Kapitel 2

Die MAXWELLschen Gleichungen

Es sollen in diesem Kapitel die MAXWELLschen Gleichungen und das LORENTZsche Kraftgesetz als logisch vollständige Basis der Elektrodynamik formuliert werden. Dazu muß man zunächst sehen, daß jede physikalische Theorie aus

(i) Grundgrößen

(ii) Axiomen, die die Grundgrößen verknüpfen

besteht. Im Rahmen der Elektrodynamik tauchen zwei Grundgrößen auf:

(1) die elektrische Ladung

(2) der elektrische Strom,

welche es nun einzuführen gilt. Durch sie werden die MAXWELLschen Gleichungen mit der materiellen Umwelt verknüpft.

2.1 Die elektrische Ladung

Wir können grundsätzlich folgenden Standpunkt einnehmen: wir **wissen**, daß es elektrische Ladungen gibt (aber nicht **was** das ist) und daß diese grundsätzlich an Materie gebunden sind. Diese Ladungen kann man miteinander vergleichen, und ein Verhältnis zweier Ladungen läßt sich als Zahl angeben; also:

Die elektrische Ladung Q ist eine skalare Mengengröße.

Definition 2.1 Eine physikalische Größe F heißt *skalare* Mengengröße, wenn sie

(i) einem Raumbereich $\mathbb{B}$ zuzuordnen ist und wenn

(ii) für alle $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ mit $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = 0$

$$F(\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2) = F(\mathbb{B}_1) + F(\mathbb{B}_2) \tag{2.1}$$

gilt.

Wir nehmen damit gleichzeitig auch an, daß wir Ladung **messen** können (wenn wir auch noch nicht wissen wie), und wir ordnen der Ladung auch noch eine **Maßeinheit** zu, daß **Coulomb** (C).

Nach Definition 2.1 gilt also für zwei disjunkte Raumbereiche $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$:

$$Q(\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2) = Q(\mathbb{B}_1) + Q(\mathbb{B}_2), \tag{2.2}$$

wobei die linke Seite dieser Beziehung auch Null sein kann, ohne daß $Q(\mathbb{B}_1)$ und $Q(\mathbb{B}_2)$ verschwinden müssen. Elektrische Ladungen können sich also kompensieren, und wir sprechen von **positiven** und **negativen** Ladungen.

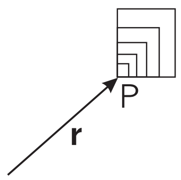
Elektrische Ladungen treten als Vielfache der

Elektrischen Einheitsladung $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

auf, also

$$Q = \pm Ne, \tag{2.3}$$

wobei für makroskopische Ladungen N sehr groß wird, selbst in Raumbereichen, welche man als makroskopisch klein bezeichnen würde. (Beachten Sie bitte, daß e selbst kein Vorzeichen trägt. Man spricht daher oft auch von **Ladungszahl**.) Es ist sinnvoll zu einer Kontinuumsbeschreibung überzugehen:



um einen Raumpunkt P am Ort $\mathbf{r}$ definieren wir eine Folge von Raumbereichen $\mathbb{B}_n$, die sich auf $\mathbf{r}$ konzentrieren, d.h.: für ihr Volumen V_n gilt $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$. In jedem Bereich messen wir die Ladung Q_n und **definieren** die **Ladungsdichte** im Punkte $\mathbf{r}$ als

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{V_n}. \tag{2.4}$$

Diese Raumladungsdichte kann natürlich positive oder negative Werte annehmen. Die Gesamtladung in einem endlichen Raumbereich $\mathbb{B}$ erhält man dann als das Volumsintegral

$$Q = \int_{\mathbb{B}} d^3r\, \rho(\mathbf{r}). \tag{2.5}$$

Wir können nun unschwer **Punktladungen** erfassen; etwa beschreibt

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] \tag{2.6}$$

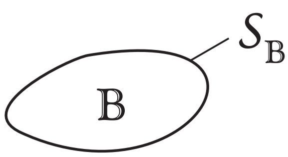
die Ladungsdichte einer Punktladung, welche sich längs einer Bahnkurve $\mathbf{R}(t)$ bewegt, was unmittelbar transparent wird, wenn man (2.6) in (2.5) einsetzt und die Eigenschaften der Diracschen Deltadistribution[1] berücksichtigt. Andererseits beschreibt

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)], \qquad e_i = \pm e \tag{2.7}$$

die **Mikrodichte** einer Ladungsverteilung, die bei makroskopischer Betrachtungsweise (N sehr groß) als kontinuierlich verschmiert empfunden wird.

2.2 Der elektrische Strom

Wir wollen nun in die Begriffswelt von **Bilanzgleichung**, **Erhaltungsgleichung** und **Kontinuitätsgleichung** eindringen.



Wir betrachten dazu zunächst einen einfach zusammenhängenden Raumbereich $\mathbb{B}$ mit der Oberfläche $\mathcal{S}_\mathbb{B}$. In diesem Raumbereich befindet sich die elektrische Ladung $Q_\mathbb{B}$ und wir stellen fest, daß sich $Q_\mathbb{B}$ im Laufe der Zeit verändert. Zwei Ursachen sind denkbar:

(i) in $\mathbb{B}$ entsteht (oder vergeht) Ladung. Somit enthält $\mathbb{B}$ **Quellen** oder **Senken**.

(ii) es fließt durch $\mathcal{S}_\mathbb{B}$ Ladung zu oder ab.

Um (ii) formal erfassen zu können führen wir den **Ladungsstrom** als die pro Zeiteinheit aus $\mathbb{B}$ abfließende Ladungsmenge ein:

$$I_{\mathcal{S}_\mathbb{B}}(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t; \Delta t)}{\Delta t}, \tag{2.8}$$

wobei $\Delta Q(t; \Delta t)$ die im Zeitintervall Δt zwischen t und $t + \Delta t$ abfließende Ladungsmenge ist.

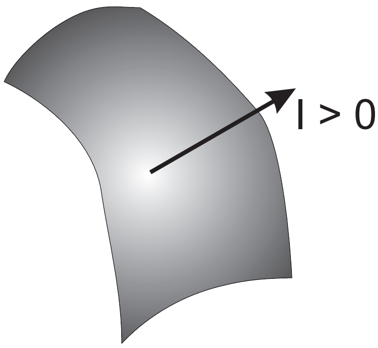
[1] Siehe: F. Schürrer, Distributionen, Fouriertransformationen, Greensche Funktionen, Skriptum zur Vorlesung Mathematische Methoden der Theoretischen Physik, Graz (1996), Seite 15 ff.

Dann folgt für die in $\mathbb{B}$ beobachtete Veränderung von $Q_{\mathbb{B}}$:

$$\Delta Q_{\mathbb{B}} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2, \tag{2.9}$$

wobei dann ΔQ_2 die Rolle von $\Delta Q(t;\Delta t)$ in (2.8) zu übernehmen hat. (2.9) setzt auch voraus, daß wir meßtechnisch in der Lage sind zwischen ΔQ_1 und ΔQ_2 unterscheiden zu können. (Kein triviales Problem!)

Aus (2.8) ergibt sich auch die Einheit des Stromes mit Cs^{-1} (also Coulomb pro Sekunde) und sie wird **Ampère** (A) genannt. (Üblicher Weise definiert man aber $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$, mit der Einheit für den Ladungsstrom als **neue** Maßeinheit neben m, s und kg.)



Nun kann natürlich in (2.8) der Strom I auch **negativ** sein, es fließt also Ladung zu. Es gilt die Vereinbarung: positive Ströme fließen nach außen! Das Vorzeichen befindet nur über Ladungszu- oder -abfluß.

Wir können nun (2.9) in zeitdifferenzierter Form anschreiben:

$$\dot{Q}_{\mathbb{B}} = \dot{Q}_1 - I_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} \tag{2.10}$$

$$\dot{Q}_{\mathbb{B}} + I_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} = \dot{Q}_1 = \Lambda^Q_{\mathbb{B}}, \tag{2.11}$$

mit $\Lambda^Q_{\mathbb{B}}$ der **Erzeugungs-** bzw. **Vernichtungsrate** von Ladung in $\mathbb{B}$.

Die Gleichung (2.11) bezeichnet man als **skalare Bilanzgleichung**. Eine solche gilt für jede Mengengröße F in einem abgeschlossenen Bereich $\mathbb{B}$:

$$\dot{F}_{\mathbb{B}} + I^F_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} = \Lambda^F_{\mathbb{B}}, \tag{2.12}$$

mit $I^F_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}}$ dem Strom und $\Lambda^F_{\mathbb{B}}$ der Erzeugungsrate. (Eine Übertragung auf vektorielle Mengengrößen ist unmittelbar möglich.)

In der Elektrodynamik gibt es die **fundamentale** Erfahrung:

Es gibt keine Quellen und Senken für elektrische Ladungen, also:

$$\Lambda^Q_{\mathbb{B}} = 0. \tag{2.13}$$

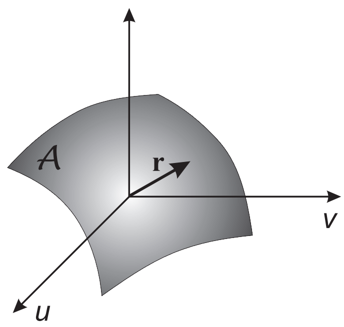
Daraus folgt:

$$\dot{Q}_{\mathbb{B}} + I_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} = 0, \tag{2.14}$$

womit der **Erhaltungssatz** für elektrische Ladungen aufgefunden wurde. Erhalten bleibt freilich **nicht** die Ladung in einem vorgegebenen endlichen Volumsbereich $\mathbb{B}$, sondern nur die “Menge der Ladungen im Weltall”. Es gibt nur **Ladungstransport** nicht jedoch **Ladungsentstehung**.

Die so eingeführte Definition des Stromes ist keineswegs auf die Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ des vorgegebenen Bereiches $\mathbb{B}$ beschränkt, sondern auch für jeden Teil davon, ja sogar für jedes hinreichend glatte Flächenstück im Raum. Wichtig ist dabei, daß die Richtung des Stromes eindeutig anzugeben ist, was immer nur dann möglich ist, wenn die Fläche so beschaffen ist, daß sie *orientierbar* ist. Wenn eine Fläche von einem *Strom* durchflossen wird, so ist dies nur möglich, wenn in der Umgebung der Fläche eine *Strömung*, d.h. ein *Transport* der Mengengröße Q stattfindet. Der Strom kann auch Null sein, obwohl Strömung stattfindet; es ist dann die Strömung parallel zur Fläche orientiert.

Wir wollen nun die Zusammenhänge um die Strömung mathematisch erfassen:



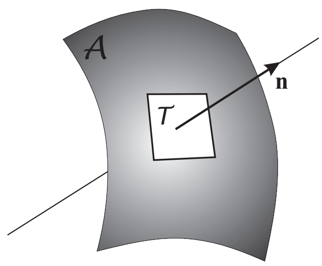
Gegeben sei ein Flächenstück $\mathcal{A}$ im 3D euklidischen Raum in der Parametrisierung nach u und v:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{r}(u,v) \mid (u,v) \in \mathbb{B}\}$$

und ein Punkt $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ auf ihr. Wir nehmen weiters an, daß in einer Umgebung von $\mathbf{r}_0$ die **Tangetialverktoren $\mathbf{T}^u$** und **$\mathbf{T}^v$**

$$\mathbf{T}^u(\mathbf{r}_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, \qquad \mathbf{T}^v(\mathbf{r}_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0},$$

existieren, und *linear unabhängig* seien. Trifft dies zu, so besitzt die Fläche $\mathcal{A}$ eine eindeutig bestimmte **Tangentialfläche** $\mathcal{T}$:



$$\mathcal{T}(\mathbf{r}_0) = \{\mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{T}^u + \beta \mathbf{T}^v \mid -\infty < \alpha, \beta < \infty\}\,.$$

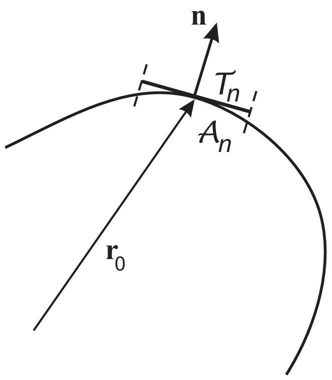
Auch der **Normalenvektor n** auf die Tangentialebene

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v}{|\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v|}$$

ist damit eindeutig bestimmt. Dieser Vektor definiert gleichzeitig die **Normale** an die Fläche $\mathcal{A}$ im Punkte $\mathbf{r}_0$. Ist keine natürliche Reihenfolge von u und v gegeben, so ist die Richtung von $\mathbf{n}$ Definitionssache. Ist $\mathcal{A}$ speziell $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ eines Bereiches $\mathbb{B}$, so definieren wir, daß $\mathbf{n}$ nach außen zeigt.

Ist eine Fläche und die gewählte Parametrisierung hinreichend glatt, so läßt sich die Konstruktion des Normalenvektors in jedem Punkt der Fläche durchführen, und wir finden:

> *Jedem Punkt einer* **orientierten** *im obigen Sinne* **glatten** *Fläche ist eindeutig ein Normalenvektor zugeordnet; die Normalenvektoren definieren ein* **Richtungsfeld** *auf der Fläche.*



Nun wählen wir auf dem Flächenstück $\mathcal{A}$ eine Folge von Teilflächen $\mathcal{A}_n$, die sich auf dem Punkt $\mathbf{r}_0$ konzentrieren. Projezieren wir dieses $\mathcal{A}_n$ längs $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$ auf $\mathcal{T}(\mathbf{r}_0)$, so erhalten wir auf der Tangentialebene eine Folge von ebenen Bereichen $\mathcal{T}_n(\mathbf{r}_0)$, die sich ebenfalls auf $\mathbf{r}_0$ konzentrieren und mit wachsendem n wird $\mathcal{A}_n$ durch $\mathcal{T}_n$ beliebig gut approximiert. Sind nun A_n und T_n die Flächeninhalte von $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{T}_n$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} T_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{A_n} = 1,$$

mit der Konsequenz, daß für hinreichend große n die Flächeninhalte A_n durch T_n ersetzt werden können.

Nun messen wir die Ströme durch jedes Flächenstück $\mathcal{A}_n$ und erhalten (nicht singuläres Verhalten vorausgesetzt) die Folge I_n. Damit können wir die **Stromdichte** senkrecht zur Fläche $\mathcal{A}$ im Punkte $\mathbf{r}_0$ als

$$j_\perp(\mathbf{r}_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{T_n} \tag{2.15}$$

definieren. Damit erhalten wir die auf der Fläche definierte Funktion $j_\perp(\mathbf{r}_0)$ und - umgekehrt - den Strom durch $\mathcal{A}$ gemäß:

$$I = \int_{\mathcal{A}} dA\, j_\perp(\mathbf{r})$$

als Flächenintegral über $\mathcal{A}$. Ist die Fläche nach u und v parametrisiert, so gilt

$$dA = |\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v|\, dudv. \tag{2.16}$$

Nun ist $j_\perp(\mathbf{r}_0)$ nichts anderes als ein Maß für die Strömung, die im Punkte $\mathbf{r}_0$ des Raumes senkrecht zu der durch diesen Punkt gehende Fläche $\mathcal{A}$ (Abb. 2.1) herrscht. Das heißt, $j_\perp(\mathbf{r}_0)$ ist sowohl vom Raumpunkt $\mathbf{r}_0$ als auch von der speziellen Fläche abhängig, welche durch $\mathbf{r}_0$ geht.

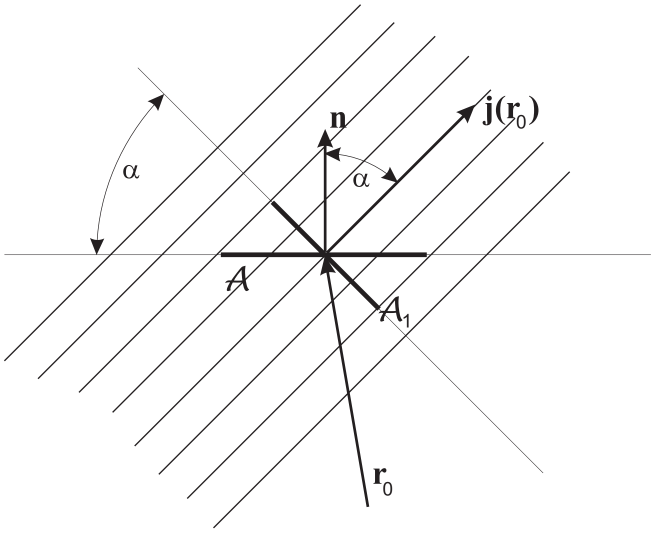


Abbildung 2.1: Strömung durch den Punkt $\mathbf{r}_0$.

Die zuletzt genannte Abhängigkeit ist leicht mathematisch zu formulieren: in Fig. 2.1 ist die Strömung im Punkte $\mathbf{r}_0$ durch ihre Größe (Dichte der Strömungslinien $\triangleq$ Anzahl der Elementarladungen pro Zeiteinheit durch die Fläche $\mathcal{A}_1$ mit dem Flächeninhalt $A = 1$) und durch eine Richtung charakterisiert; sie ist folglich durch den Vektor $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ gegeben. Es ist dann $j_\perp(\mathbf{r}_0)$ nichts anderes als die Komponente von $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ senkrecht zur Fläche $\mathcal{A}$, repräsentiert durch ihren Normalenvektor $\mathbf{n}$:

$$j_\perp(\mathbf{r}_0) = \mathbf{j}(\mathbf{r}_0)\mathbf{n}. \tag{2.17}$$

Damit erhält man den Strom I durch eine Fläche $\mathcal{A}$ als

$$I = \int_{\mathcal{A}} dA\, \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{n}. \tag{2.18}$$

Man führt nun das *vektorielle Flächendifferenzial* $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$ ein, was nichts anderes bedeutet, als daß $d\mathbf{A}$ im Punkte $\mathbf{r}_0$ die Richtung der Flächennormale $\mathbf{n}$ und den (infinitesimalen) Betrag dA hat. Damit gilt:

$$I = \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{2.19}$$

mit

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v}{|\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v|} \, |\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v| \, dudv \\ &= (\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v) \, dudv. \end{aligned}$$

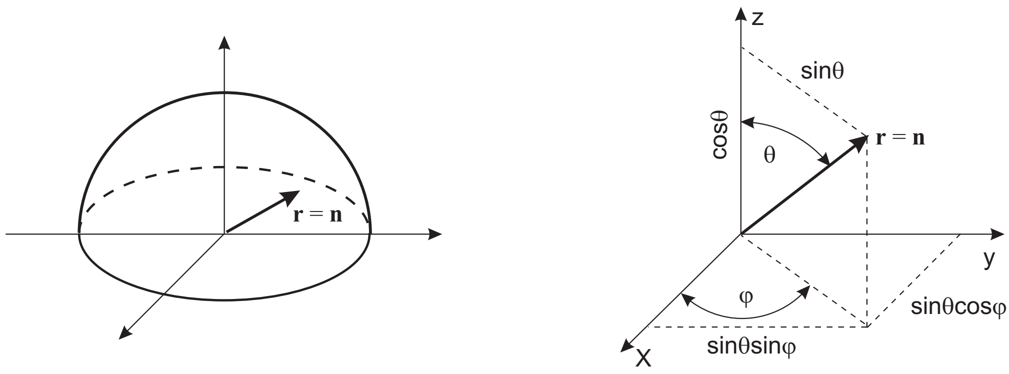


Abbildung 2.2: Zur Bestimmung des Flußes durch die Halbkugel $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$.

Das auf dem Raum definierte Vektorfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ nennt man **Stromdichtefeld**. ($\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ist aber keine vektorielle Volumsdichte, d.h.: $\int d^3r\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ liefert keine Mengengröße und hat keine Bedeutung; hingegen definiert $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ auf jeder Fläche eine Flächendichte.)

Schließlich sei noch angemerkt, daß für jedes beliebige Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ und jede beliebige Fläche $\mathcal{A}$ das Integral

$$\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V})=\int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathbf{V}(\mathbf{r}) \tag{2.20}$$

definiert werden kann. Die skalare Größe $\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V})$ wird dabei **Fluß** von $\mathbf{V}$ durch die Fläche $\mathcal{A}$ bezeichnet. Damit wird auch offensichtlich, daß der Strom I aufgrund von (2.19) und (2.20) der Ladungsfluß durch die Fläche $\mathcal{A}$ ist.

Beispiel: Gegeben ist ein Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{r})=V\mathbf{e}_z$ und zu berechnen ist der Fluß durch die obere Halbkugel $x^2+y^2+z^2=1,\quad z\geq 0$: Die Kugelfläche wird mit θ und φ parametrisiert; es folgt dann für $|\mathbf{r}|=1$ (Abb. 2.2):

$$\begin{aligned}
dA &= \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\\
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)\\
\phi &= \int_{\mathcal{A}} dA\,\mathbf{V}\mathbf{n}\\
&= \int\!\!\int d\varphi d\theta\ \sin\theta\,V\mathbf{e}_z\mathbf{n}\\
&= V\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\theta\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

$$= \quad V 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin 2\theta = \pi \, V.$$

(Man könnte auch noch den Fluß durch die Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0$ berechnen ...)

Wir haben nun alle Vorarbeiten geleistet, um den Erhaltungssatz (2.14) genauer untersuchen zu können. Wir gehen von der Ladung Q und dem Strom I zu den entsprechenden Dichten $\rho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ über; wir erhalten dann bei einem zeitunabhängigen, also räumlich konstanten, Integrationsbereich $\mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{B}} d^3 r \, \rho(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= 0 \\
\int_{\mathbb{B}} d^3 r \, \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= 0
\end{aligned}$$

und unter Verwendung des Gaußschen Satzes folgt weiters:

$$\int_{\mathbb{B}} d^3 r \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathrm{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right] = 0,$$

woraus die differentielle Form des Erhaltungssatzes (2.14) folgt:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathrm{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.21}$$

Dies ist die **Kontinuitätsgleichung** und sie ist offensichtlich vom Raumbereich $\mathbb{B}$ unabhängig.

Für die allgemeine Bilanzgleichung (2.12) würde man

$$\frac{\partial \rho^F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathrm{div} \mathbf{j}^F(\mathbf{r}) = \lambda^F. \tag{2.22}$$

erhalten, wobei λ^F die Volumensdichte der Erzeugungs- bzw. Vernichtungsrate der skalaren Meßgröße F ist.

2.3 Die Maxwellschen Gleichungen, die Lorentzkraft

2.3.1 Die Maxwellschen Gleichungen

Der elektromagnetische Zustand des Raumes wird durch vier Vektorfelder beschrieben:

die elektrische Feldstärke	$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$
die magnetische Induktion	$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$
die dielektrische Verschiebung	$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$
die magnetische Feldstärke	$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$,

wobei **E** und **B** sowie **D** und **H** zu jeweils einer Gruppe gehören. Da die Namen höchst unglücklich gewählt sind, werden wir nur von **E**-, **B**-, **D**- und **H**-Feldern sprechen.

Diese vier Feldgrößen sind miteinander und mit der Ladungs- und Stromdichte über die vier MAXWELLschen Gleichungen verknüpft:

$$\mathrm{div}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t) \tag{2.23}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{2.24}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{2.25}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0, \tag{2.26}$$

welche den Status eines *Naturgesetzes* haben, also **postuliert** werden. $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ sind die sogenannten **Quellterme**; sie koppeln die elektromagnetischen Felder an die Orte und Geschwindigkeiten elektrischer Ladungen. (2.23) und (2.24) nennt man die **inhomogenen** MAXWELLschen Gleichungen; (2.25) und (2.26) sind dann konsequenter Weise die **homogenen** MAXWELLschen Gleichungen.

Die MAXWELLsche Gleichungen sind offensichtlich partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Dabei stellen (2.23) und (2.25) skalare Gleichungen dar, die anderen zwei sind vektoriell. Damit stehen acht Gleichungen zur Bestimmung der zwölf Komponenten der Feldgrößen zur Verfügung. Ganz offensichtlich sind die einzelnen Felder nicht ganz voneinander unabhängig.

Besonders offensichtlich wird dies in der **Vakuumelektrodynamik**, in der alle elektromagnetischen Eigenschaften der Materie allein durch die Quellfelder $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ erfaßt werden. In diesem Fall sind **B** und **H** sowie **D** und **E** *streng proportional* zueinander, wobei die Proportionalitätskonstanten dimensionsbehaftet sind:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t), \qquad \varepsilon_0 \ldots \text{Influenzkonstante} \tag{2.27}$$

$$\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r},t), \qquad \mu_0 \ldots \text{Induktionskonstante} \tag{2.28}$$

Es ist überraschend, daß die Elektrodynamik auch dann korrekt bleibt, wenn man über die atomistische Struktur der Quellen mittelt; man erhält so die *makroskopische* Elektrodynamik, in welcher die Felder durch *phänomenologische Materialgleichungen* verknüpft sind. Im einfachsten Fall gilt:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \varepsilon' \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{2.29}$$

$$\mu \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mu' \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r},t), \tag{2.30}$$

mit ε der *absoluten* bzw. ε' der *relativen* **Dielektrizitätskonstanten** und mit μ der *absoluten* bzw. μ' der *realtiven* **Permeabilitätskonstanten**. Beides sind Materialkonstanten und damit sind die Gleichungen (2.29) und (2.30) von der Stoffklasse abhängig und nicht *universell*.

2.3.2 Die Lorentzkraft

Wir haben bereits gesehen, daß Ladungen als Quellterme der MAXWELL-schen Gleichungen das elektromagnetische Feld und damit den elektromagnetischen Zustand des Raumes beeinflussen. Nun beeinflussen die Felder ihrerseits die Ladungen und dies wird durch die **Lorentzkraft** beschrieben, welche die Kraftwirkung des **E**- und des **B**-Feldes auf eine Punktladung q (entsprechend (2.6) als Ladung, welche im Punkte $\mathbf{r}$ lokalisiert ist beschrieben) angibt:

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\,, \tag{2.31}$$

wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Punktladung im Raum bewegt. (2.31) ist ebenfalls ein Naturgesetz und wird daher **postuliert**.

Haben wir eine Ladungs- und Stromdichteverteilung gegeben, so erhalten wir für (2.31):

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t), \tag{2.32}$$

wobei dann $d^3r\,\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ die Kraft ist, welche die Materie im Volumselement d^3r, welches um $\mathbf{r}$ zentriert ist, zur Zeit t erfährt. $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ ist somit eine vektorielle Volumsdichte. (2.31) läßt sich aus (2.32) unmittelbar unter Verwendung von (2.6) zeigen:

$$\begin{aligned} \int d^3r\,\mathbf{f}(\mathbf{r},t) &= \int d^3r\,q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t))\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \int d^3r\,q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t))\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{F} &= q\,[\mathbf{E}(\mathbf{R}(t),t) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{R}(t),t)] \qquad \textbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Hier wurde die Beziehung $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ verwendet.

Die Lorentzkraft **verbindet** somit die Mechanik mit der Elektrodynamik und führt die Kraft, welche auf die Punktladung ausgeübt wird, auf den elektromagnetischen Zustand des Raumes zurück.

2.4 Das Superpositionsgesetz

Die MAXWELLschen Gleichungen sind ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Trotz dieser einfachen Struktur sind sie schwierig genug zu lösen.

Aus der Linearität folgt das Prinzip der **Superposition der Lösungen**.

Wir bezeichnen zunächst das elektromagnetische Feld in seiner Gesamtheit als:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r},t) = \{\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \mathbf{B}(\mathbf{r},t), \mathbf{D}(\mathbf{r},t), \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\}$$

und für reelle Werte α und β sei $\alpha\mathbf{Z}_1 + \beta\mathbf{Z}_2$ durch

$$\alpha\mathbf{Z}_1 + \beta\mathbf{Z}_2 := \{\alpha\mathbf{E}_1 + \beta\mathbf{E}_2, \alpha\mathbf{B}_1 + \beta\mathbf{B}_2, \alpha\mathbf{D}_1 + \beta\mathbf{D}_2, \alpha\mathbf{H}_1 + \beta\mathbf{H}_2\}$$

definiert.

Satz 2.1 *Ist nun $\mathbf{Z}_1(\mathbf{r},t)$ Lösung der* MAXWELL*schen Gleichungen für die Quellen $\{\rho_1(\mathbf{r},t), \mathbf{j}_1(\mathbf{r},t)\}$ und $\mathbf{Z}_2(\mathbf{r},t)$ Lösung der* MAXWELL*schen Gleichungen für die Quellen $\{\rho_2(\mathbf{r},t), \mathbf{j}_2(\mathbf{r},t)\}$, so ist für beliebige reelle Werte von α und β die Summe $\alpha\mathbf{Z}_1(\mathbf{r},t) + \beta\mathbf{Z}_2(\mathbf{r},t)$ Lösung der* MAXWELL*schen Gleichungen für die Quellen $\{\alpha\rho_1(\mathbf{r},t) + \beta\rho_2(\mathbf{r},t), \alpha\mathbf{j}_1(\mathbf{r},t) + \beta\mathbf{j}_2(\mathbf{r},t)\}$.*

Der Beweis zu diesem Satz ist sehr leicht durchführbar und ist Gegenstand der Übungen.

Daraus folgt:

(1) Mit den Lösungen $\mathbf{Z}_i^0 (i = 1,2)$ der quellfreien MAXWELLschen Gleichungen(d.h. für $\{\rho, \mathbf{j}\} = \{0, \mathbf{0}\}$) ist auch jedes $\alpha\mathbf{Z}_1^0 + \beta\mathbf{Z}_2^0$ Lösung der homogenen Gleichungen. $\Rightarrow$ Die Lösungen der homogenen Gleichungen bilden einen linearen Vektorraum, dessen Nullelement die triviale Lösung ist, also jene Lösung, für welche alle Felder identisch verschwinden.

(2) Löst $\mathbf{Z}$ die MAXWELLschen Gleichungen für $\{\rho, \mathbf{j}\}$ und $\mathbf{Z}^0$ die homogenen Gleichungen, so löst jedes $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}^0$ die MAXWELLschen Gleichungen für die Quellverteilung $\{\rho, \mathbf{j}\}$. Man kann also zu jeder Lösung der MAXWELLschen Gleichungen eine beliebige Lösung der quellfreien Gleichungen addieren.

Physikalisch besagt dies, daß sich elektromagnetische Felder überlagern lassen, ohne sich gegenseitig zu stören oder zu beeinflussen. Dies hat ganz offensichtlich große praktische Bedeutung, mit welcher man täglich konfrontiert wird.

Wir sehen den MAXWELLschen Gleichungen zudem unmittelbar an, daß sie eine Nahwirkungstheorie beschreiben. Es hängt in ihnen das elektromagnetische Feld $\mathbf{Z}(\mathbf{r}_0, t_0 + dt)$ am Ort $\mathbf{r}_0$ zur Zeit $t_0 + dt$ (außer von Quellen in $\mathbf{r}_0$ und t_0) nur von den Werten $\mathbf{Z}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}, t_0)$ ab, die das Feld zur Zeit t_0

in der unmittelbaren Umgebung des Ortes $\mathbf{r}_0$ hatte. Die Gleichungen sind ja vom Typ

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \\
Q(x_0, t_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x, t_0) - f(x_0, t_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0, t_0 + \Delta t) - f(x_0, t_0)}{\Delta t},
\end{aligned}
$$

und es folgt

$$
f(x_0, t_0 + \Delta t) = \left[Q(x_0, t_0) - \frac{f(x_0 + \Delta x, t_0) - f(x_0, t_0)}{\Delta x} \right] \Delta t + f(x_0, t_0),
$$

womit obige Behauptung bewiesen wurde.

2.5 Das inverse Problem

Aus der Vektoranalysis ist bekannt, daß die Anwendung des ∇-Operators aus skalaren und Vektorfeldern das Gewinnen neuer skalarer oder Vektorfelder ermöglicht. Hiebei handelt es sich um eine Differentiationsaufgabe und eine solche ist stets ausführbar. Es erhebt sich die Frage, ob es gelingt die Aufgabe durch Integration "umzudrehen". Genau das ist das *inverse* Problem bei der Lösung der MAXWELLschen Gleichungen.

Es sei nun $\mathbf{V}$ ein Vektorfeld, dann heißt

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \mathrm{div}\mathbf{V} \quad \ldots \quad \textbf{Quellfeld} \text{ von } \mathbf{V} && (2.33) \\
\mathbf{C} &= \mathrm{rot}\mathbf{V} \quad \ldots \quad \textbf{Wirbelfeld} \text{ von } \mathbf{V} && (2.34)
\end{aligned}
$$

und $\mathbf{V}$ heißt **wirbelfrei**, wenn $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ erfüllt ist, und **quellfrei**, wenn $\lambda = 0$ gilt.

> Es stellt sich nun, als inverses Problem, die Frage ob $\mathbf{V}$ aus der Kenntnis von λ und $\mathbf{C}$ *eindeutig* bestimmbar ist.

Der ∇-Operator ist linear, und man kann somit obige Aufgabe in drei Teile zerlegen:

(a) Zunächst sucht man ein quell- und wirbelfreies Feld $\mathbf{V}^0$:

$$
\mathrm{div}\mathbf{V}^0 = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{V}^0 = 0. \tag{2.35}
$$

(b) Man bestimmt dann ein wirbelfreies Feld $\mathbf{V}^Q$:[2]

$$
\mathrm{div}\mathbf{V}^Q = \lambda, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{V}^Q = 0. \tag{2.36}
$$

[2]daß es ein solches Feld $\mathbf{V}^Q$ (oder wie in (2.37) $\mathbf{V}^W$) immer gibt, wird in der Vorlesung zur Vektor- und Tensorrechnung gezeigt.

(c) Schließlich bestimmt man das quellfreie Feld $\mathbf{V}^W$:

$$\mathrm{div}\mathbf{V}^W = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{V}^W = \mathbf{C}. \tag{2.37}$$

Dann erfüllt $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}^Q + \mathbf{V}^W$ die Gleichungen (2.33) und (2.34). Andererseits läßt sich *jede* Lösung von (2.33) und (2.34) auf diese Weise darstellen.

Um dies zu beweisen, schreiben wir zunächst:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}^Q + \mathbf{V}^W = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}^{Sp},$$

mit $\mathbf{V}^0$ der Lösung der homogenen Gleichung und $\mathbf{V}^{Sp}$ der *speziellen* Lösung der inhomogenen Gleichung unter der Einschränkung $\mathrm{rot}\mathbf{V}^Q = 0$ und $\mathrm{div}\mathbf{V}^W = 0$. Es sei nun $\mathbf{V}$ eine Lösung von (2.33) und (2.34), so gilt für $\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left(\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}\right) &= \mathrm{div}\mathbf{V} - \mathrm{div}\mathbf{V}^{Sp} = \lambda - \lambda = 0 \\ \mathrm{rot}\left(\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}\right) &= \mathrm{rot}\mathbf{V} - \mathrm{rot}\mathbf{V}^{Sp} = \mathbf{C} - \mathbf{C} = 0, \end{aligned}$$

wegen $\mathrm{div}\mathbf{V}^{Sp} = \mathrm{div}\left(\mathbf{V}^Q + \mathbf{V}^W\right) = \mathrm{div}\mathbf{V}^Q = \lambda$, usw. Also ist $\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}$ Lösung der homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left(\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}\right) &= 0 \\ \mathrm{rot}\left(\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Damit entspricht die Differenz $\mathbf{V} - \mathbf{V}^{Sp}$ einer Lösung $\mathbf{V}^0$ der homogenen Gleichung. Umgekehrt läßt sich damit jede Lösung der Gleichungen (2.33) und (2.34) in der Form $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}^{Sp}$ darstellen, weil es stets ein geeignetes $\mathbf{V}^0$ gibt. Es gilt also für lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen (wie auch für lineare algebraische Gleichungen):

> *Man erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichungen (2.33) und (2.34) indem man zu irgendeiner ihrer Lösungen - in diesem Fall* $\mathbf{V}^Q + \mathbf{V}^W$ *- die allgemeine Lösung* $\mathbf{V}^0$ *der homogenen Gleichung (2.35) addiert.*

Somit ist derzeit von einer Eindeutigkeit der Lösung nichts zu sehen. Daß sich die Lösungsvielfalt dennoch einschränkt, wird durch folgende Überlegung nahegelegt: mit $\mathbf{B}^0 = B^0\mathbf{e}$ und $B^0 = konst.$ sowie $\mathbf{e}$ beliebig, liegt eine Lösung *(homogene Felder)* der homogenen Gleichung vor, welche im Unendlichen nicht verschwindet. Gilt nun Gleichung (2.35) im ganzen Raum, so sind solche Lösungen aus energetischen Gründen nicht zulässig, wie noch zu zeigen sein wird. Diese Lösung kann somit nur in einem endlichen Raum gelten. Dieses “Abbrechen” besorgen dann **Randbedingungen**. Bei hinreichend spezifizierten Randbedingungen wird die Lösung *eindeutig*, wie wir sehen werden. Wir können also folgendes Ergebnis erwarten:

> *Das Vektorfeld* $\mathbf{V}$ *ist durch sein Quell-, sein Wirbelfeld* und *durch die Randwerte* eindeutig *bestimmt.*

2.6 Feldlinien

An sich ist man gewöhnt, Vektorfelder mit Hilfe von Feldlinien zu beschreiben. Wir wollen dies hier streng begründen. Dazu gehen wir von einem Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ aus, welches im Raumbereich $\mathbb{B}$ stetig und differenzierbar sei. Die Menge seiner Nullstellen ($\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$) und Singularitäten wollen wir als $\mathbb{B}_s$ und die Menge aller Punkte $\mathbf{r}$, auf denen das Vektorfeld regulär ist und nicht verschwindet, mit $\mathbb{B}_r$ bezeichnen. Damit gilt $\mathbb{B}_r = \mathbb{B} \setminus \mathbb{B}_s$. Dann besitzt $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ für jedes $\mathbf{r} \in \mathbb{B}_r$ eine eindeutige Richtung, welche durch $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r})$ festgelegt ist, das **Richtungsfeld** über $\mathbb{B}_r$.

Als **Feldlinie** $\mathcal{C}$ durch den Punkt $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{B}_r$ bezeichnen wir nun eine Raumkurve $\mathcal{C}$, die in ihrem gesamten Verlauf dem Richtungsfeld folgt: in jedem Punkt $\mathbf{r}$, den sie durchläuft, soll sie dieselbe Richtung besitzen wie $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r})$, also

$$\mathcal{C}: \quad \hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}(s)), \tag{2.38}$$

wenn $\hat{\mathbf{T}}(s)$ der Tangenteneinheitsvektor an $\mathcal{C}$ ist und $\mathbf{r}$ nach der Bogenlänge s parametrisiert ist.

> *Demnach wird jeder Punkt $\mathbf{r} \in \mathbb{B}_r$ von genau einer Feldlinie durchlaufen. Auf $\mathbb{B}_r$ können sich Feldlinien weder schneiden noch verzweigen.*

(2.38) **identifiziert** die Feldlinien mit den Lösungen einer Vektordifferentialgleichung erster Ordnung, die man auf $\mathbb{B}_r$ regulär nennt; dies stellt sicher, daß jede Lösung zu einem bestimmten $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, die ganz im Regularitätsbereich liegt, durch ihren Anfangswert eindeutig bestimmt ist.

Man zeichnet nun aber zur Veranschaulichung eines Vektorfeldes keineswegs ein Kontinuum von Linien, wie es durch die Menge der Lösungen von (2.38) definiert wird. (Wir würden dann gar nichts sehen und könnten auch nicht abzählen, wieviele Feldlinien durch eine Fläche $\mathcal{A}$ hindurchtreten; es wären stets ∞ viele, unabhängig davon wie klein wir die Fläche wählen.)

Wir wählen willkürlich nur endlich viele Linien und bringen durch die **Feldliniendichte**, also die Zahl der Linien, welche durch die Flächeneinheit senkrecht durchtreten (Abb. 2.3), die "Größe" $|\mathbf{V}|$ zum Ausdruck:

$$\int d\mathbf{A}\mathbf{V} = \int dA\, |\mathbf{V}|\mathbf{n}\mathbf{n} = \int dA\, |\mathbf{V}| = |\mathbf{V}|,$$

da das Integral über die Einheitsfläche geht. Die Feldliniendichte ist also der Fluß durch eine Fläche senkrecht zur Feldlinie.

Die hier eingeführte **Diskretisierung** des Feldlinienbegriffs führt zu einer wesentlichen neuen Eigenschaft. Es ist zwar jede Feldlinie, die man zeichnet, Teil einer mathematischen Feldlinie, doch kann die Feldlinie im Gegensatz zu

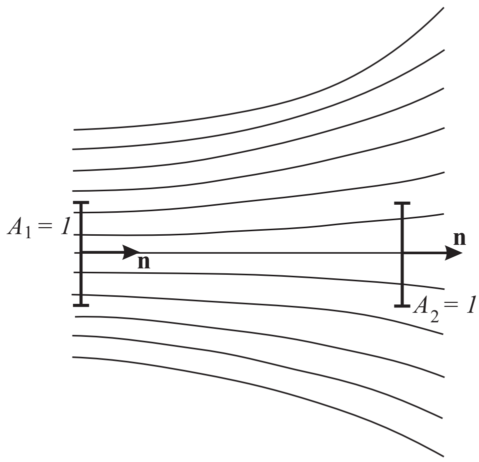


Abbildung 2.3: Feldlinien.

diesen in Raumgebieten beginnen oder enden, auch wenn dort (2.38) regulär ist.

1. Es sei in einem Gebiet $\mathbb{B}$ $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$, dann muß nach dem Gaußschen Satz der Fluß (2.20)

$$\phi_{\mathcal{S}_\mathbb{B}}(\mathbf{V}) = \int\limits_{\mathcal{S}_\mathbb{B}} d\mathbf{A}\,\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbb{B}} d^3r\,\mathrm{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0$$

   sein. Dies gilt insbesonders für das **B**-Feld nach Gleichung (2.25). Es müssen in diesen Raumbereich gleich viele Feldlinien einlaufen, wie ihn verlassen. In $\mathbb{B}$ können die Feldlinien weder beginnen noch enden. Damit sind solche Feldlinien entweder in sich geschlossen oder sie durchlaufen den ganzen unbegrenzten Raum.

2. Es sei in $\mathbb{B}$ $\mathrm{div}\mathbf{V} > 0$, so ist nach (2.20) auch $\phi_{\mathcal{S}_\mathbb{B}} > 0$ und es müssen den Bereich $\mathbb{B}$ mehr Feldlinien verlassen, als in ihn eintreten. Somit müssen einige in $\mathbb{B}$ beginnen, oder bei $\mathrm{div}\mathbf{V} < 0$ in $\mathbb{B}$ enden. Für eine mathematische Feldlinie als Lösung von (2.38) ist dies sicher nicht der Fall!

2.7 Die Integralform der Maxwellschen Gleichungen

Die Anwendung der Integralsätze der Vektoranalysis auf die Maxwellschen Gleichungen liefert die integrale Form dieser Gleichungen. Dies ist eine **äqui-**

valente Formulierung, welche aber die physikalischen Inhalte der MAXWELLschen Gleichungen in viel stärkerem Maße und in vor allem sehr anschaulicher Weise zum Ausdruck bringt.

Wir beginnen mit (2.23):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}} d^3r\,\mathrm{div}\mathbf{D} &= \int_{\mathbb{B}} d^3r\,\rho \\
\int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}\,\mathbf{D} &= Q_{\mathbb{B}} \\
\phi_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}}(\mathbf{D}) &= Q_{\mathbb{B}} \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

> *Somit verursachen positive Ladungen $Q_{\mathbb{B}}$ einen positiven Fluß und sie sind somit die* **Quellen** *des* **D***-Feldes.*

Die analoge Anwendung auf (2.25) ergibt:

$$\phi_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}}(\mathbf{B}) = 0, \qquad (2.40)$$

und das **B**-Feld ist quellenfrei mit der Konsequenz: **es gibt keine magnetischen Ladungen**.

Bei der weiteren Behandlung von (2.24) ist zu bedenken, daß die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ eine Flächendichte ist. Wir integrieren also über eine raumfeste, orientierbare Fläche $\mathcal{A}$, welche durch die Randkurve $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ begrenzt wird:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\left(\mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) &= \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathbf{j} \\
\int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\mathbf{H} - \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &= \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathbf{j} \\
\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{s}\,\mathbf{H} - \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &= \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathbf{j},
\end{aligned}$$

wobei wir den Stokeschen Satz angewendet haben und berücksichtigten, daß $\mathcal{A}$ raumfest ist. Es folgt also:

$$Z_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{H}) = \dot{\phi}_{\mathcal{A}}(\mathbf{D}) + I_{\mathcal{A}}, \qquad (2.41)$$

mit $Z_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{H})$ der **Zirkulation** (Wirbel) des **H**-Feldes längs der Randkurve $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. $\dot{\phi}_{\mathcal{A}}(\mathbf{D})$ ist die zeitliche Änderung des Flusses des **D**-Feldes durch die Fläche $\mathcal{A}$, sie wird der **Verschiebungsstrom** genannt. Somit drückt (2.41) folgenden Sachverhalt aus:

> *Ströme und Verschiebungsströme führen in gleicher Weise zu den Wirbeln des* **H***-Feldes, welche die Ströme umschließen.*

Aus (2.26) folgt völlig analog:

$$Z_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{E}) = -\dot{\phi}_{\mathcal{A}}(\mathbf{B}). \tag{2.42}$$

Wird also die Fläche $\mathcal{A}$ von einem sich zeitlich verändernden Fluß durchsetzt, entsteht ein Wirbel des **E**-Feldes. Dieser Vorgang wird als **Induktion** bezeichnet, und (2.42) ist das **Induktionsgesetz**.

2.8 Die Ladungserhaltung

Um die Ladungserhaltung aus den MAXWELLschen Gleichungen ableiten zu können bilden wir einerseits die zeitliche Ableitung von (2.23) und die Divergenz von (2.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{D} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{H}}_{=0} - \mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathrm{div}\mathbf{j} \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = -\mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0,$$

womit wiederum (2.21) aufgefunden wurde. Damit beinhalten die MAXWELLschen Gleichungen die Tatsache der Ladungserhaltung, und es ist nicht notwendig, diese in das Postulat über den elektromagnetischen Zustand des Raumes aufzunehmen.