tag{7.24}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} R_{0202} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_0\partial_0 h_{22} \\ R_{0203} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_0\partial_0 h_{23} \\ R_{0212} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_0\partial_1 h_{22} \\ R_{0213} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_0\partial_1 h_{23} \\ R_{0303} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_0\partial_0 h_{33} \\ R_{0313} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_0\partial_1 h_{33} \\ R_{1212} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_1\partial_1 h_{22} \\ R_{1213} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_1\partial_1 h_{23} \\ R_{1313} & = & -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_1\partial_1 h_{33}. \end{array}\right\} \tag{7.25}$$

Wir verwenden nun die linearisierten Vakuumfeldgleichungen in der Form

$$R_{ab} = 0. \tag{7.26}$$

Es gilt dann etwa

$$R_{13} = R^a{}_{1a3} = R_{0103} = 0,$$

und damit verschwindet bereits eine der unabhängigen Komponenten aus (7.24). Tatsächlich führt die Vakuumfeldgleichung (7.26) dazu, daß alle Komponenten des Satzes (7.24) verschwinden. Es bleiben somit nur die Komponenten des Satzes (7.25) erhalten. Diese enthalten aber nur mehr die Elemente h_{22}, h_{23} und h_{33}. Somit kann h_{ab} in zwei Teile aufgespalten werden:

$$h_{ab} = h_{ab}^{(1)} + h_{ab}^{(2)}$$

mit

$$h_{ab}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

und

$$h_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & 0 & 0 \\ h_{30} & h_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Die Feldgleichungen resultieren also darin, daß der Krümmungstensor von $h_{ab}^{(2)}$ identisch verschwindet. Dies läßt vermuten, daß es ein Koordinatensystem gibt, in welchem h_{ab} nur die Komponenten h_{22}, h_{23} und h_{33} hat; also hat h_{ab} nur die $h_{ab}^{(1)}$–Lösung.

Um dies zeigen zu können, spezialisieren wir den Ansatz (7.23) auf

$$h_{ab} = h_{ab}(t - x), \tag{7.29}$$

sodaß hierdurch in klarer Weise eine Lösung beschrieben wird, welche in x–Richtung mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitet. Die Einsteineichung (7.21) ergibt dann:

$$\begin{aligned}
\partial_0 h_{00} - \partial_1 h_{01} - \frac{1}{2}\partial_0 h &= 0 \\
\partial_0 h_{01} - \partial_1 h_{11} - \frac{1}{2}\partial_1 h &= 0 \\
\partial_0 h_{02} - \partial_1 h_{12} &= 0 \\
\partial_0 h_{03} - \partial_1 h_{13} &= 0
\end{aligned}$$

oder mit dem Symbol $'$ für die Differentiation nach $t - x$:

$$
\begin{aligned}
h'_{00} + h'_{01} - \frac{1}{2}h' &= 0 \\
h'_{01} + h'_{11} - \frac{1}{2}h' &= 0 \\
h'_{02} + h'_{12} &= 0 \\
h'_{03} + h'_{13} &= 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen können unmittelbar ausintegriert werden und man findet:

$$
\left.
\begin{aligned}
h_{00} + h_{01} - \tfrac{1}{2}h &= f_1 \\
h_{01} + h_{11} - \tfrac{1}{2}h &= f_2 \\
h_{02} + h_{12} &= f_3 \\
h_{03} + h_{13} &= f_4,
\end{aligned}
\right\} \tag{7.30}
$$

wobei die fs Funktionen von y und z allein sind. Da aber die h_{ab}s alle im räumlich Unendlichen verschwinden müssen, (7.2), folgt unmittelbar

$$
f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0.
$$

(7.30) ergibt dann:

$$
\begin{aligned}
h_{12} &= -h_{02}, & h_{01} &= -\frac{1}{2}\left(h_{00} + h_{11},\right) \\
h_{13} &= -h_{03}, & h_{33} &= -h_{22},
\end{aligned}
$$

also

$$
h_{ab} = \begin{pmatrix}
h_{00} & -\frac{1}{2}\left(h_{00} + h_{11}\right) & h_{02} & h_{03} \\
-\frac{1}{2}\left(h_{00} + h_{11}\right) & h_{11} & -h_{02} & -h_{03} \\
h_{02} & -h_{02} & h_{22} & h_{23} \\
h_{03} & -h_{03} & h_{23} & -h_{22}
\end{pmatrix}.
$$

Wir haben aber nach wie vor die Freiheit der Eichung (7.11), wobei ξ_a (7.19) genügt. Wir legen nun das transformierte System derart fest, daß

$$
h'_{00} = h'_{02} = h'_{03} = h'_{11} = 0
$$

gelte; dies verlangt aufgrund von (7.11)

$$
\left.
\begin{aligned}
h_{00} - 2\partial_0\xi_0 &= 0 \\
h_{02} - \partial_2\xi_0 - \partial_0\xi_2 &= 0 \\
h_{03} - \partial_3\xi_0 - \partial_0\xi_3 &= 0 \\
h_{11} - 2\partial_1\xi_1 &= 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{7.31}
$$

Nehmen wir weiter an, daß

$$\xi_a = \xi_a(t-x) \tag{7.32}$$

gilt, dann ist (7.19) automatisch erfüllt. Wir wählen

$$(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (F_0(t-x), F_1(t-x), F_2(t-x), F_3(t-x))\,,$$

wobei die Funktionen F_0, F_1, F_2 und F_3 über die folgenden Differentialgleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}u} &= \frac{1}{2}h_{00}(u), & \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}u} &= -\frac{1}{2}h_{11}(u), \\ \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}u} &= h_{02}(u), & \frac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}u} &= h_{03}(u), \end{aligned}$$

mit $u = t - x$. Diese Wahl befriedigt offensichtlich (7.32) und (7.31) und sie läßt darüber hinaus h_{22}, h_{23} und h_{33} unverändert. Somit gibt es tatsächlich eine Transformation, welche h_{ab} auf die *kanonische Form*

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix}$$

transformiert. Damit hängt h_{ab} nur von zwei Funktionen, nämlich $h_{22}(t-x)$ und $h_{23}(t-x)$ ab!

7.4 Polarisationszustände

Ist nun $h_{23} = 0$, so findet man das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - [1 - \varepsilon h_{22}(t-x)]\,\mathrm{d}y^2 - [1 + \varepsilon h_{22}(t-x)]\,\mathrm{d}z^2. \tag{7.33}$$

Wir finden also eine h_{22}-*Welle*. Wir wollen nun annehmen, daß h_{22} irgendeine oszillierende Funktion von $u = t - x$ ist, derart daß h_{22} Werte größer und kleiner Null aufweist. Wir wollen dann untersuchen, was geschieht, wenn eine solche h_{22}-Welle auf ein Testteilchen trifft. Wir betrachten zunächst zwei benachbarte Teilchen in der (y, z)-Ebene, welche sich anfänglich in den Positionen (y_0, z_0) und $(y_0 + \mathrm{d}y, z_0)$ befinden.

Unter Verwendung von (7.33) ergibt sich dann der echte Abstand mit

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - \varepsilon h_{22})\mathrm{d}y^2$$

als koordinatenunabhängige Eigenschaft. Verändert sich nun h_{22} von anfänglich Null zu positiven Werten, so bewegen sich die Teilchen aufeinander zu.

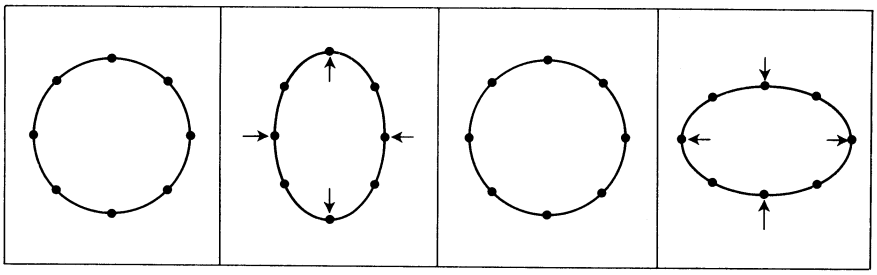

Abbildung 7.1: Zeitliche Abfolge, welche den transversalen Einfluß einer linearen, oszillierenden Gravitationswelle mit +-Polaristation verdeutlicht.

Wenn sich dann h_{22} zu negativen Werten hin weiterentwickelt, bewegen sich die beiden Testteilchen wieder auseinander. Genau das umgekehrte Verhalten hätte man beobachtet, wenn sich die Teilchen in den Positionen (y_0, z_0) und $(y_0, z_0 + \mathrm{d}z)$ befunden hätten, da dann

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 + \varepsilon h_{22})\mathrm{d}z^2$$

gegolten hätte. Wenn also eine solche Gravitationswelle auf einen Ring von Staubteilchen auftritt, welcher sich in der (y, z)-Ebene befindet, so ergibt sich das Bild einer pulsierenden Ellipse, wie es in Abb. 7.1 dargestellt ist. Aus dieser Beschreibung wird die *transversale* Natur der h_{22}-Welle offensichtlich. Man spricht von *+-Polarisation.*

Wir wollen nun die h_{23}-Welle untersuchen, also den Fall $h_{22} = 0$. Es gilt dann:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 + 2\varepsilon h_{23}(t - x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}z^2. \tag{7.34}$$

Wenn wir in der (y, z)-Ebene eine Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} y &\rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) \\ z &\rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z) \end{aligned}$$

durchführen, so folgt für (7.34):

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - [1 - \varepsilon h_{23}(t - x)]\, \mathrm{d}y'^2 - [1 + \varepsilon h_{23}(t - x)]\, \mathrm{d}z'^2,$$

also das Ergebnis (7.33). Die h_{23}-Welle hat also denselben Effekt wie die h_{22}-Welle, nur die Achsen wurden um 45° gedreht. Man spricht von einer Welle mit *x-Polarisation* und der zeitliche Ablauf der Wirkung einer solchen Welle auf einen Ring von Staubteilchen, welcher in der (y, z)-Ebene liegt, ist in Abb. 7.2 dargestellt.

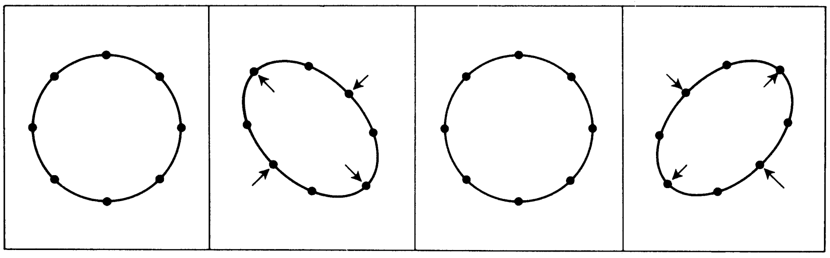

Abbildung 7.2: Zeitliche Abfolge, welche den transversalen Einfluß einer linearen, oszillierenden Gravitationswelle mit x-Polaristation verdeutlicht.

7.5 Exakte, ebene Gravitationswellen

Wir führen wieder Nullkoordinaten

$$u = t - x, \qquad v = t + x$$

in (7.33) ein; dann wird das Linienelement die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u\mathrm{d}v - f^2(u)\mathrm{d}y^2 - g^2(u)\mathrm{d}z^2 \tag{7.35}$$

haben, wobei

$$\begin{aligned} f^2(u) &= 1 - \varepsilon h_{22}(u) \\ g^2(u) &= 1 + \varepsilon h_{22}(u) \end{aligned}$$

gilt. Die Funktionen f und g wurden dabei quadratisch eingeführt um die korrekte Signatur der Metrik sicherzustellen (was für kleine ε erlaubt ist).

Wir wollen nun (7.35) als einen Ansatz ansehen, dieses Linienelement in die Vakuumfeldgleichungen einführen, und überprüfen, ob diese gelöst werden können. Man berechnet zunächst die Verknüpfungen und findet

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= 2ff' \\ \Gamma^1_{33} &= 2gg' \\ \Gamma^2_{02} &= f'/f \\ \Gamma^3_{03} &= g'/g, \end{aligned}$$

wobei $'$ für die Ableitung nach u steht. Der Riemanntensor hat dann zwei Elemente

$$\begin{aligned} R_{0202} &= ff'' \\ R_{0303} &= gg'' \end{aligned}$$

und es folgt nur eine Vakuumfeldgleichung

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = 0.$$

Wir führen nun $h(u) = f''/f$ ein und damit ist die Feldgleichung offensichtlich befriedigt, wenn

$$\frac{g''}{g} = -h(u)$$

gilt. Damit sind f und g durch $h(u)$ bis auf Integrationskonstanten bestimmt. Somit führt jede beliebige Funktion $h(u)$ zu einer Vakuumlösung. Solche - exakte - Lösungen werden *linear-polarisierte* ebene Gravitationswellen genannt. Sie stellen Gravitationswellen mit ebener Wellenfront dar, welche sich in x-Richtung ausbreitet. Sie wurden von jeglichen Quellen abstrahiert.

Das Linienelement (7.35) wurde bereits von *Rosen* vorgeschlagen, und die Transformation

$$U = u, \quad V = v + y^2 f f' + z^2 g g', \quad Y = fy, \quad Z = gz$$

bringt (7.35) auf die *Brinckmann-Form*:

$$\mathrm{d}s^2 = h(U)\left(Z^2 - Y^2\right)\mathrm{d}U^2 + \mathrm{d}U\mathrm{d}V - \mathrm{d}Y^2 - \mathrm{d}Z^2. \tag{7.36}$$

In dieser Form des Linienelementes sieht man die explizite Abhängigkeit von der frei definierbaren Funktion h. Man kann zeigen, daß h die Amplitude der polarisierten Welle beschreibt.

Die Lösungen (7.36) sind in hohem Maße unphysikalisch. Es wird aber gehofft, daß sie einige Eigenschaften reeller Wellen haben werden, die von gebundenen Quellen ausgehen und die man in sehr großer Entfernung von diesen Quellen beobachten kann. Sie erlauben insbesonders die Behandlung des Streuproblemes von Gravitationswellen. In der allgemeinen Relativitätstheorie besteht kein Überlagerungsprinzip aufgrund der Nichtlinearität der Feldgleichungen. Man kann aus (7.36) nur schließen, daß zwei Gravitationswellen, welche sich in dieselbe Richtung ausbreiten, überlagert werden können, indem man ihre Amplituden addiert. Streuprobleme treten also nur auf, wenn sich zwei Wellen in unterschiedliche Richtung ausbreiten. In einem solchen Fall ist es aber stets möglich einen Beobachter zu finden, für welchen ein solcher Fall einem Frontalzusammenstoß entspricht. Dieses spezifische Problem wurde von *Penrose, Khan* und *Szekeres* behandelt und führt im wesentlichen dazu, daß das System eine intrinsische Singularität entwickelt. In dieser werden die Invarianten des Krümmungstensors singulär. Zusätzlich treten noch zwei Koordinatensingularitäten auf.

Es stellt sich die unmittelbare Frage, weshalb solche Singularitäten nicht beobachtet werden. Eine mögliche Antwort besteht darin, daß Singularitäten

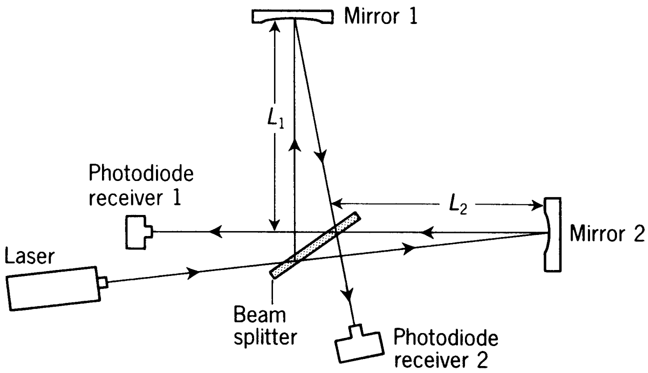

Abbildung 7.3: Idealisiertes Schema eines Laserinterferrometers.

Artefakte unserer ebenen Geometrie sind, und daß realistischere Rechnungen solche Singularitäten nicht mehr aufweisen sollten. Eine andere Antwort weist darauf hin, daß bei den Amplituden der Gravitationswellen, welche möglicherweise existieren können, der Aufbau solcher Singularitäten einen großen Zeitraum in Anspruch nimmt, welcher mit dem Alter des Universums vergleichbar ist.

7.6 Auffinden von Gravitationswellen

Der Pionier auf diesem Gebiet ist *J. Weber*, dessen Arbeiten auf 1960 zurückgehen. Seine Methode beruht auf der Tatsache, daß freie Teilchen, welche sich in einem Gravitationsfeld bewegen, eine relative Beschleunigung erfahren, wie sie aus der Gleichung für die geodätische Abweichung berechnet werden kann. Die Technik bestand darin die Verformung eines großen Aluminiumzylinders zu messen, welche dieser bei jedem Einfluß von Gravitationswellen erfährt. Webers Ergebnisse, welche auf Gravitationswellen (Gravitationsstrahlung) hinwiesen, die vom Zentrum der Galaxis ausgeht, sind aber bis heute überaus kontroversiell.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Konstruktion von Laserinterferrometern, wie in Abb. 7.3 schematisch dargestellt. Der große Vorteil dieser Detektoren besteht darin, daß sie eine sehr große Empfindlichkeit

$$h = \Delta(L_1 - L_2)/L_1$$

haben, wenn Δ die Änderung aufgrund der Gravitationswelle ist.

Welches sind nun mögliche Quellen von Gravitationsstrahlung? Man unterscheidet drei Arten von Quellen: (a) *Ausbrüche*, (b) *periodische Quellen*

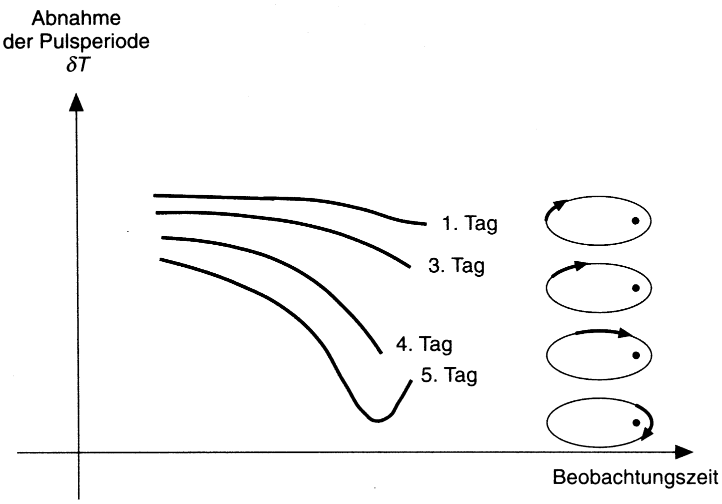

Abbildung 7.4: Abnahme der Pulsperiode des Pulsars PS1913+16.

und (c) *stochastische Quellen.* Quellen für *Ausbrüche* sind kollabierende oder fluktuierende Kerne von Supernovae in unserer oder in anderen Galaxien, das Entstehen von massiven schwarzen Löchern, die Kollision zwischen schwarzen Löchern oder zwischen schwarzen Löchern und Neutronensternen, galaktische Kerne und Quasare. Schließlich besteht noch die Möglichkeit des "Hineinspiralens" und des Verschmelzens und schließlich die Möglichkeit der Zerstörung kompakter Binärsysteme. *Periodische Quellen* könnten binäre Sternsysteme, rotierende, deformierte Sterne, rotierende, deformierte weiße Zwerge, oder pulsierende weiße Zwerge nach Novaausbrüchen sein. *Stochastische Quellen* bestehen natürlich aus dem (heißen) Big-Bang, Inhomogenitäten im sehr frühen Universum und in schwarzen Löchern, welche aus Sternen der Population III resultieren, also Sternen, welche vor der Formierung der Galaxien bestanden haben. Die Amplituden h solcher Wellen bewegen sich nach *Thorn* im Bereich $10^{-28} < h < 10^{-12}$, wobei der Bereich $10^{-16} < h < 10^{-12}$ Ausbrüchen zuzurechnen ist und aus einer extrem optimistischen Abschätzung folgt. Die stärksten Quellen vermutet man im Bereich $10^{-23} < h < 10^{-18}$ mit dem Frequenzbereich $10^{-4} < \nu < 1\,\mathrm{Hz}$ für periodische Systeme.

Von besonderem Interesse ist der Binärpulsar PS1913+16, welcher seit 1974 intensiv beobachtet wird. In diesem Doppelsternsystem ist ein Partner ein Pulsar, welcher Pulse von Radiowellen aussendet. Die Dauer der Radioimpulse beträgt $\simeq 59.02 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ und man stellt sich den Pulsar als einen Neutronenstern vor. Die Radioimpulsaussendung soll dabei vergleichbar mit der Lichtaussendung eines Leuchtturms sein. Demnach wäre die Rotationsfrequenz des Neutronensterns etwa 16.9 Hz. Neutronensterne haben an ihrer Oberfläche sehr hohe Magnetfelder ($\sim 10^6\,\mathrm{T}$) und in diesem Fall deckt sich die Achse Nord- und Südpol nicht mit der Rotationsachse. Nachdem dieses starke Magnetfeld vornehmlich Elektronen und Ionen von der Oberfläche des Neutronensternes absaugt und sie in Richtung der Pole beschleunigt, wird auch die Hauptintensität der Strahlung von den Polen ausgehen. Dadurch entsteht der Leuchtturmeffekt.

Warum glaubt man nun, daß es sich hier um ein Doppelsternsystem handelt? Der Begleiter des Pulsars ist nicht zu sehen, weder im sichtbaren noch im Radiowellenbereich. Die Messung der empfangenen Radioimpulse zeigt aber, daß sich die Pulsperiode ändert (Abb. 7.4). Wenn es sich nun um ein Doppelsternsystem handelt, dessen Bahnebene nicht senkrecht zur Sichtrichtung liegt, so kommt der Pulsar manchmal auf uns zu, manchmal bewegt er sich aber auch von uns weg. Am Periastron (dem Punkt, welcher dem Bahnzentrum am nächsten liegt) hat er außerdem die größte Geschwindigkeit und am Apastron die kleinste; im Periastron ist auch der Übergang von Beschleunigung und Abbremsung am größten. Aus der regelmäßigen Abnahme der Pulsperiode und ihrer darauf folgenden Zunahme schließt man auf eine Bahnperiode des Pulsars von $T_p = 7.75\,$Stunden. Daraus folgt eine Maximalgeschwindigkeit von $400\,$km/s oder $v_{\max}/c = 1.3 \times 10^{-3}$ und damit ist das System als relativistisch einzustufen.

Das Modell, welches für dieses Doppelsternsystem anzuwenden ist, muß folgerichtig über die Keplerbewegung hinausgehen. Man muß das allgemeinrelativistische Zweikörperproblem zumindest näherungsweise lösen. In der langen Beobachtungsdauer (14 Jahre, mehr als 1000 Umläufe pro Jahr) hat man eine Änderung $\dot{T}_p$ der Bahnperiode gemessen, welche nach der in diesem Kapitel erarbeiteten Vorstellung zur Abstrahlung von Gravitationsstrahlung berechenbar sein müßte. Berücksichtigt man noch die Perihelverschiebung, so sollte nach den theoretischen Rechnungen

$$\dot{T}_p = -(2.40216 \pm 0.00021) \times 10^{-12}$$

sein. Beobachtet wurde ein Wert von $-(2.427 \pm 0.026) \times 10^{-12}$, was einer außergewöhnlich guten Übereinstimmung entspricht.* Man neigt also heute zu der Ansicht, daß dieses Resultat den ersten indirekten Nachweis von Gravitationswellen bedeutet.

*J.H. Taylor und J.M. Weisberg, Astrophys. J. **345**, 434 (1989).