Kapitel 8

Kosmologien

8.1 Die kosmologosche Konstante

Es gelten die Feldgleichungen (4.27)

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}. \tag{8.1}$$

Nun überträgt sich die Divergenzfreiheit des Einstein-Tensors

$$\triangledown_a G^{ab} = 0, \quad \triangledown^a G_{ab} = 0,$$

und die Symmetrieeigenschaft

$$G_{ab} = G_{ba}$$

auf den Energie-Impulstensor T_{ab}. Für ihn muß also

$$\triangledown_a T^{ab} = 0, \quad \triangledown^a T_{ab} = 0,$$

und

$$T_{ab} = T_{ba}$$

gelten. Die Forderung der Divergenzfreiheit wird aber auch von Gleichungen vom Typ

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{8.2}$$

erfüllt, wie bereits in Abschnitt 4.9.1 besprochen wurde. Der *kosmologische Term* Λg_{ab} tritt als Folge der kovarianten Differentiation auf: aus dem Verschwinden der Divergenz der Tensoren G_{ab} und T_{ab} folgt deren Proportionalität bis auf eine Integrationskonstante, eben etwa Λg_{ab}.

Man kann die Feldgleichung entsprechend

$$G_{ab} = \kappa \left(T_{ab} - \frac{\Lambda}{\kappa} g_{ab} \right)$$

schreiben und wir führen den Tensor

$$T_{ab}^{\mathrm{vac}} = -\frac{\Lambda}{\kappa} g_{ab} \tag{8.3}$$

ein. Zur möglichen Existenz von T_{ab}^{vac}, dem Energie-Imnpulstensors des Vakuums, kann man ausführen:

> Mechanik und Feldtheorie bestimmen nur Energieunterschiede aber nicht den Absolutwert der Energiedichte eines Systems. Die ausschließlich in der Gravitationstheorie benötigten Absolutwerte erhält man nur, wenn man dem Vakuum, also dem leeren Raum, willkürlich eine Energiedichte zuschreibt, welche man meist zu Null wählt.
>
> Die Quantenfeldtheorie zeigt aber, dass Fluktuationen (Erzeugen und Vernichten virtueller Teilchenpaare) zu einem nicht verschwindenden Energie-Impulstensor T_{ab}^{vac} des Vakuums führen können. Bei Lorentz-Invarianz des Vakuums kann T_{ab}^{vac} nur die obige Form haben, mit Λ/κ der Energiedichte des Vakuums.

Gegen ein $\Lambda \neq 0$ scheint aber zu sprechen:

(a) der Newtonsche Grenzfall,

(b) Forderung der Flachheit der Raum-Zeit für verschwindenden Energie-Impulstensor.

Ad (a): Der korrespondenzmäßige Anschluß der erweiterten Feldgleichung (8.2) führt nur dann zur Poisson-Gleichung vom Typ

$$\nabla^2 U_G = -\frac{c\kappa^2}{2}\rho,$$

[siehe Gleichung (4.45)] wenn $\Lambda = 0$ ist. Andernfalls würde die modifizierte Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 U_G = -\frac{c\kappa^2}{2}\rho - c^2\Lambda$$

resultieren. Führt man mit

$$\rho_{\mathrm{vac}} c^2 = 2c^2 \frac{\Lambda}{\kappa} \tag{8.4}$$

die *Energiedichte des Vakuums* ein, so könnte man schreiben:

$$\nabla^2 U_G = -\frac{c\kappa^2}{2}\left(\rho + \rho_{\mathrm{vac}}\right).$$

Ad (b): Wir multiplizieren (8.2) mit dem metrischen Tensor und verjüngen zweifach:

$$g^{ab}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab}\right) = \kappa g^{ab}T_{ab}.$$

Mit

$$R = g^{ab}R_{ab}, \quad T = g^{ab}T_{ab}, \quad g^{ab}g_{ab} = 4$$

erhalten wir:

$$R = -\kappa T + 4\Lambda.$$

Wir setzen dies in (8.2) ein und finden erweiterte Feldgleichungen

$$R_{ab} = \kappa\left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} + \frac{\Lambda}{\kappa}g_{ab}\right).$$

Im Sonderfall eines verschwindenden Tensors T_{ab} erhalten wir

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab},$$

was eine flache Raum-Zeit nur für $\Lambda = 0$ zuläßt.

8.2 Der Begriff 'Kosmologie'

Kosmologie ist das Studium der dynamischen Struktur des Universums als Ganzes. Man geht dabei von einfachsten Modellen aus und hofft diese dann schrittweise zu verfeinern. Dazu "schmiert" man alle Irregularitäten in Raum und Zeit aus und konzentriert sich auf die groben Eigenschaften. Man igoriert also Details wie das Sonnensystem, unsere Galaxis, unseren lokalen Galaxienhaufen, etc. Man konzentriert sich auf die Gesamtmechanik des Systems. Die aus einer solchen Vorstellungswelt resultierenden Lösungen einer relativistischen Kosmologie sind die FRIEDMANN *Modelle*.

Historisch, als es noch wenig verläßliche Beobachtungen gab, wurden periodisch unterschiedliche FRIEDMANN Modelle als das jeweils Beste angesehen. Ein einaches nicht-FRIEDMANN Modell hat sich aber gehalten: das Modell des *stationären Zustandes*, welche auf dem perfekten kosmologischen Prinzip aufbaut, dass sich das Universum in Raum und Zeit nicht verändert.

In letzter Zeit hat sich das Modell des *Hot Big Bang* als das beste herausgestellt: vor etwa 10^{10} Jahren entstand plötzlich das Universum und expandierte aus einem Punkt. Anfänglich bestand es aus Strahlung bei ungeheur hohen Temperaturen und Dichten. Aufgrund der Expansion ging Temperatur und Dichte zurück und Protonen, Neutronen und Elektronen entstanden. Später dann einfache Atome, wie Wasserstoff und Helium, auf welche die schwereren Elemente folgten. Diesen Zustand kann man bereits mathematisch behandeln und es ist ein großer Erfolg dieses Modells, dass die Vorhersage der Menge (Verteilung) schwerer Elemente im Universum mit der Beobachtung gut übereinstimmt. Dieses Modell macht aber noch etwas sehr deutlich: bei der Modellbildung des Gesamtuniversums hat man das Verständnis der *lokalen* physikalischen Gesetze verwendet. (Wir können ja auch nicht anders!) Dieses Konzept war bisher sehr erfolgreich. Man kann aber nicht ausschließen, dass auf kosmologischer Skala zusätzliche Wechselwirkungen bestehen. Ein Beispiel hierfür ist der bereits besprochene kosmologische Term Λg_{ab}.

8.3 Das kosmologische Prinzip

Kosmologien basieren auf dem Prinzip der Einfachheit. Eigentlich ist dies eine Verallgemeinerung des Prinzips von Kopernikus, dass die Erde nicht das Zentrum des Sonnensystems ist. In diesem Sinne ist nicht zu erwarten, dass die Erde, das Sonnensystem, unsere Galaxis, oder unser lokaler Galaxienhaufen eine besondere Position im Universum einnehmen. Es gilt also das *kosmologische Prinzip*:

> *In jeder Epoche hat das Universum von jedem Punkt dasselbe Aussehen, wenn man von lokalen Unregelmäßigkeiten absieht.*

Dazu nehmen wir an, dass es eine kosmische Zeit t gibt und formulieren das Prinzip für raumartige Zeitscheiben $t = konst.$ Jede Zeitscheibe hat keine priviligierten Punkte und dies bedeutet, daß sie *homogen* ist. Damit muß jede raumähnliche Hyperfläche einen Satz von Isometrien zulassen, welche jeden Punkt in jeden anderen Punkt abzubilden erlauben. Das Prinzip verlangt aber auch, dass die Mannigfaltigkeit keine ausgezeichneten Richtungen um einen Punkt haben darf, also *isotrop* ist. Somit muß es auch um diese Punkte sphärisch symmetrisch sein. Eine Mannigfaltigkeit ist *global isotrop*, wenn sie um jeden Punkt isotrop ist. Man kann zeigen, dass eine global isotrope Mannigfaltigkeit notwendig homogen ist. Somit verlangt das kosmologische Prinzip, dass die Raum-Zeit in raumartige Hyperflächen "aufgeschnitten" werden kann, welche in jedem ihrer Punkte sphärisch symmetrisch sind. Diese Homogenität ist wie die Homogenität eines Gases zu verstehen: sie ist nicht auf das Universum im Detail anzuwenden, sondern auf das ausgeschmierte Universum.

Dieses Prinzip wird von der 1965 entdeckten Hintergrundstrahlung (infrarot, $T = 2.7\,\mathrm{K}$) gestützt, welche bis auf einige Bruchteile von Prozent isotrop ist. Diese Strahlung ist, so wird angenommen, das was von Big Bang übrig geblieben ist.

8.4 NEWTONsche Kosmologie

Dies ist ein einfaches, diskretes Modell, in welchem angenommen wird, dass das Universum aus einer endlichen Zahl von Galaxien besteht. Die i-te Galaxie habe die Masse m_i und nehme die Position $\mathbf{r}_i(t)$ ein, welche von einem festen Ursprung O aus bestimmt wird. Es gelte im weiteren das kosmologische Prinzip derart, dass die Bewegung um O sphärisch symmetrisch sein soll. Somit ist die Bewegung der Galaxien eine Radialbewegung, also

$$\mathbf{r}_i(t) = r_i(t)\hat{\mathbf{r}},$$

mit $\hat{\mathbf{r}}$ dem Einheitsvektor in Radialrichtung. Wir erhalten für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2(t),$$

mit n der Zahl der Galaxien im Universum. Die potentielle Energie aufgrund der Gravitation zwischen den Galaxien m_i und m_j ist durch das NEWTONsche Gravitationsgesetz bestimmt und man erhält

$$V = -\gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|},$$

wobei jedes Galaxienpaar nur einmal gezählt wird. Wir *nehmen* weiters an, dass eine kosmologische Kraft

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{3}\Lambda m_i \mathbf{r}_i$$

existiere. Λ ist die kosmologische Konstante. Diese Kraft resultiert in einer zusätzlichen potentiellen Energie V_c des Systems. Sie ist durch

$$V_c = -\frac{\Lambda}{6}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

gegeben. All dies resultiert in der Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 - \gamma {\sum_{i,j=1}^{n}}' \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \frac{\Lambda}{6}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Gehen wir nun davon aus, dass die Verteilung und die Bewegung des Systems zu einer bestimmten Epoche t_0 bekannt ist, so gilt für die Radialbewegung

$$r_i(t) = S(t) r_i(t_0), \tag{8.5}$$

mit der universellen Funktion $S(t)$, welche für alle Galaxien gleich ist. Sie wird die *Skalenfunktion* genannt. Daraus folgt, dass die einzigen Bewegungsformen, welche mit der Forderung der Homogenität und der Isotropie vereinbar sind, die der gleichförmigen Expansion oder Kontraktion sind. Die Radialgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(t) &= \dot{S}(t) r_i(t_0) \\ &= \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} r_i(t) \\ &= H(t) r_i(t), \end{aligned} \tag{8.6}$$

mit $H(t)$ dem HUBBLE-*Parameter*. Gleichung (8.6) wird auch das HUBBLE*sche Gesetz* genannt. Der Wert des HUBBLE-Parameters in unserer Epoche wird HUBBEL*sche Konstante* genannt. Wir formen um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{S}^2(t) r_i^2(t_0) = A\dot{S}^2(t) \\ \gamma {\sum_{i,j=1}^{n}}' \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)|} &= \gamma {\sum_{i,j=1}^{n}}' \frac{m_i m_j}{S(t)|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)|} = \frac{B}{S(t)} \\ \frac{\Lambda}{6}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2(t) &= \frac{\Lambda}{6}\sum_{i=1}^{n} m_i S^2(t) r_i^2(t_0) = DS^2(t) \\ D &= \frac{1}{3}\Lambda A. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Gesamtenergie

$$E = A\dot{S}^2(t) - \frac{B}{S(t)} - DS^2(t). \tag{8.7}$$

Dies ist eine Form der *kosmologischen Differentialgleichung* für die Skalenfunktion $S(t)$. Zur Interpretation dieses Ergebnisses wird zunächst angenommen, dass $\Lambda = 0$ ist. Somit kann der dritte Term von (8.7) gestrichen werden. Expandiert das Universum, dann wird der zweite Term mit zunehmenden $S(t)$ kleiner und damit muß auch der erste Term kleiner werden, da ja E konstant bleibt. Die Expansion muß sich also verlangsamen. Ist hingegen $\lambda > 0$, so erfahren alle Galaxien eine kosmische Abstoßung, welche sie vom Ursprung ins Unendliche drängt. Für $\Lambda < 0$ ist das Gegenteil zu beobachten.

Wir formen nun Gleichung (8.7) in

$$\begin{aligned} \dot{S}^2(t) &= \left(\frac{B}{A}\right)\frac{1}{S(t)} + \frac{D}{A}S^2(t) + \frac{E}{A} \\ &= \left(\frac{B}{A}\right)\frac{1}{S(t)} + \frac{1}{3}\Lambda S^2(t) + \frac{E}{A} \end{aligned} \tag{8.8}$$

um und führen den neuen Skalenfaktor

$$R(t) = \mu S(t)$$

ein. Wir multiplizieren (8.8) mit μ^2 und erhalten

$$\dot{R}^2(t) = \frac{C}{R(t)} + \frac{1}{3}\Lambda R^2(t) - k, \tag{8.9}$$

mit

$$C = \frac{B\mu^3}{A}, \quad k = -\mu^2 \frac{E}{A}.$$

Ist $E = 0$ kann man μ frei wählen, ist aber $E \neq 0$, so wählt man

$$\mu^2 = \frac{A}{|E|},$$

und damit kann k nur die Werte -1, 0 und 1 annehmen. Die Gleichung (8.9) entspricht dann formal einer FRIEDMANN-*Gleichung*, wie sie aus relativistischen Kosmologien gewonnen wird.

8.5 Das Postulat von WEYL

WEYL versuchte das Problem zu lösen wie eine Theorie, wie die allgemeine Relativitätstheorie, auf ein einziges System, das Universum, angewendet werden könnte. Die allgemeine Relativitätstheorie beschäftigt sich ja mit der Äquivalenz von Beobachtungen, welche von relativ zueinander beschleunigten Beobachtern gemacht werden. Das Universum ist aber *ein* System, welches in unterschiedlichen Bewegungszuständen dem Beobachter unterschiedlich erscheint. WEYL hat nun festgestellt, dass die allgemeine Relativitätstheorie eine gute Basis für kosmologische Untersuchungen darstellt. Das bereits formulierte kosmologische Prinzip ist eine notwendige Erweiterung. WEYL hat zusätzlich angenommen, dass es eine priviligierte Klasse von Beobachtern im Universum gibt, nämlich jene, welche mit der ausgeschmierten Bewegung der Galaxien assoziiert sind. WEYL postuliert dann ein *Substrat* oder *Fluid*, welche(s) den Raum erfüllt, in welchem(r) sich die Galaxien wie fundamentale Teilchen bewegen, und er nimmt für diese Teilchen eine besondere Bewegung an. Dies kann im folgenden Postulat ausgedrückt werden:

> *Die Teilchen des Substrats bewegen sich in der Raum-Zeit auf einer Schar zeitartiger Geodäten, welche einem Punkt in der endlichen oder unendlichen Vergangenheit entspringen.*

Dieses WEYL*sche Postulat* fordert, dass sich die Geodäten nicht schneiden, ausgenommen in einem einzigen Punkt in der Vergangenheit und, möglicher Weise, in der Zukunft. Somit geht eine und nur eine Geodäte durch jeden Punkt der Raum-Zeit und damit hat die Materie in jedem Punkt eine bestimmte Geschwindigkeit. Somit kann das Substrat als ideales Fluid angesehen werden. Dies stimmt gut mit der Beobachtung überein: die Galaxien zeigen zufällige Abweichungen von der allgemeinen Bewegung in der Größenordnung von einem Tausendstel der Lichtgeschwindigkeit. Die allgemeine Geschwindigkeit ist aber mit der des Lichtes vergleichbar, womit man diese zufälligen Abweichungen zumindest in erster Näherung vernachlässigen kann. Die Tatsache, dass sich das Universum auszudehnen scheint, unterstützt ebenfalls das WEYLsche Postulat.

8.6 Relativistische Kosmologien

Sie basieren auf drei Annahmen:

(a) Das kosmologische Prinzip.

(b) Das WEYLsche Postulat.

(c) Die allgemeine Relativitätstheorie.

Aus WEYLS Postulat folgt, dass die Geodäten der Teilchen des Substrats *orthogonal* zu raumartigen Hyperflächen sind. Mit den Koordinaten (t, x^1, x^2, x^3) sind diese raumartigen Hyperflächen durch $t = konst$ bestimmt und die Koordinaten x^μ, $\mu = 1, 2, 3$ sind entlang der Geodäten konstant. Also sind die raumartigen Koordinaten jedes Teilchens entlang seiner Geodäte konstant und man spricht davon, dass sich solche Koordinaten gemeinsam bewegen. Aus der Orthogonalitätsbeziehung folgt, dass t so gewählt werden kann, dass

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - h_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \tag{8.10}$$

und $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r})$. Die Koordinate t ist dann die *kosmische* oder *Welt-Zeit*. Eine solche Zeit definiert ein Konzept der Gleichzeitigkeit. Eine *Weltkarte* (siehe auch Abb. 8.1) ist dann die Verteilung von Ereignissen auf den Flächen der Gleichzeitigkeit $t = konst$. Das *Weltbild* ist eine Ansicht des Universums, welches sich dem Beobachter P in jedem Zeitpunkt der Weltzeit darbietet. Es umfaßt alle Ereignisse, welche entlang des Vergangenheitskegels des Beobachters gesehen werden können. Ganz offensichtlich werden Ergeignisse in entfernten Bereichen (vom Beobachter aus gesehen) zu früheren Weltzeiten stattfinden, als solche, welche in der Umgebung des Beobachters stattfinden.

Wir betrachten ein kleines Dreieck, welches aus drei Teilchen des Substrats zu irgeneiner Weltzeit t gebildet wird und auch jenes Dreieck derselben

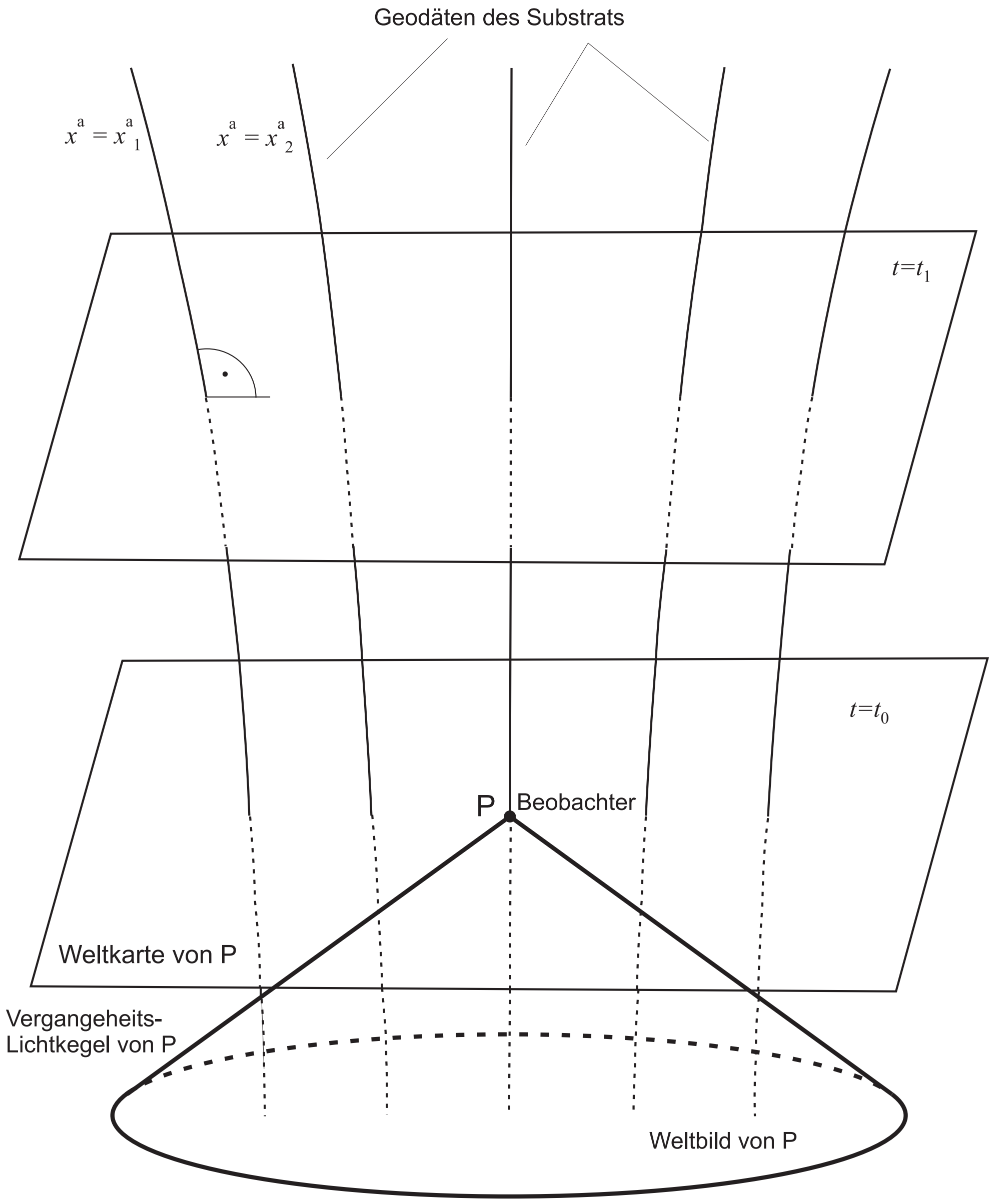


Abbildung 8.1: Kosmische Zeitscheiben und Geodäten des Substrats. Weltkarte und Weltbild des Beobachters P.

Teilchen zu einem späteren Zeitpunkt. Wir benützen nun das kosmologische Prinzip, nach welchem die raumartigen Hyperflächen isotrop und homogen sein müssen, sodaß kein Punkt und keine Richtung der Hyperfläche ausgezeichnet ist. Daraus folgt, dass das Dreieck, welches zu einem späteren Zeitpunkt beobachtet wird dem ersten geometrisch ähnlich sein muß. Darüber hinaus muß der Ähnlichkeitsfaktor (Vergrößerungsfaktor) unabhängig von der Position des Dreiecks auf der Hyperfläche sein. Somit kann die Weltzeit in h_{ab} nur durch einen gemeinsamen Faktor derart auftreten, dass die Abstände, welche kleinen Verschiebungen entsprechen, für alle Zeiten gleich sind. Wir erhalten also:

$$h_{\alpha\beta} = S^2(t) g_{\alpha\beta}(x^\alpha). \tag{8.11}$$

Das Verhältnis der zwei Werte von $S(t)$ zu zwei verschiedenen Zeiten ist dann der Vergrößerungsfaktor, und damit tritt $S(t)$ wieder als *Skalenfaktor* in Erscheinung.

Wir müssen nun noch die Bedingung auferlegen, daß jede Zeitscheibe homogen und isotrop ist und nicht von der Zeit abhängt. Dies verlangt, daß die Krümung der raumartigen Hyperfläche in jedem Punkt konstant sein muß, da sonst nicht alle Punkte geometrisch ident wären. So ein Raum wird als *Raum mit konstanter Krümmung* bezeichnet.

8.6.1 Räume konstanter Krümmung

Differentialgeometrie lehrt uns, dass ein Raum konstanter Krümmung durch den RIEMANN-Tensor

$$R_{abcd} = K \left(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \right) \tag{8.12}$$

charakterisiert ist. K ist eine Konstante und wird *Krümmung* genannt. In unseren raumartigen (3D) Hyperräumen gilt also:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right).$$

Wir erhalten den RICCI-Tensor über die Verjüngung

$$\begin{aligned} g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\beta\delta} \\ &= K g^{\alpha\gamma} \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right) \\ & \left[g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma} = 3, \quad g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\delta} = \delta^\gamma{}_\delta \right] \\ &= K \left(3 g_{\beta\delta} - \delta^\gamma{}_\delta \, g_{\beta\gamma} \right), \end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$R_{\beta\delta} = 2K g_{\beta\delta}. \tag{8.13}$$

Nun ist unser 3D-Hyperraum um jeden Punkt isotrop und daher in jedem Punkt spärisch symmetrisch (Kosmologisches Prinzip). Wir gehen daher vom Linienelent der SCHWARTSCHILD-Lösung nach Gleichung (5.24)

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}\mathrm{d}t^2 - e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{8.14}$$

aus und erhalten im 3D-Raum

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\ &= e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \end{aligned} \tag{8.15}$$

mit $\lambda = \lambda(r)$. Folgt man der bereits im Rahmen der SCHWARTZSCHILD-Lösung diskutierten Methode nach P. JORDAN, so erhält man für die von Null verschiedenen Komponenten des RICCI-Tensors:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= 1 + \frac{1}{2}r\lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \\ R_{33} &\propto R_{22}. \end{aligned}$$

Zum anderen gilt für konstante Krümmung Gleichung (8.13) mit dem Ergebnis:

$$R_{11} = 2Kg_{11} = 2Ke^{\lambda}, \quad R_{22} = 2Kr^2.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{r} &= 2Ke^{\lambda} \\ 1 + \frac{1}{2}r\lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda} &= 2Kr^2. \end{aligned}$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so findet man unschwer die Lösung:

$$e^{-\lambda} = 1 - Kr^2. \tag{8.16}$$

Daraus folgt für das Linienelement

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{8.17}$$

wobei $K > 0$, $K = 0$ oder $K < 0$ möglich ist. Wir führen eine neue Radialkoordinate über

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2} \tag{8.18}$$

ein und erhalten für (8.17):

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \left(1 + \frac{1}{4} K \bar{r}^2\right)^{-2} \left[\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \tag{8.19}$$

Entsprechend der Diskussion auf Seite 206 sind zwei Metriken einander konform, wenn

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

gilt, mit $\Omega(x^a)$ einer differenzierbaren Funktion. Dies trifft offensichtlich auch für Gleichung (8.19) zu und wir stellen fest, dass die Transformation (8.18) zu einer konform flachen Metrik führt.

Andererseits gilt aber das Skalengesetz und aus diesem folgt für das 4D-Wegelement (8.14):

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - S^2(t) \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right].$$

Wir führen nun die Schreibweise $K = |K|k$ ein, mit $k = -1, 0, +1$ und führen mit

$$r^* = \frac{r}{\sqrt{|K|}}$$

eine reskalierte Radialkoordinate ein. Man erhält so das Wegelement:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{S^2(t)}{|K|} \left[\frac{\mathrm{d}r^{*2}}{1 - kr^{*2}} + r^{*2} \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right].$$

Schließlich führen wir noch

$$R(t) = \begin{cases} S(t)\dfrac{1}{\sqrt{|K|}} & K \neq 0, \\ S(t) & K = 0 \end{cases}$$

ein und erhalten für das Linienelement:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t) \left[\frac{\mathrm{d}r^{*2}}{1 - kr^{*2}} + r^{*2} \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \tag{8.20}$$

Zu jeder Epoche $t = t_0$ ist die Geometrie auf der Zeitscheibe durch

$$\mathrm{d}\sigma^2 = R_0^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^{*2}}{1 - kr^{*2}} + r^{*2} \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right]$$

gegeben, mit $R_0 = R(t_0)$. Im folgenden setzen wir $r = r^*$ und untersuchen die drei möglichen Fälle für k.

(a) $\boldsymbol{k = +1}$

In diesem Fall wird für $r \to 1$ das Wegelement $\mathrm{d}\sigma$ singulär. Wir führen also eine neue Koordinate χ über

$$r = \sin\chi$$

ein. Damit wird

$$\mathrm{d}r = \cos\chi\,\mathrm{d}\chi = \sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}\chi$$

und wir erhalten das Linienelement:

$$\mathrm{d}\sigma^2 = R_0^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].$$

Um dieses Ergebnis studieren zu können betten wir die 3D-Hyperebene in einen vierdimensionalen euklidischen Raum mit den Koordinaten (w, x, y, z) ein, wobei wir uns der Transformation

$$\begin{aligned}
w &= R_0\cos\chi \\
x &= R_0\sin\chi\,\sin\theta\,\cos\varphi \\
y &= R_0\sin\chi\,\sin\theta\,\sin\varphi \\
x &= R_0\sin\chi\,\sin\theta
\end{aligned}$$

bedienen. In diesem Einbettungsraum erhalten wir nach kurzer Rechnung das Linienelement

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma^2 &= \mathrm{d}w^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\
&= R_0^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right],
\end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass die vorgeschlagene Einbettung tatsächlich möglich ist. Weiters gilt noch:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2,$$

was zeigt, daß die 3D-Hyperfläche im viedimensionalen euklidischen Einbettungsraum als 3D-Kugel zu verstehen ist. Dies ist in Abb. 8.2 dargestellt, wobei die Koordinate y (bzw. φ) unterdrückt wurde. Für die 3D-Hyperfläche gilt folgender Koordinatenbereich:

$$0 \le \chi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Für eine 2D-Oberfläche $\mathbb{S}^2$ ($\chi = konst.$) erhält man die Fläche

$$A_\chi = \int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}(R_0\sin\chi\,\mathrm{d}\theta)(R_0\sin\chi\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi) = 4\pi R_0^2\,\sin^2\chi,$$

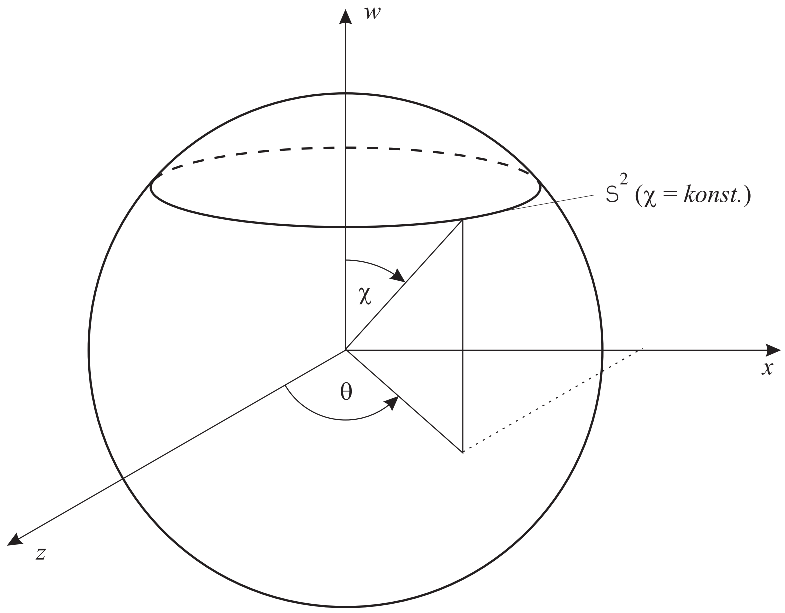


Abbildung 8.2: Oberfläche konstanter Krümmung im vierdimensionalen euklidischen Einbettungsraum mit $\varphi = 0$.

und (θ, φ) sind in diesen Flächen die üblichen Polarkoordinaten einer 2-Kugel (Kreis). Wie wir sehen gehen diese Flächen vom Wert 0 an den Polen bis zum Maximalwert $4\pi R_0^2$ am Äquator. Weiters finden wir für das Volumen (der Fläche der 3-Kugel):

$$V = \int_{\chi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (R_0 \mathrm{d}\chi)(R_0 \sin\chi \, \mathrm{d}\theta)(R_0 \sin\chi \, \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi) = 2\pi^2 R_0^3.$$

Daher bezeichnet man $R(t_0)$ häufig als den *Radius des Universums.*

Der physikalische Raum ist natürlich nirgendwo eingebettet, da er ja alles repräsentiert, was zu dieser Epoche existiert. Somit gibt es außerhalb dieser 3-Kugel keine physikalisch relevanten Punkte und es gibt natürlich auch keine Grenze. Man kann sich dies durch Einführung einer neuen Radialkomponente

$$r' = R_0 \chi$$

besser veranschaulichen. Sie führt zu dem Linienelement

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}r'^2 + R_0^2 \sin^2\left(\frac{r'}{R_0}\right)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right),$$

und die Fläche der 2-Kugeln mit $\chi = konst$ ist durch

$$A_\chi = 4\pi R_0^2 \sin^2\left(\frac{r'}{R_0}\right)$$

gegeben. nun ist für kleine $r' \sin(r'/R_0) \sim r'$ und damit wird $A_\chi \sim 4\pi r'^2$. Wir wählen nun einen beliebigen Punkt P und untersuchen in einer vorgegebenen Epoche die Fläche einer Reihe von 2-Kugeln, welche um P zentriert sind und deren Radius r' ansteigt. Für $r' \ll R_0$ ist die Fläche nahe dem euklidischen Wert $4\pi r'^2$. Nimmt aber r' zu, so nimmt die Fläche wohl zu, wird aber immer kleiner als der entsprechende euklidische Wert. Der Maximalwert ist erreicht, wenn $r' = \pi R_0/2$ ist und dann nimmt die Fläche wieder ab und ist für $r' = \pi R_0$ wieder gleich Null. Somit kehrt jede Geodäte in einem solchen Raum wieder an den Ausgangspunkt zurück. Man bezeichnet daher die Topologie dieses $\mathbb{S}^3$-Raumes als *abgeschlossen*, *begrenzt* oder *kompakt*. Die Topologie der Raum-Zeit wird als *zylindrisch* bezeichnet, da sie das Produkt $\mathbb{R} \otimes \mathbb{S}^3$ ist, mit $\mathbb{R}$ dem euklidischen Raum der eindimensionalen kosmischen Zeit.

(a) $k = 0$

Wir setzen

$$\begin{aligned} x &= R_0 r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= R_0 r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= R_0 r \cos\theta \end{aligned}$$

und erhalten mit

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

das Linienelement eines dreidimensionalen euklidischen Raum. Dieser Raum ist durch den Koordinatenbereich

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

abgedeckt. Die Topologie der Raum-Zeit ist dann die eines vierdimensionalen euklidische Raumes $\mathbb{R}^4$ und man nennt sie *offen*.

(a) $k = -1$

Wir beschreiben in diesem Fall einen Raum konstanter negativer Krümmung. Um diesen Raum besser untersuchen zu können führt man eine neue Koordinate

$$r = \sinh\chi$$

ein, was in

$$\mathrm{d}r = \cosh\chi \mathrm{d}\chi = \sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}\chi$$

resultiert. Daraus folgt das Linienelement

$$\mathrm{d}\sigma^2 = R_0^2 \left[\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right].$$

Dieser $\mathbb{S}^3$-Raum kann in einen MINKOVSKI-Raum der Signatur +2 eingebettet werden. Dieser hat das Linienelement

$$\mathrm{d}\sigma^2 = -\mathrm{d}w^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

wenn man

$$\begin{aligned} w &= R_0 \cosh\chi \\ x &= R_0 \sinh\chi \, \sin\theta \, \cos\varphi \\ y &= R_0 \sinh\chi \, \sin\theta \, \sin\varphi \\ x &= R_0 \sinh\chi \, \sin\theta \end{aligned}$$

wählt. Dies impliziert weiters

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R_0^2,$$

und damit ist unsere 3D-Hyperfläche im vierdimensionalen MINKOVSKI-Raum gegeben. Sie ist eine 3-Hyperbel, welche durch den Koordinatenbereich

$$0 \le \chi \le \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

begrenzt ist. Die zweidimensionalen Hyperflächen $\chi = \mathit{konst}$ sind demnach 2-Kugeln der Fläche

$$A_\chi = 4\pi R_0^2 \sinh^2\chi$$

mit (θ, φ) den üblichen Polarkoordinaten. χ geht von 0 bis ∞ und damit wächst die Fläche einer Folge solcher 2-Kugeln unbegrenzt an. Für große Werte von χ wächst diese Fläche viel schneller an, als wenn der 3D-Hyperraum flach wäre. Das Volumen der 3D-Hyperflächen, welche einer Epoche entsprechen, ist somit unendlich und damit ist die Raum-Zeit Topologie die eines $\mathbb{R}^4$ und *offen*.

Die hier besprochenen Topologien sind die einfachst möglichen und man kann durchaus auch komplexere Fälle für diese drei Fälle konstruieren.

8.6.2 FRIEDMANN **Gleichungen**

Eine relativistische Kosmologie besteht also aus

(1) dem kosmologischen Prinzip, welches als Ergebnis das Linienelement (8.20)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right] \tag{8.21}$$

hat.

(2) das WEYLsche Postulat, welches fordert, dass das Substrat eine ideale Flüssigkeit ist. Somit gilt für den Energie-Impuls Tensor

$$T_{ab} = (\rho + p)\, u_a u_b - p g_{ab},$$

entsprechend Gleichung (6.32).

(3) die allgemeine Relativitätstheorie mit dem kosmologischen Term

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

in relativistischen Einheiten ($c = 1$, $\kappa^0 = 1$).

Man wählt nun für das Linienelement die konform flache Form nach (8.19)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t) \left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \right)}{1 + k\bar{r}^2/4} \right],$$

und man erhält in unserem Koordinatensystem mit

$$u^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei unabhängige Gleichungen als Feldgleichungen

$$3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = 8\pi\rho \tag{8.22}$$

$$\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = -8\pi p, \tag{8.23}$$

mit $\dot{R} = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$.

Aufgrund der Forderung der Homogenität und Isotropie können ρ und p nur Funktionen der Zeit sein. Weiters besteht die Forderung, dass das Fluid realistisch sein soll. Im NEWTONschen Sinn kann somit (8.23) als Bewegungsgleichung angesehen werden, da sie ein $\ddot{R}$ enthält. Gleichung (8.22), hingegen, kann als Integral über die Bewegung interpretiert werden, da sie nur ein $\dot{R}$ enthält. Gleichung (8.22) ist also eine *Energiegleichung*.

Wir differenzieren (8.22) nach t, dividieren durch 8π und addieren das Ergebnis zu (8.23), welches zuvor mit $-3\dot{R}/(8\pi R)$ multipliziert wurde, und erhalten:

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda &= 8\pi\rho & \Big| \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \times\frac{1}{8\pi} \\ \frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda &= -8\pi p & \Big| -\frac{3\dot{R}}{8\pi R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{R}}{R} &= -\frac{3}{8\pi}\frac{\dot{R}}{R}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k}{R^2}}_{=3\frac{\dot{R}^2+k}{R^2}} - \Lambda\right)}_{=8\pi\rho} \\
&= -3\rho\frac{\dot{R}}{R} \quad \Bigg| \quad \times R^3.
\end{aligned}$$

Es folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho R^3\right) + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^3 = 0. \tag{8.24}$$

Wir haben nun im Volumen V einen Satz von Teilchen und aufgrund der Bewegung des Substrats muß $V \sim R^3(t)$ gelten. Es sei nun die Massenenergie im Substrat durch $E = \rho V$ gegeben und dann erhalten wir für (8.24):

$$\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V = 0.$$

Dies ist aber der erste Hauptsatz der Thermodynamik, also der Satz der Energieerhaltung. Wir sehen also, daß der Druck an der Expansion Anteil hat. Dieses Gesetz entspricht natürlich

$$\nabla_b T^{ab} = 0,$$

wie bereits eingehend diskutiert wurde. Natürlich ist dies auch die Folge von

$$\nabla_b\left(G^{ab} - \Lambda g^{ab}\right) = 0.$$

p enthält natürlich alle möglichen Arte von Druck, etwa Druck aufgrund der zufälligen Bewegung der Sterne/Galaxien, Druck aufgrund der Wärmebewegung der Moleküle, etc. Beobachtungen zeigen aber, dass in unserer Epoche der Druck wesentlich kleiner ist als die Energiedichte aufgrund der Materieverteilung und man kann daher $p \approx 0$ setzen, wenn wir nicht zu weit in die Zukunft blicken wollen. Somit besteht das Substrat aus *Staub*. Unter diesen Voraussetzungen folgt aus (8.23) unmittelbar

$$R\left(\dot{R}^2 + k\right) - \frac{1}{3}\Lambda R^3 = C,$$

und (8.22) gibt:

$$C = \frac{8}{3}\pi R^3\rho. \tag{8.25}$$

Dies ist proportional der Energie E, welche im Volumen des Substrats enthalten ist. Diese ist konstant und es gilt Massenerhaltung. Schließlich verwenden wir (8.25) um ρ aus (8.22) zu eliminieren und erhalten mit

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - k \tag{8.26}$$

eine Differentialgleichung, welche bereits für die NEWTONsche Kosmologie aufgefunden wurde. Es ist dies die FRIEDMANN-*Gleichung* für die Variation des Skalenfaktors mit der Weltzeit in Abwesenheit von Druck, also ein staubförmiges Substrat.

8.6.3 Die Ausbreitung von Licht

Wir gehen davon aus, dass Licht in einer relativistischen Kosmologie sich genauso ausbreitet wie in der allgemeine Relativitätstheorie. Wir wollen nun untersuchen, wie der Beobachter O von einer zurückweichenden Galaxis P Licht empfängt. In dieser Untersuchung verwenden wir das Linienelement (8.21). Da wir davon ausgehen, dass die Zeitscheiben homogene 3D-Räume sind, können wir annehmen, dass O im Koordinatenursprung $r = 0$ liegt, ohne die Allgemeinheit zu verletzen. Für eine Nullgedäte gilt dann:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$$

und wir erhalten aus (8.21)

$$\frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}, \tag{8.27}$$

wobei das Plus-Zeichen einer sich entfernenden und das Minus-Zeichen einer sich nähernden Lichtquelle entspricht. Wir betrachten nun einen Lichtstrahl, welcher von der Galaxis P (Weltline $r = r_1$) zur Koordinatenzeit t_1 abgestrahlt wird, und welcher von O zur Koordinatenzeit t_0 empfangen wird. Wir verwenden (8.27) und erhalten

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = -\int_{r_1}^{0} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = f(r_1) \tag{8.28}$$

mit

$$f(r_1) = \begin{cases} \operatorname{arcsin}(r_1) & k = +1 \\ r_1 & k = 0 \\ \operatorname{arsinh}(r_1) & k = -1. \end{cases}$$

Im nächsten Schritt betrachten wir zwei Lichtstrahlen, welche von P zu den Zeiten t_1 und $t_1 + \mathrm{d}t_1$ abgesandt wurden. Sie werden von O zu den Zeiten t_0 und $t_0 + \mathrm{d}t_0$ registriert werden. Es folgt dann aus (8.28)

$$\int\limits_{t_1+\mathrm{d}t_1}^{t_0+\mathrm{d}t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int\limits_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)},$$

da ja jedes Integral gleich derselben Funktion $f(r_1)$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_1+\mathrm{d}t_1}^{t_0+\mathrm{d}t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} - \int\limits_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} &= \int\limits_{t_1+\mathrm{d}t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} + \int\limits_{t_0}^{t_0+\mathrm{d}t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} - \int\limits_{t_1}^{t_1+\mathrm{d}t_1} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} - \int\limits_{t_1+\mathrm{d}t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_0+\mathrm{d}t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} - \int\limits_{t_1}^{t_1+\mathrm{d}t_1} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass $R(t)$ in den Intervallen $[t_1, t_1 + \mathrm{d}t_1]$ und $[t_0, t_0 + \mathrm{d}t_0]$ nicht variiert, so kann man $R(t)$ aus dem Integranden herausziehen und es kann

$$\frac{\mathrm{d}t_0}{R(t_0)} = \frac{\mathrm{d}t_1}{R(t_1)} \tag{8.29}$$

gefolgert werden.

Alle Teilchen des Substrats (Galaxien) haben Weltlinien, auf welchen die Koordinaten r, θ und φ konstant sind und damit folgt aus (8.21) $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2$ und daraus folgt weiter, dass t die korrekte Zeit entlang der Weltlinien des Substrats angibt, und dass $\mathrm{d}t_0$ und $\mathrm{d}t_1$ korrekte Zeitintervalle sind, wie sie vom Beobachter O und der Quelle P gemessen werden. Somit ist infolge (8.29) das Intervall, welches von O emessen wird, gleich $R(t_0)/R(t_1)$ mal dem Zeitintervall $\mathrm{d}t_1$, welches von P gemessen wird. In einem expandierenden Universum gilt

$$t_0 > t_1 \quad \Longrightarrow \quad R(t_0) > R(t_1),$$

und der Beobachter wird eine *Rotverschiebung* z, welche durch

$$1 + z = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \tag{8.30}$$

gegeben ist, feststellen. Hier sind ν_0 und ν_1 die Frequenzen, wie sie vom Beobachter und der Quelle gemessen werden. Diese Verschiebung wird ebenfalls DOPPLER-*Verschiebung* genannt. Sie hat aber nichts mit der relativistischen DOPPLER-Verschiebung zu tun. Ein kontrahierendes Universum würde eine Blauverschiebung zur Folge haben.

Ist nun P 'in der Nähe' von O, dann unterscheiden sich die kosmischen Zeiten zwischen Emission und Empfang nur um einen kleinen Betrag, also $t_0 = t_1 + \mathrm{d}t$ und wir erhalten aus (8.30) in erster Ordnung $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{R(t_0)}{R(t_0 - \mathrm{d}t)} \simeq \frac{R(t_0)}{R(t_0) - \dot{R}(t_0)\mathrm{d}t} \\ &\simeq 1 + \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}\mathrm{d}t \mp \cdots \end{aligned} \tag{8.31}$$

Weiters gilt:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \simeq \frac{\mathrm{d}t}{R(t_1)} = \frac{\mathrm{d}t}{R(t_0 - \mathrm{d}t)} \simeq \frac{\mathrm{d}t}{R(t_0)}.$$

Für kleine r, also Galaxien aus der 'Umgebung', gilt weiters:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = f(r_1) \simeq r_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{R(t_0)} \simeq r_1. \tag{8.32}$$

Somit erhalten wir aus (8.30) das Ergebnis:

$$1 + z \simeq 1 + \dot{R}(t_0) r_1 \quad \Longrightarrow \quad z = \dot{R}(t_0) r_1. \tag{8.33}$$

In jeder Epoche ist die Rotverschiebung z proportional dem Abstand r_1.

8.6.4 Das Hubble-Gesetz

Wir verwenden wieder das Linienelement in der schon bekannten Form (8.21) und wollen einen Ausdruck für den *Helligkeitsabstand* ableiten. Dazu betrachten wir das Licht, welches von der Galaxis P zur Zeit $t = t_1$ vom Punkt P_1 ausgestrahlt wird, und welches von uns in unserer Epoche im Punkt O_0 zur Zeit $t = t_0$ ($t_1 < t_0$) beobachtet wird, wie in Abb. 8.3 angedeutet ist. Das Licht wird sich über eine Kugeloberfläche ausgebreitet haben, welche um das Ereignis P_0 ($t = t_0, r = r_1$) zentriert ist, und welche durch das Ereignis O_0 ($t = t_0, r = r_0$) geht. Die Oberfläche dieser Kugel ist gleich der einer Kugel, welche um das Ereignis O_0 zentriert ist, und welche durch das Ereignis P_0 geht. Sie ist durch die gestrichelte Linie in Abb. 8.3 angedeutet. Dies folgt aus der Homogenität der 3-Kugeln. Das Linienelement für die Kugel ($t = t_0, r = r_1$) ist nach (8.21) durch

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[R(t_0) r_1\right]^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)$$

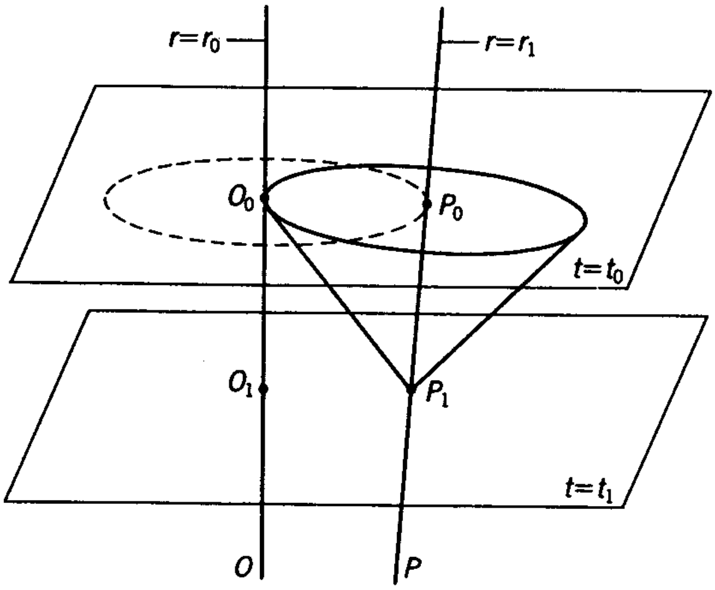


Abbildung 8.3: Licht geht von der Quelle P_1 kugelförmig aus und passiert den Punkt O_0.

gegeben. Dies ist das Linienelement einer Kugel vom Radius $R(t_0)r_1$ und ihre Oberfläche ist daher durch $4\pi R^2(t_0)r_1^2$ gegeben.

Im nächsten Schritt müssen wir eine kosmologische Definition des Abstands einführen. Der Abstandsbegriff läßt sich leicht als der *absolute Abstand* zweier Substratteilchen definieren, welche zur selben Weltzeit betrachtet werden und deren geodätischen Abstand man in der zugehörigen Zeitscheibe mißt. Setzen wir in (8.21) $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$, dann ergibt sich der absolute Abstand d_A zwischen O und P zu einer Zeit t als

$$d_A = R(t) \int_0^{r1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

Dieses Ergebnis ist aber nicht gut handbar.

Man sucht daher anderen Zugang: Nehmen wir an, dass die Größe eines entfernten Nebels bekannt sei, dann können wir die beobachtete Entfernung

$$d_o = \frac{\alpha}{\beta}$$

definieren, wobei α der tatsächliche Durchmesser des Nebels ist und β der beobachtete. Eine solche Defintion erscheint anwendbar, wenn man wüßte, wie man α bestimmen könnte. Da eine solche Methode aber nicht bekannt ist, verwendet man die *augenscheinliche Helligkeit* des Nebels: Es sei E die Energie, welche in der Zeiteinheit vom entfernten Nebel abgestrahlt wird (absolute Helligkeit), und I sei die Intensität der Strahlung, welche in der Zeiteinheit empfangen wird. Nehmen wir weiters an, dass die Energie gleichförmig über die Kugel im euklidischen Raum verteilt ist und vernachlässigen wir die Rotverschiebung, dann kann man die Entfernung als $\sqrt{E/(4\pi I)}$ definieren. In einem expandierenden Universum ist das Zeitintervall, innerhalb welchem ein betimmter Energiebetrag empfangen wird länger als der Emissionszeitraum aufgrund der bereits besprochenen DOPPLER-Verschiebung. Damit wird die Zahl der Photonen, welche in der Zeiteinheit registriert werden, durch einen Faktor $1+z$ verringert. Darüber hinaus wird die Energie jedes Photons um denselben Faktor verringert, da die Energie eine Komponente eines Vierervektors ist und somit durch die Transformation von einem Beobachter zu einem anderen ein Faktor $1+z$ eingeführt wird. All dies führt zur Definition der *Helligkeitsentfernung*:

$$d_L^2 = \frac{E}{4\pi I(1+z)^2}. \tag{8.34}$$

Dies ist im wesentlichen die Entfernung, welche von Astronomen verwendet wird. Die praktische Durchführung der Messung ist eher kompliziert und benötigt als einen Teil die Messung der *sichtbaren Stärke* m, welche durch

$$m = \mathit{konst} - 0.4 \log_{10} E_R$$

mit der empfangenen Energie E_R verknüpft ist.

Die Gleichung (8.34) enthält aber mit E die absolute Helligkeit der Quelle, welche natürlich nicht beobachtet werden kann. Man kann aber die Abstände zu benachbarten Galaxien mit anderen Hilfsmitteln bestimmen und damit kann man ihre absolute Helligkeit bestimmen. Es erscheint so, als hätten alle Galaxien etwa die gleiche Helligkeit, und in erster Näherung wird dies auch so angenommen. Diese Annahme ist sicherlich ungerechtfertigt, da weit entfernte Galaxien viel jünger sind als die in der Umgebung unserer Galaxie existierenden und es besteht daher überhaupt kein Grund für die Annahme, dass alle Galaxien gleich hell seien.

Entsprechend unseren Überlegungen ist nun die beobachtete Intensität durch

$$I = \frac{E}{4\pi r_1^2 R^2(t_0)(1+z)^2}$$

gegeben, mit z der Rotverschiebung entsprechend Gleichung (8.33). Wir vergleichen dies mit (8.34) und erhalten für den Helligkeitsabstand:

$$d_L = r_1 R(t_0). \tag{8.35}$$

Wir führen nun den HUBBLE-Parameter

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{8.36}$$

ein und finden

$$z \simeq \dot{R}(t_0) r_1 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} d_L = H(t_0) d_L, \tag{8.37}$$

mit $H(t_0)$ der HUBBLE-Konstanten unserer Epoche. Wir haben damit das HUBBLE-*Gesetz für relativistische Kosmologien* gefunden. Es sagt aus, dass die radiale Ausbreitungsgeschwindigkeit 'nahe liegender' Nebel, wie sie mit Hilfe der Rotverschiebung z gemessen wird, proportional zu ihrer Entfernung ist.

Wr führen nun den *Bremsparameter*

$$q(t) = -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)}$$

ein. Aus $R(t) > 0$ und $\dot{R}(t) > 0$ (expandierendes Universum) folgt, dass

$$\ddot{R}(t) < 0 \quad \Longrightarrow \quad q(t) > 0$$

gilt und somit mißt ein positives $q(t)$ die Rate mit der sich die Expansion des Unversums verlangsamt. Der Wert $q(t_0) = q$ in unserer Epoche ist ungewiß, aber aufgrund vieler Beoabchtungen ist er positiv und nahe dem Wert Eins. Typisch wird

$$q = 1 \pm 0.5$$

angegeben. Beachten wir ferner, dass $H(t)$ die Dimension einer inversen Zeit hat, so kann man $T(t) = 1/H(t)$ einführen. Aus dem zur Zeit bekannten Wert der HUBBLE-Konstanten (1.4) kann man auf

$$T(t_0) = T \approx 10^{10}\,\text{Jahre}$$

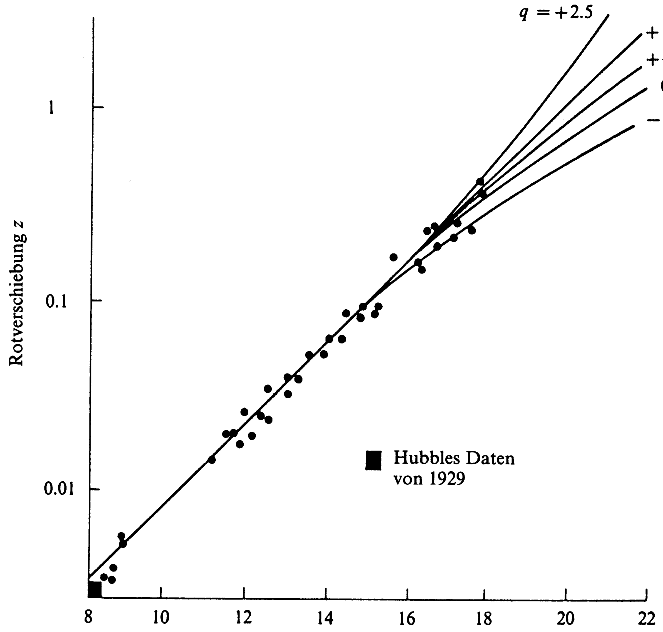
schließen, was bis auf einen Faktor Zwei zutreffen soll.

Für Gleichung (8.31) folgt unter Verwendung von (8.36) zunächst

$$1 + z \simeq 1 + H(t_0)\mathrm{d}t$$

und unter Verwendung von (8.33) und (8.35) folgt schließlich:

$$d_L = z\frac{1}{H(t_0)} = zT.$$



m (korrigierte relative Helligkeit)

Abbildung 8.4: HUBBLE - Diagramm zum Nachweis von Gleichung (8.38).

Führt man schließlich die Entwicklung von (8.31) bis zu Termen zweiter Ordnung in dt weiter, so folgt:

$$d_L = z\,T\left[1 - \frac{1}{2}\,(1+q)\,z + \ldots\right]. \tag{8.38}$$

Objekte, welche zu nahe am Beobachter sind, haben zufällige Bewegungen, welche wir ja in unseren Überlegungen nicht berücksichtigt haben, und welche die allgemeine Bewegung überdecken. Es gibt aber eine ganze Zahl von Nebeln, welche dem Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz gehorchen, und welche eine gute Bestimmung von T erlauben. Für entfernte Galaxien muß Gleichung (8.38) verwendet werden, welche eine zusätzliche Abhängigkeit von q einführt. Abb. 8.4 zeigt, dass dieses Gesetz wirklich sehr gut erfüllt ist. Es ist auch offensichtlich, dass sich für die Werte $q = 0.5$, 1 der wahrscheinlich beste Fit von (8.38) auf der Basis der in Abb. 8.4 eingetragenen Daten ergibt.