Kapitel 3

Die Elektrostatik

3.1 Die Grundgleichungen der Elektrostatik

Wir beschränken uns jetzt auf solche Fälle, in denen das **B**- und das **D**-Feld zeitunabhängig sind:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0. \tag{3.1}$$

Dann zerfallen die MAXWELLschen Gleichungen (2.23-2.26) in zwei Zweiergruppen, nämlich

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

und

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{3.3}$$

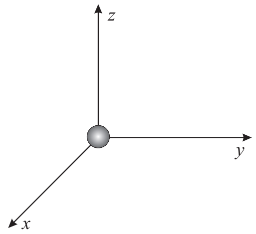
Die Gleichungen (3.2) sind die Grundgleichungen der **Elektrostatik**, während (3.3) die Basis der **Magnetostatik** sind.

Es ist aber zunächst die Frage zu stellen, ob die Annahmen (3.1) überhaupt widerspruchsfrei möglich sind. Wegen (2.23) muß auch $\partial\rho/\partial t = 0$ gelten, wenn das **D**-Feld zeitlich konstant sein soll. Damit muß aber wegen der Kontinuitätsgleichung auch div$\mathbf{j} = 0$ gelten, was bedeutet, daß es im Endlichen keine *Stromquellen* geben darf.

Die Forderung der Zeitunabhängigkeit des **B**-Feldes führt über die Vakuumgleichungen zur Forderung der Zeitunabhängigkeit des **H**-Feldes und dies führt wegen (3.3) zur Zeitunabhängigkeit der Stromdichte. Wir bezeichnen nun zeitlich konstante Ströme und Stromdichten als **stationär**.

3.2 Punktladungen im Vakuum

Wir nehmen nun an, daß nur eine einzige Quelle des Feldes gegeben sei, nämlich eine im Ursprung angebrachte Punktladung q:



$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{D} &= q\delta(\mathbf{r}) && (3.4)\\
\mathrm{rot}\mathbf{E} &= \mathbf{0} &&\\
\mathbf{D} &= \varepsilon_0\mathbf{E} &&\\
\mathrm{rot}\mathbf{D} &= \mathbf{0}. && (3.5)
\end{aligned}$$

Wir sehen also, daß das **D**-Feld aufgrund von (3.5) wirbelfrei ist. Aus den Überlegungen zu Abschnitt 2.5 wissen wir, daß die Lösung von (3.4) und (3.5) der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichungen plus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichungen $\mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{D} = \mathbf{0}$ entspricht.

Konzentrieren wir uns zunächst auf die Lösung dieser homogenen Gleichung: die Beziehung $\mathrm{rot}\mathbf{D} = \mathbf{0}$ erlaubt sofort die Beschreibung des **D**-Feldes als Gradientenfeld einer beliebigen Feldfunktion $\phi(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{D} = \mathrm{grad}\phi. \tag{3.6}$$

Damit folgt aber

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi = \nabla^2\phi = 0, \tag{3.7}$$

mit ∇^2 dem LAPLACE**operator**. Gleichung (3.7) wird die LAPLACE**sche Differentialgleichung** genannt.

Die Potentialtheorie liefert die Lösungen von (3.7). Die allgemeine Lösung der auf dem gesamten Raum gültigen Laplacegleichung ist durch die Potenzreihe

$$\phi^0(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell f_\ell(\theta,\varphi) \tag{3.8}$$

gegeben, wobei f_0 eine Konstante ist. Es gilt:

$$\begin{array}{lll}
\ell = 0 & \phi^0 = f_0 & \rightarrow \quad \mathrm{grad}\phi^0 = 0\\
\ell = 1 & \phi^1 = rf_1(\theta,\varphi) & \rightarrow \quad \mathrm{grad}\phi^1 = \left(f_1(\theta,\varphi), \frac{\partial f_1}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\right) \neq f(r)\\
\ell > 1 & \phi^\ell = r^\ell f_\ell(\theta,\varphi) & \rightarrow \quad \mathrm{grad}\phi^\ell \left(\ell r^{\ell-1}\ldots,\ldots,\ldots\right)
\end{array}$$

Es folgt also, daß **D** für $\ell \geq 1$ konstant ist, oder mit $r^{\ell-1}$ anwächst. Dies würde bedeuten, daß das **D**-Feld im Unendlichen unbegrenzt anwachsen würde, was aber jeglicher Erfahrung widerspricht, die besagt, daß eine endliche Punktladung in unendlich großem Abstand keine Felder produziert und daher nach dem Lorentzschen Kraftgesetz (2.31) auch keine Kräfte bewirkt. Es müssen also **D**-Felder als Lösung von (3.7) im Unendlichen verschwinden, und dies ist nach (3.8) nur für $\phi(\mathbf{r}) = \phi^0 = konst.$ möglich, wobei natürlich auch gleich $\phi^0 = 0$ gesetzt werden kann. Dies bedeutet, daß nur $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ den "Randbedingungen im Unendlichen" entspricht.

Somit ist die Lösung von (3.4) und (3.5) **eindeutig** und besteht nur aus der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichungen, welche wir nun aufsuchen wollen. Für diese muß natürlich auch das Verschwinden im Unendlichen gelten. Bei der Lösung von (3.4) und (3.5) kann man sich die Tatsache zunutze machen, daß es sich um ein **isotropes** Problem handelt. Es ist dann naheliegend, daß auch das **D**-Feld isotrop ist. Somit machen wir folgenden Lösungsansatz:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = D(r)\,\hat{\mathbf{r}}, \tag{3.9}$$

mit

$$\mathbf{D} = (D_r, D_\varphi, D_\theta)\,, \qquad \hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)\,.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{D} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[-r\mathbf{e}_\theta\underbrace{\left(-\frac{\partial D_r}{\partial\varphi}\right)}_{=0} + r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\underbrace{\frac{\partial D_r}{\partial\theta}}_{=0}\right] \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

womit Gleichung (3.5) vom Ansatz (3.9) befriedigt wird.

Wir untersuchen nun die homogene Gleichung (3.4):

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mathbf{D}(r)\right) + \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\sin\theta D_\theta) + \frac{\partial D_\varphi}{\partial r}\right]}_{=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D(r)\right) &= 0 \\ r^2\,D(r) &= konst. \\ D(r) &= \frac{konst}{r^2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir sehen also, daß für $r > 0$ jede Lösung $D = konst/r^2$ Gleichung (3.4) befriedigt.

Um den Punkt $r = 0$ untersuchen zu können, erinnern wir uns, daß $\delta(\mathbf{r})$ nur unter einem Integral Bedeutung erlangt, also:

$$\int\limits_{\mathbb{B}} d^3r\,\mathrm{div}\mathbf{D} = \int\limits_{\mathbb{B}} d^3r\,q\delta(\mathbf{r}) = q, \tag{3.12}$$

wenn $\mathbb{B}$ den Ursprung umschließt. **D** hängt nach unserem Ansatz nur von r ab und ist somit auf einer Kugeloberfläche konstant. Der Gaußsche Satz

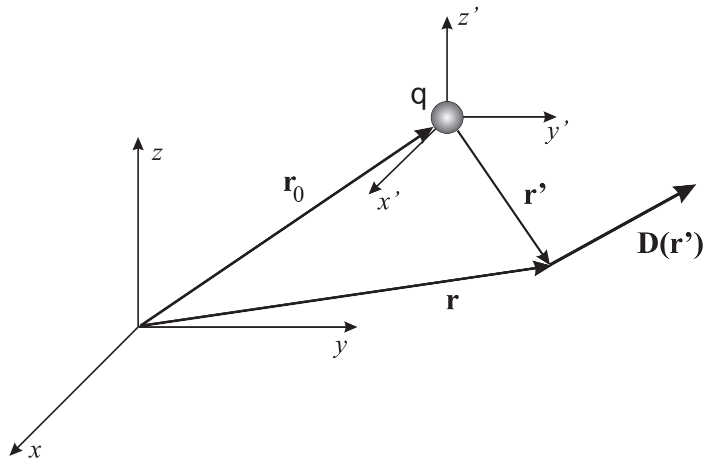


Abbildung 3.1: Das **D**-Feld einer Punktladung im Raum.

kann auch angewendet werden, wenn **D** Distributionscharakter hat und wir erhalten, wenn wir die Differentialgleichung (3.4) über die Kugel $\mathcal{K}_r$ mit dem Radius r um den Nullpunkt integrieren (also $\mathbb{B} = \mathcal{K}_r$):

$$\oint_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}_r}} d\mathbf{A}\,\mathbf{D} = q,$$

mit $\mathcal{A}_{\mathcal{K}_r}$ der Kugeloberfläche; nun ist $d\mathbf{A} = dA\,\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{D} = D(r)\,\mathbf{e}_r$ und damit folgt

$$\begin{aligned} D(r) \oint_{\mathcal{A}_{\mathcal{K}_r}} dA &= D(r)\,4\pi r^2 = q \\ D(r) &= \frac{q}{4\pi r^2} \end{aligned} \qquad (3.13)$$

als Lösung. Somit gilt:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi r^3}\mathbf{r}. \qquad (3.14)$$

Diese Lösung wird auch das Coulomb**feld** genannt.

Das Problem ist offensichtlich nicht nur isotrop sondern auch **homogen** und damit kann man sofort die Lösung für den Fall angeben, daß q nicht im Ursprung liegt. Es galt für $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ die Lösung (3.14); nach Abb. 3.1 folgt sofort:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right). \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Sind endlich viele Punktladungen im Raum verstreut, so folgt aufgrund des Superpositionsgesetzes unmittelbar:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right). \tag{3.16}$$

Im Vakuum folgt dann auch das **E**-Feld mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right). \tag{3.17}$$

Damit ist das Lorentzsche Kraftgesetz (2.31) anwendbar um die Kraft berechnen zu können, welche eine Punktladung q_2 am Punkte $\mathbf{r}_2$ erfährt, wenn sie dem **E**-Feld einer Punktladung q_1 am Punkte $\mathbf{r}_1$ ausgesetzt ist ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{F}_{21} = q_2\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right), \tag{3.18}$$

und damit wurde das Coulomb**sche Gesetz** aufgefunden. Man bezeichnet **F** als die **Coulombkraft**. Sie hat dieselbe formale Form wie die Massenanziehungskraft und damit ist auch die Coulombkraft **zentral** und **konservativ**. Das Potential der Coulombkraft ergibt sich schließlich mit:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{21} &= -\mathrm{grad}V \\ V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\end{aligned} \tag{3.19}$$

mit $V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ dem **Coulombpotential**. Daraus folgt wegen (3.18):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{q_2}\mathbf{F}_{21} \\ \mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\phi = -\frac{1}{q_2}\mathrm{grad}V \qquad (3.20)\\ \phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \qquad (3.21)\end{aligned}$$

mit $\phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ dem Potential des **E**-Feldes, dem **elektrostatischen Potential**. Es folgt weiterhin wegen (3.4) und (2.27):

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{E} &= \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}) \\ \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi &= -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r})\end{aligned}$$

oder

$$\nabla^2\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}),$$

und damit ist $\phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ nach (3.21) offensichtlich auch Lösung dieser Differentialgleichung, was aufgrund von Gleichung (3.7) nicht überraschend kommt.

Doch nun zurück zur Coulombkraft. Es gibt eine Anzahl von Bemerkungen hiezu:

1. Wir haben nicht berücksichtigt, daß q_2 auch einen Beitrag liefert. Das **D**-Feld wäre eigentlich nach Gleichung (3.16) zu bestimmen. Demnach wäre der Beitrag dieses Feldes zur Kraft sogar unendlich groß, dieser Beitrag hätte aber keine definierte Richtung. Es tritt hier erstmals das Problem der **Selbstwechselwirkung** auf, welches noch zu behandeln sein wird.

   Meist argumentiert man, daß q_2 eine "Probeladung" ist und daher das **D**-Feld von q_1 kaum stört.

2. Anstatt die Kraft zu untersuchen, die die Punktladung q_2 im Feld der Ladung q_1 erfährt, können wir auch q_1 als Probeladung ansehen und die Kraft $\mathbf{F}_{12}$ bestimmen, welche q_1 im Feld von q_2 erfährt:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

   und damit gilt

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

   Es ist somit das Prinzip *actio = reactio* gültig.

3. Das Coulombsche Kraftgesetz verknüpft elektrische Ladungen mit Kräften und Längen. Man kann daher die Proportionalitätskonstante ε_0 bestimmen:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} |\mathbf{F}_{21}|^{-1},$$

   wobei sich die Dimension von ε_0 offensichtlich mit $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ ergibt. Wenn man nun die Kraft mißt, welche zwei Einheitsladungen von 1 C im Abstand von 1 m aufeinander ausüben, so findet man

$$|\mathbf{F}_{12}| = F_{12} = 8.98734 \times 10^9\,\mathrm{N},$$

   und daraus folgt:

$$\varepsilon_0 = 8.8544 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}.$$

   Definieren wir weiters die Einheit des elektrostatischen Potentiales ϕ mit **Volt** (V), so ergibt (3.21):

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}}$$

womit sich dann die Einheit von ε_0 auch als (As/Vm) angeben läßt. Aus (3.20) folgt schließlich die Einheit von $\mathbf{E}$ mit (V/m) und die von $\mathbf{D}$ mit (C/m^2).

3.3 Das freie Feld beliebiger Ladungsverteilungen

3.3.1 Die Poissonsche Differentialgleichung

Felder werden als "frei" bezeichnet, wenn es im Endlichen keine Randbedingungen gibt, sie sich also bis ins Unendliche fortsetzen können. Wir wollen hier Lösungen der stationären MAXWELL-Gleichungen für beliebige, kontinuierliche Ladungsverteilungen untersuchen. Die Feldgleichungen lauten also:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Also ist das Feld wirbelfrei und damit durch $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi$ aus dem elektrostatischen Potential ableitbar. ϕ ist dabei, wie jedes Potential, bis auf eine Konstante C festgelegt, da

$$\mathrm{grad}\,(\phi + C) = \mathrm{grad}\phi + \underbrace{\mathrm{grad}C}_{=0} = \mathrm{grad}\phi.$$

Damit sind nur Potentialdifferenzen physikalisch relevant, und man nennt die Potentialdifferenz elektrischer Potentiale die **elektrische Spannung** U. Diese Definition ist konsistent mit:[1]

$$\begin{aligned} U &= \int_C d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int_{\phi_1}^{\phi_2} ds \frac{d\mathbf{r}}{ds}\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}(s)) \\ &= -\int_{\phi_1}^{\phi_2} ds \frac{d\phi}{ds} = -\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_1 - \phi_2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Wir setzen nun $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi$ in die erste Gleichung von (3.22) ein und erhalten

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

oder

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{3.24}$$

[1]Siehe: R.J. Jelitto, THEORETISCHE PHYSIK 1: MECHANIK I, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1982), 92 ff.

womit die POISSONsche **Differentialgleichung** aufgefunden wurde. Kennen wir die Lösung von (3.24), so ist das **E**-Feld sofort durch Gradientenbildung bestimmbar.

Gleichung (3.24) ist linear und es gilt daher wiederum das Superpositionsgesetz. Wir können daher die Lösung aus der allgemeinen homogenen und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung aufbauen. Die homogene Gleichung ist die Laplacesche Differentialgleichung (3.7) mit der Lösung (3.8). Wir fordern nun (wie schon früher), daß das **E**-Feld von Quellen, welche ganz im Endlichen liegen, im Limes $\mathbf{r} \to \infty$ verschwindet und prägen damit dem Problem *physikalische Randbedingungen im Unendlichen* auf. Der Argumentation auf Seite 23 folgend, müssen wir also fordern, daß $\phi^0 = konst$ ist, was natürlich durch $\phi^0 = 0$ erfüllt wird.

3.3.2 Die freie Greensche Funktion, das POISSONsche Integral

Wir wollen nun die Lösung von (3.24) im unendlich ausgedehnten Raum bestimmen. Dazu werden wir die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung auf die Berechnung eines Integrales überführen. Wir bedienen uns dazu der Methode der **Greenschen Funktionen**[2] und gehen von der speziellen Poissonschen Differentialgleichung

$$\nabla^2 G^0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

aus, mit $G^0(\mathbf{r})$ der **freien Greenschen Funktion**. Dann findet man die Lösung von (3.24) durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{B}} dV'\, G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'), \tag{3.26}$$

was durch Ausrechnen unmittelbar bewiesen werden kann:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi(\mathbf{r}) &= \nabla^2_{\mathbf{r}}\int_{\mathbb{B}} dV'\, G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') \\
&= \int_{\mathbb{B}} dV'\, \nabla^2_{\mathbf{r}} G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV'\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

[2]Siehe: F. Schürrer, Distributionen, Fouriertransformationen, Greensche Funktionen, Skriptum zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER THEORETISCHEN PHYSIK, Graz (1996), Seite 82 ff.

Somit haben wir bei Vorgabe einer beliebigen Quellverteilung das Problem auf die Lösung von (3.25) überwälzt.

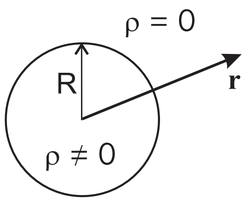
Die Lösung von (3.25) ist trivial: es ist die Lösung von (3.4) für die Ladung $q = 1$, Gleichung (3.21):

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

und damit wird aus (3.26):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV'\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}'), \tag{3.27}$$

das Poisson**sche Integral**. Es ist nun zu zeigen, daß das so bestimmte Potential die Randbedingungen im Unendlichen $\lim_{\mathbf{r}\to 0}\phi(\mathbf{r}) = 0$ erfüllt. Sind nun alle Ladungen im Endlichen gelegen, so gibt es stets eine Kugel vom Radius R, sodaß für $|\mathbf{r}| > R$ $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ist. Dann erfüllt $\phi(\mathbf{r})$ auch die Randbedingung im Unendlichen:



$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}') \\ &< \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{1}{\min|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}_{=r-R>0}\underbrace{\int dV'\,\rho(\mathbf{r}')}_{=Q}.\end{aligned}$$

Für $r\to\infty$ folgt dann:

$$\lim_{\mathbf{r}\to\infty}\phi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\mathbf{r}\to\infty}|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \propto \frac{1}{r^2}, \qquad \textbf{w.z.b.w.} \tag{3.28}$$

Das **E**-Feld folgt aus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla_{\mathbf{r}}\int dV'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{3.29}$$

wobei wir zunächst $\nabla_{\mathbf{r}}\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)^{-1}$ bestimmen wollen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x,y,z) \\ \nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}, \frac{\partial}{\partial y}\ldots, \frac{\partial}{\partial z}\ldots\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{[\ldots]^{3/2}},\ldots,\ldots\right) \\ &= -\left(\frac{x-x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \frac{y-y'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \frac{z-z'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) \\ &= -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.\end{aligned}$$

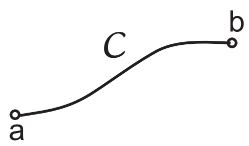
Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\rho(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

womit die Lösung der Gleichungen (3.22) aufgefunden wurde.

3.3.3 Die elektrische Feldenergie

Eine Probeladung wird im elektrischen Feld von a nach b entlang der Raumkurve $\mathcal{C}$ verschoben. Dabei wird folgende Arbeit verrichtet:



$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{K} = q\int\limits_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
&= qU_{(a,b)}, \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

mit $U_{(a,b)}$ der Spannung zwischen den beiden Punkten a und b entsprechend (3.23). Die Arbeit ist offensichtlich vom Weg unabhängig, da das $\mathbf{E}$-Feld ein Potential hat.

Wenn wir nun eine Ladung aus dem Unendlichen (dort gibt es keine Felder, $\phi = 0$) an einen bestimmten Punkt im Raum verschieben, so gewinnt die Ladung aufgrund der geleisteten Arbeit **potentielle Energie** V. Ist diese für die Probeladung im Unendlichen Null, so kann man schreiben:

$$
V(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}). \qquad (3.32)
$$

Dies ergibt im Fall des Feldes einer Punktladung q_2 im Orte $\mathbf{r}$:

$$
V(\mathbf{r}) = q\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{qq_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}.
$$

Wir **definieren** nun den Energieinhalt eines Punktladungssystems von N Ladungen als die Gesamtarbeit, welche erforderlich ist, um das Ladungssystem zu installieren. Also:

1.) $q_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_1$, $A_1 = 0$, keine Arbeit erforderlich

2.) $q_2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_2$, $\quad A_2 = q_2[\phi_1(\mathbf{r}_2) - \phi_1(\infty)] = q_2\phi_1(\mathbf{r}_2) = \dfrac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$

3.) $q_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_3,$

$$\begin{aligned} A_3 &= q_3[\phi_1(\mathbf{r}_3) + \phi_2(\mathbf{r}_3)] \\ &= \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|}\right] \end{aligned}$$

$\vdots$

N.) $q_N \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_N,$

$$A_N = q_N \sum_{m<N} \phi_m(\mathbf{r}_N) = \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{m<N} \frac{q_m}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_m|} \quad .$$

Somit ist der gesamte Energieinhalt E der Ladungsverteilung durch

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=2}^{N} A_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{m<n} \frac{q_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{m,n=1}^{N}{}' \frac{q_n q_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dies ist möglich, da stets

$$\frac{q_n q_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} = \frac{q_m q_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|}$$

gilt. Es ist ganz wichtig, daß in (3.33) alle Terme mit $n = m$ ausgeschlossen sind, da diese Terme *divergent* sind:

$$E_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_m q_m}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_m|}.$$

Sie heißen **Selbstenergien**. Diese Selbstenergien hängen mit **Selbstkräften** zusammen, welche jene Kräfte bezeichnen, die die Ladung infolge ihres eigenen Feldes auf sich selbst ausübt. Der Beitrag des eigenen Feldes zur Kraft wäre dem Betrag nach sogar unendlich groß, sie hat aber keine definierte Richtung. Deshalb kann die Kraft nicht dynamisch wirksam werden.

Gehen wir nun zu kontinuierlichen Ladunsgverteilungen über, so wird das Problem der Selbstenergien auftreten; die vollständige Doppelsumme von (3.33)

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{q_n q_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}$$

würde, falls sie existiert, im kontinuierlichen Fall auf

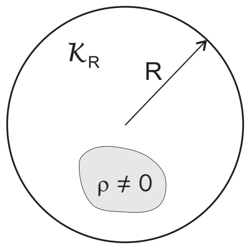
$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int\int dV dV' \, \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

streben. Allerdings existiert die Doppelsumme nicht und es ist höchst unklar, wie man die Beschränkung $m \neq n$ auf die Integration übertragen kann. Man kann aber zeigen, daß in drei Dimensionen und im Fall beschränkter Ladungsdichten das Integral

$$E = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int\int dV\, dV' \, \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{3.34}$$

existiert, und somit ist es sinnvoll, (3.34) als **Energieinhalt** einer *kontinuierlichen Ladungsverteilung* zu definieren, inklusive der jetzt offensichtlich endlichen Selbstenergie.

Liegt nämlich die Ladungsverteilung ganz im Inneren einer Kugel $\mathcal{K}_R$ vom Radius R, und ist $\rho(\mathbf{r})$ absolut beschränkt, so gilt:



$$E \leq \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left|\max \rho(\mathbf{r})\right|^2 \underbrace{\int\limits_{\mathcal{K}_R} dV \int\limits_{\mathcal{K}'_R} dV' \, \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=2(4\pi)^2 \frac{R^5}{15}} < \infty.$$

Hat die Ladungsdichte Distributionscharakter, divergiert das Integral und man muß die Selbstenergie der Punktladungsanteile wieder abziehen.

Wir folgern daraus, daß das "unrealistische" Punktladungsmodell zu unphysikalischen, divergenten Selbstenergien führt, obwohl Selbstenergien an sich nicht divergent sind. Es ist also hier die Frage zu stellen, ob Punktladungsmodelle in jeder Hinsicht physikalisch relevant sind.

Man kann nun die Energie im Kontinuum auch unter Verwendung des Poissonschen Integrales (3.27) und der Poissonschen Differentialgleichung (3.24) als

$$E = \frac{1}{2} \int dV \, \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \, \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r})$$

schreiben. Die Integration läuft dabei über den unbegrenzten Raum. Man wertet diesen Ausdruck aus, indem man über eine Kugel $\mathcal{K}_R$ vom Radius R integriert, und dann den Limes $R \to \infty$ ausführt:

$$E = -\frac{\varepsilon_0}{2} \lim_{R\to\infty} \left\{ \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} dA \, \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \int\limits_{\mathcal{K}_R} dV \, \mathrm{grad}\phi \, \mathrm{grad}\phi \right\}.$$

Hier ist $\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}$ die Oberfläche der Kugel $\mathcal{K}_R$, und wir haben die 1. Greensche Identität

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV \, \mathrm{div} \, (\alpha \, \mathrm{grad}\beta) \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{B}} dV \, \alpha \nabla^2 \beta + \int\limits_{\mathbb{B}} dV \, \mathrm{grad}\alpha \, \mathrm{grad}\beta$$

$$= \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} dA\, \alpha \frac{\partial \beta}{\partial n} \tag{3.35}$$

angewendet. Für das Oberflächenintegral verwenden wir die Lösung für das elektrostatische Potential nach Gleichung (3.27) und (3.28):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{konst}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \qquad r \to \infty \\ \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} &= \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r} = -\frac{konst}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \qquad r \to \infty, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} dA\, \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} &= -\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} R^2 d\Omega \left[\frac{konst}{R^3} + \mathcal{O}(R^{-4})\right] \\ &= -\lim_{R\to\infty} \left[\frac{4\pi}{R} konst + \mathcal{O}(R^{-2})\right] = 0. \end{aligned}$$

Nach Ausnützung dieses Grenzüberganges muß man nun in Folge über den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ integrieren, und damit finden wir:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV\, \mathrm{grad}\phi\, \mathrm{grad}\phi \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Im Verlauf dieser Umformungen ist durchaus Interessantes geschehen: der Ausgangspunkt war Gleichung (3.33), in welcher die Größe und Lage von Ladungen für den Energieinhalt maßgeblich waren. Die Ladungen waren also die “Träger” der Energie. Mit (3.36) haben wir aber einen Ausdruck gefunden, in welchem die Ladungen überhaupt nicht mehr vorkommen - es treten nur die Felder auf!

Das System hat einen Energieinhalt, weil es Felder gibt.

Wir können nun sogar eine **Energiedichte** $w(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r}) \qquad (3.37) \\ E &= \int dV\, w(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

einführen. Wegen $w = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}/2 \geq 0$ kann die Energiedichte *nirgens negativ* werden, also gilt $E \geq 0$. Dies scheint zunächst in Widerspruch damit, daß der

Energieinhalt eines Systems von ungleichnamigen Ladungen negativ ist. Man gewinnt Arbeit, wenn man den Abstand der beiden Ladungen verringert. Allerdings haben wir hier nicht den Beitrag der Selbstenergie berücksichtigt, deren Beitrag die Energiedichte permanent nicht-negativ macht.

Eine kurze Abschlußbemerkung: nach (3.36) ergibt sich die Einheit der Energie, ausgedrückt durch Volt und Ampère, mit (VAs).

3.4 Gausssches Gesetz, Faradaysches Gesetz

Die Gleichungen (3.22) lassen sich auch in integraler Form schreiben. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes führt zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} dV \,\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV\,\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \oint_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

mit Q der Gesamtladung in $\mathbb{B}$. (3.38) ist das Gausssche **Gesetz** der Elektrostatik.

Ist nun $\mathcal{A}$ eine beliebige, orientierbare Fläche und $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ die Randkurve der Fläche $\mathcal{A}$, so folgt aus $\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ und dem Stokeschen Integralsatz

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

das Faraday**sche Gesetz** der Elektrostatik.

Diese Integralsätze kann man dazu verwenden, das Verhalten des **E**-Feldes beim Durchgang durch eine geladene Fläche zu ermitteln. Dazu ist es notwendig eine **Flächenladungsdichte** $\eta(\mathbf{r}, t)$ analog zur Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ entsprechend (2.4) einzuführen:

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{A_n}. \tag{3.40}$$

Hier ist dann $\mathcal{A}_n$ eine Folge von Flächen, welche sich auf $\mathbf{r}$ konzentrieren, d.h.: $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, wenn A_n ihr Flächeninhalt ist. Auf jeder Fläche $\mathcal{A}_n$ wird die Ladung Q_n gemessen.

Wenn wir nun das Verhalten des **E**-Feldes beim Durchgang durch die Fläche $\mathcal{A}$ in Abb. 3.2 untersuchen wollen, betrachten wir einen Punkt $\mathbf{r}$ auf

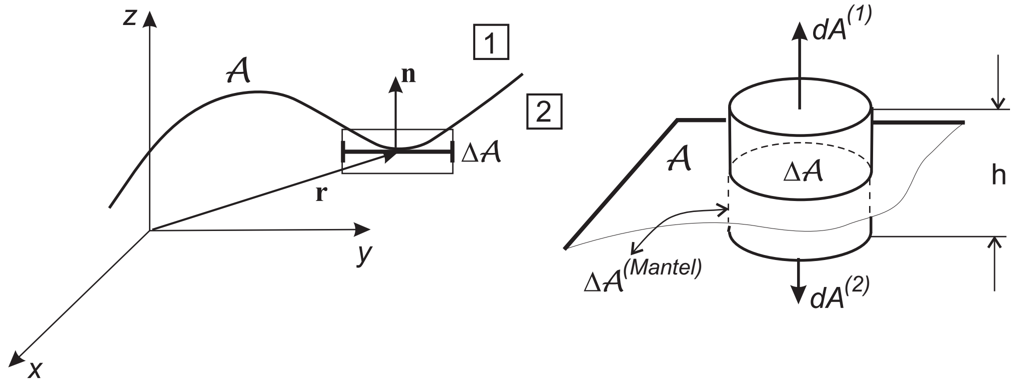


Abbildung 3.2: Zur Berechnung des Verhaltens der Normalkomponente des **E**-Feldes beim Durchgang durch eine geladene Fläche.

dieser Fläche, und dieser sei mit einer Flächenladung $\eta(\mathbf{r},t)$ belegt. Wir bezeichnen nun rund um $\mathbf{r}$ willkürlich eine Seite der Fläche mit $\boxed{1}$ und die andere mit $\boxed{2}$ und das **E**-Feld im Punkte $\mathbf{r}$ mit $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})$ bzw. $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})$. $\Delta\mathcal{A}$ sei ein kleines Flächenstück um $\mathbf{r}$, welches in einer "Dose" der Höhe h eingeschloßen ist. Die "Deckel" dieser Dose $\Delta\mathcal{A}^{(1)}$ und $\Delta\mathcal{A}^{(2)}$ verlaufen parallel zu $\Delta\mathcal{A}$. Es gilt wegen (3.38)

$$\oint\limits_{Dose} d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\Delta\mathcal{A}} dA\,\eta(\mathbf{r}).$$

Wir können das Oberflächenintegral als Summe von drei Beiträgen schreiben:

$$\oint\limits_{Dose} d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Delta\mathcal{A}^{(1)}} d\mathbf{A}^{(1)}\,\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) + \int\limits_{\Delta\mathcal{A}^{(2)}} d\mathbf{A}^{(2)}\,\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) + \int\limits_{\Delta\mathcal{A}^{(Mantel)}} d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Im Limes $h \to 0$ verschwindet der Beitrag des Mantels und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\oint\limits_{Dose} d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int\limits_{\Delta\mathcal{A}^{(1)}} d\mathbf{A}^{(1)}\,\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) + \int\limits_{\Delta\mathcal{A}^{(2)}} d\mathbf{A}^{(2)}\,\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) \\
&= \int\limits_{\Delta\mathcal{A}} dA\left\{\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\,\mathbf{n} - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\,\mathbf{n}\right\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\lim_{h\to 0}\int\limits_{\Delta\mathcal{A}} dA\,\eta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\Delta\mathcal{A}} dA\,\eta(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Läßt man nun $\Delta\mathcal{A}$ infinitesimal klein werden, so ergibt sich

$$\left[\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \tag{3.41}$$

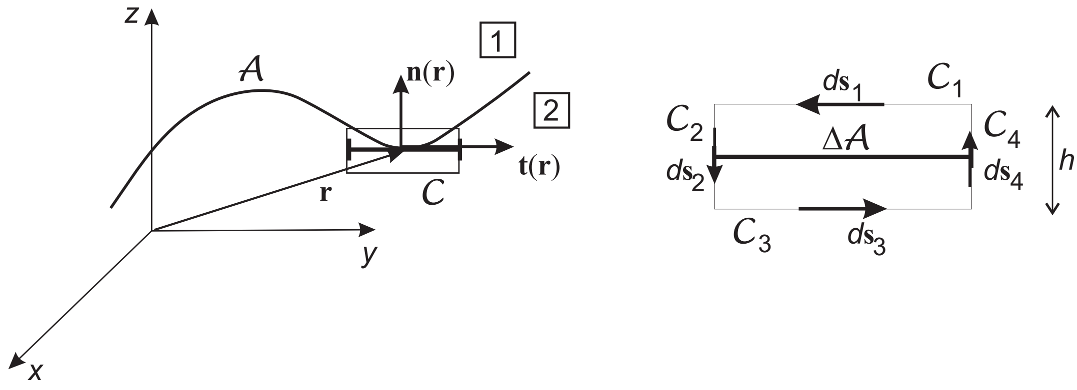


Abbildung 3.3: Zur Berechnung des Verhaltens der Tangentialkomponente des $\mathbf{E}$-Feldes beim Durchgang durch eine geladene Fläche.

> *Die Normalkomponenten des $\mathbf{E}$-Feldes ändern sich unstetig beim Durchgang durch eine Flächenladung.*

Es seien nun $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ der Flächennormal- und der Tangentialvektor im Punkte $\mathbf{r}$ an $\mathcal{A}$ entsprechend Abb. 3.3. $\mathcal{C}$ sei ferner eine geschlossene Kurve, welche $\Delta\mathcal{A}$ umschließt. Es gilt nun (3.39):

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{s}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{4} \oint_{\mathcal{C}_i} d\mathbf{s}_i\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

Wir lassen wieder die Höhe h gegen Null gehen und dann verschwinden die Beiträge von $\mathcal{C}_2$ und $\mathcal{C}_4$:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{s}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \oint_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{s}_1\,\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) + \oint_{\mathcal{C}_3} d\mathbf{s}_3\,\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) \\ &\approx -\left[\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\,\mathbf{t}(\mathbf{r})\Delta s, \end{aligned}$$

und mit $\Delta s \to 0$ erhalten wir:

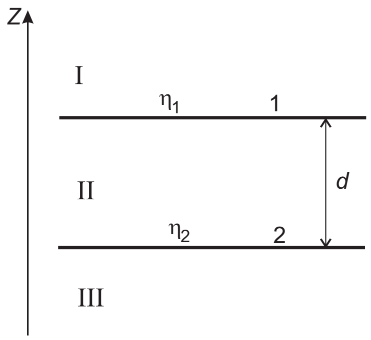
$$\left[\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\,\mathbf{t}(\mathbf{r}) = 0. \tag{3.42}$$

> *Die Tangentialkomponente des $\mathbf{E}$-Feldes ändert sich beim Durchgang durch eine Flächenladung nicht.*

Es tritt also eine **Brechung** der Feldlinien auf!

3.5 Der Plattenkondensator

Wir betrachten eine Anordnung aus zwei einander gegenüberliegenden Platten der Fläche A. Ihr Abstand sei $d \ll \sqrt{A}$. (Eigentlich sollten die Platten unendlich ausgedehnt sein, aber obige Einschränkung für d ist ausreichend um Randeffekte zu verhindern.) Die Platten 1 und 2 sind mit konstanten Flächenladungsdichten η_1 und η_2 belegt.



Wir nehmen nun an, daß im Raumbereich I $\mathbf{E}^{\mathrm{I}} = \mathbf{0}$ gelte, dann folgt aus (3.42), daß die Tangentialkomponenten von $\mathbf{E}$ auch in den Bereichen II und III verschwinden. Wegen (3.41) gilt ferner für die Normalkomponente von $\mathbf{E}^{\mathrm{II}}$:

$$E_n^{\mathrm{II}} = \frac{\eta_1}{\varepsilon_0},$$

und daraus folgt für den Bereich III:

$$E_n^{\mathrm{III}} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_1 + \eta_2).$$

Wollen wir nun erreichen, daß $\mathbf{E}^{\mathrm{III}} = \mathbf{0}$ ist, so müssen wir $\eta_1 = -\eta_2$ wählen, und dann gilt im Bereich II:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{II}} = \left(0, 0, \frac{\eta_1}{\varepsilon_0}\right).$$

Damit können wir die Spannung zwischen den beiden Platten bestimmen (3.23):

$$U = \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 d\mathbf{r}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{z_1}^{z_2} dz\, E(z) = \frac{\eta_1}{\varepsilon_0} d.$$

Die Gesamtladung der Platten ist nach (3.40) durch

$$\pm Q = \int_{\mathcal{A}} dA\, \eta_1(\mathbf{r}) = \eta_1 A$$

gegeben, und somit besteht zwischen dem Betrag der Ladung und der Spannung U eine Proportionalität:

$$Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} U = C\, U,$$

mit einer Proportionalitätskonstanten C, der **Kapazität** der Anordnung. Wie man erkennt, ist sie *allein* durch die geometrischen Größen A und d sowie durch ε_0 bestimmt. Die Einheit der Kapazität ist **Farad** (F), und es gilt

$$1\mathrm{F} = 1\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}.$$

Die im Kondensator gespeicherte Gesamtenergie kann unmittelbar aus der Energiedichte (3.37) bestimmt werden:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\frac{\eta_1}{\varepsilon_0}\eta_1,$$

und damit wird:

$$E = wV = \frac{1}{2}\frac{\eta_1^2}{\varepsilon_0}Ad = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{A\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU.$$

3.6 Das Randwertproblem der Elektrostatik

3.6.1 Grundsätzliches

Es stellt sich nun die Frage, inwiefern die Poissonsche Differentialgleichung (3.24) das elektrostatische Potential und damit das **E**-Feld bestimmt. Ausgangspunkt der Überlegungen ist dabei die zweite Greensche Identität:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}} dV \,\mathrm{div}\left(\alpha \mathrm{grad}\beta - \beta \mathrm{grad}\alpha\right) &= \int_{\mathbb{B}} dV \,\left(\alpha\nabla^2\beta - \beta\nabla^2\alpha\right) \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA \,\left(\alpha\nabla\beta - \beta\nabla\alpha\right)\mathbf{n}, \qquad (3.43)\end{aligned}$$

mit $\mathbf{n}$ dem Flächennormalvektor. Wählen wir nun $\alpha(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$ und $\beta(\mathbf{r}) = -1/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, wobei $\alpha(\mathbf{r})$ (3.24) genüge und $\mathbf{r} \in \mathbb{B}$ gelte, so folgt:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}} dV' \left[\nabla^2_{\mathbf{r}'}\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right]\phi(\mathbf{r}') + \int_{\mathbb{B}} dV' \,\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla^2_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}') = \\ &= \int_{\mathbb{B}} dV' \,\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV' \,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\mathbf{n}'\end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA'\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}')-\phi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\mathbf{n}'. \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Wir erkennen, daß das elektrostatische Potential einerseits durch die Raumladungsdichte, andererseits auch durch die **Randbedingungen** (die Werte des Potentiales und seiner Normalableitungen an der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$, welche den Bereich $\mathbb{B}$ begrenzt) festgelegt ist.

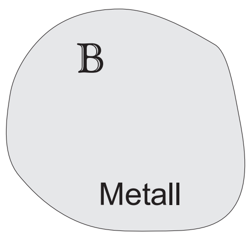
3.6.2 Physikalische Realisierung von Randbedingungen

(a) Ist zunächst $\mathbb{B}=\mathbb{R}^3$, so fordert man

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\phi(\mathbf{r})=0.$$

Dann gehen die beiden Terme des Integrales über $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ von (3.44) wie $|\mathbf{r}|^{-2}$ gegen Null und das Integral selbst verschwindet.

(b) Wir stellen uns nun vor, es befände sich im Raum ein Stück Metall.

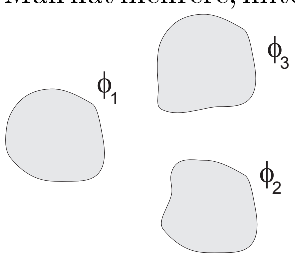


Dann muß - behaupten wir - überall in $\mathbb{B}$ einschließlich des Randes $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ das elektrostatische Potential ϕ einen konstanten Wert besitzen:

$$\phi = konst, \qquad \nabla\phi = 0, \qquad (3.45)$$

unabhängig davon, von welchen Ladungen im Außenraum es auch immer verursacht sein mag. Wäre ϕ nicht konstant, so könnte (lokal) $\nabla\phi$ nicht Null sein und damit würden die (frei beweglichen) Ladungsträger Kräfte erfahren, welche zu einer Umverteilung der Ladungsträger im Metall führen, bis $\nabla\phi=0$ erfüllt ist. Es ändert sich nichts, wenn nun $\mathbb{B}$ ausgehöhlt wird und am Ende nur $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ übrig bleibt. Stets wird (3.45) gelten.

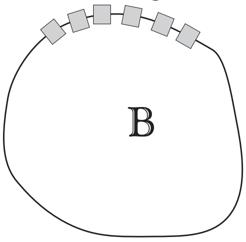
(c) Man hat mehrere, miteinander nicht verbundene, metallische Bereiche im



Raum. Sie können auf unterschiedlichen Potentialen liegen und für jeden Bereich gilt:

$$\phi|_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}_i}} = konst.$$

(d) Wir verallgemeinern (c) und stellen uns einen (nicht-metallischen) Raumbereich $\mathbb{B}$ vor, dessen Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ aus vielen gegeneinander isolierten Metallplättchen besteht, die auf unterschiedlichen Potentialen liegen. Dieses Bild kann zu einer Bereichsoberfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ verfeinert werden, auf der das elektrostatische Potential eine vorgegebene Funktion des Ortes ist:

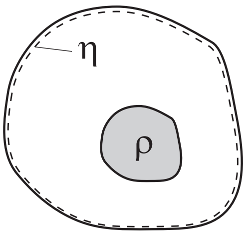


$$\phi = \phi(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}}.$$

Man spricht von DIRICHLET**schen Randbedingungen**.

(e) Ist hingegen auf einer Fläche im Raum die *Normalableitung* $(\nabla\phi)\mathbf{n}$ gegegeben, so spricht man von NEUMANN**schen Randbedingungen**.

(α) Wir denken uns nun ein beschränktes Raumgebiet $\mathbb{B}$, welches eine Raumladung $\rho(\mathbf{r})$ umschließt. Das Potential muß dann die Poissonsche Differentialgleichung erfüllen:



$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}).$$

Wir integrieren über $\mathbb{B}$:

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV\,\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV\,\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q.$$

Wählt man nun in (3.43) $\alpha = 1$,[3] so folgt

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV\,\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\,(\nabla\phi)\,\mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q,$$

und wir sehen, daß $(\nabla\phi)\mathbf{n}$ nicht mehr frei wählbar erscheint. Will man es aber doch erreichen, so muß man auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ zusätzliche Flächenladungen zulassen und das Flächenintegral als **außen** von diesen Ladungen gebildet denken. Dann kann diese Flächenladung

$$Q_s = \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\,\eta(\mathbf{r})$$

eine zwischen der Raumladung Q und dem Oberflächenintegral $1/\varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\,(\nabla\phi)\mathbf{n}$ auftretende Diskrepanz kompensieren.

[3] Dies entspricht der Anwendung des Gaußchen Satzes auf grad$\phi(\mathbf{r})$.

(β) Der Außenbereich erstrecke sich nun, im Gegensatz zu (α) ins Unendliche und wir wollen ihn mit $\bar{\mathbb{B}}$ bezeichnen ($\bar{\mathbb{B}} = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}$). Wir integrieren nun (3.24) über $\bar{\mathbb{B}}$, wobei in $\bar{\mathbb{B}}$ die Raumladung $\bar{\rho}$ liegt, und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\bar{\mathbb{B}}} dV\, \nabla^2\phi(\mathbf{r}) &= \int\limits_{\mathcal{S}_{\bar{\mathbb{B}}}} dA\, (\nabla\phi)\mathbf{n} \\
&= -\int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\, (\nabla\phi)\mathbf{n} + \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}^3}} dA\, (\nabla\phi)\mathbf{n} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\bar{\mathbb{B}}} dV\, \bar{\rho}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\bar{Q}. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Es ist nun möglich $(\nabla\phi)\mathbf{n}$ auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ und $\bar{\rho}$ ohne Flächenladung beliebig vorzugeben, da sich durch den zweiten Oberflächenterm stets eine Kompensation einstellt.
Somit kann man sich jetzt die Randbedingungen $(\nabla\phi)\mathbf{n}$ als Ergebnis einer geeigneten Ladungsverteilung $\rho \in \mathbb{B}$ vorstellen, für welche

$$
\int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\, (\nabla\phi)\mathbf{n} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (3.47)
$$

gilt. Mit (3.46) und (3.47) erhält man die stets gültige Beziehung

$$
\int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}^3}} dA\, (\nabla\phi)\mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + \bar{Q}\right).
$$

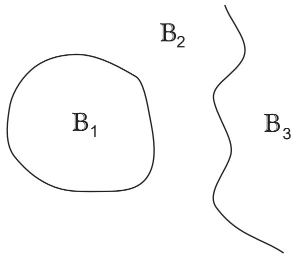
Wir sehen also, daß die Neumannschen Randbedingungen in beiden Fällen sinnvoll sind, jedoch unterschiedliche physikalische Situationen charakterisieren.

(f) Man spricht von CAUCHY**schen Randbedingungen**, wenn sowohl ϕ als auch $(\nabla\phi)\mathbf{n}$ auf ein und derselben Fläche vorgegeben werden. Solche Randbedingungen sind physikalisch nicht zu rechtfertigen, und es existiert für sie keine Lösung des Randwertproblemes.

(g) Ist hingegen auf *einem Teil* der Randfläche ϕ, auf einem *anderen Teil* $(\nabla\phi)\mathbf{n}$ vorgegeben, so spricht man von einem **gemischten Problem**.

3.6.3 Scheinbare Ladungsverteilungen, Spiegel- und Influenzladungen

Wir haben gesehen, wie es physikalisch zu Randwertproblemen kommen kann, und wir müssen uns jetzt mit ihrer Struktur auseinandersetzen. Eigentlich beginnt eine Randwertaufgabe mit einer genauen Beschreibung der

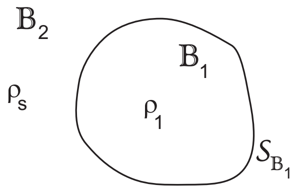


Flächen auf denen Randwerte vorgegeben werden. Diese Flächen sollen so beschaffen sein, daß sie den $\mathbb{R}^3$ in disjunkte Teilbereiche $\mathbb{B}_i$ zerlegen:

$$\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j = \emptyset, \qquad \mathbb{R}^3 = \bigcup_i \mathbb{B}_i.$$

Dies ist dadurch möglich, daß alle Flächen Oberflächen beschränkter Bereiche sind (etwa $\mathbb{B}_1$), oder auch sich allseitig nach Unendlich fortsetzen (etwa Bereich $\mathbb{B}_2$ od. $\mathbb{B}_3$). Beide Typen sind **geschlossen**; sie sind im Endlichen unberandet.

Wir wollen nun folgendes Problem lösen:



Gegeben ist der Bereich $\mathbb{B}_1$, eine Randbedingung auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$, ρ_1 auf $\mathbb{B}_1$; gesucht ist ϕ in $\mathbb{B}_1$. Es gilt natürlich die Poissonsche Differentialgleichung

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_1,$$

und das Poisson-Integral (3.27) liefert die partikuläre Lösung ϕ_p. Diese Lösung wird im allgemeinen nicht die Randbedingungen auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}_1}$ erfüllen. Wir müssen daher eine geeignete Lösung der homogenen Gleichung $\nabla^2\phi_0 = 0$ aufsuchen, derart, daß

$$\phi = \phi_0 + \phi_p$$

gerade die Randbedingungen erfüllt.

Es ist nun die Frage zu stellen, wie ein geeignetes ϕ_0 aufgefunden werden kann. Man bedient sich dazu folgender Möglichkeit: wir denken uns im Außenbereich $\mathbb{B}_2$ eine **fiktive** Ladung ρ_s angebracht. Ihr Poisson-Integral

$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}_2} dV'\,\frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{B}_2 \tag{3.48}$$

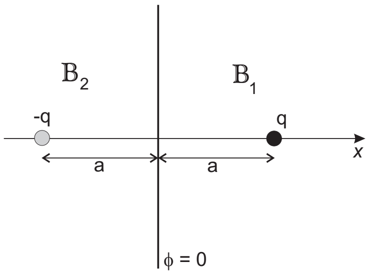
erfüllt die Gleichung $\nabla^2\phi'(\mathbf{r}) = -\rho_s/\varepsilon_0$ und da auf $\mathbb{B}_1$ $\rho_s = 0$ gelten muß, so gilt dort $\nabla^2\phi'(\mathbf{r}) = 0$. Somit ist ϕ' tatsächlich vom Typ ϕ_0 und

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_p(\mathbf{r}) + \phi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV'\,\frac{\rho_1(\mathbf{r}') + \rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

erfüllt auf $\mathbb{B}_1$ die Gleichung $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\rho_1/\varepsilon_0$. Gelingt es nun, die fiktive Ladungsdichte ρ_s so zu bestimmen, daß ϕ die Randbedingungen erfüllt, so ist das Problem gelöst.

Es wurden somit die Randwerte durch eine **Scheinladung** *im nicht interessierenden Bereich* $\mathbb{B}_2$ *simuliert. Gleichung (3.48) ist dabei als Integralgleichung zur Bestimmung von* ρ_s *aufzufassen.*

Das Problem, diese Scheinladung zu finden, läßt sich in Fällen hoher Symmetrie und einfacher Randbedingungen - und leider nur in solchen Fällen - recht einfach lösen. Wir stellen uns in einem Beispiel vor, wir hätten eine Punktladung der Größe q im Punkt $\mathbf{r}_0 = (a, 0, 0)$ über einer Ebene angebracht. Auf dieser sei das konstante Potential $\phi = 0$ vorgegeben. (Die Ebene ist **geerdet**). Es gilt also:



$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

und wir bestimmen die partikuläre Lösung:

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \, \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|},$$

welche aber als Potential einer Punktquelle im freien Raum nicht die Randbedingungen erfüllt. Wir wählen nun die Scheinladung $-q$ am Ort $-\mathbf{r}_0$, und für sie gilt die Lösung:

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \, \frac{-q\delta(\mathbf{r}' - (-\mathbf{r}_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|},$$

was zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|}\right\}$$

führt, was offensichtlich die Randbedingung $\phi(x = 0, y, z) = 0$ erfüllt.

Man nennt eine Scheinladung mit so einfachen Eigenschaften eine **Spiegelladung**. Sie hat keinerlei reale Bedeutung. Fragen wir nach dem Potential in $\mathbb{B}_2$, so gibt es dort keinerlei physikalische Quellen und auf dem Rand von $\mathbb{B}_2$ gilt $\phi = 0$. Somit wird ϕ überall in $\mathbb{B}_2$ identisch verschwinden.

Wir können nun entsprechend (b) unter Punkt 3.6.2 die Randbedingung $\phi = 0$ durch eine Metallplatte physikalisch realisieren, welche den Raum in zwei Halbräume trennt. Eine solche Platte *schirmt* den ladungsfreien Halbraum vollständig gegen elektrische Felder aus dem anderen Halbraum ab. Dasselbe geschieht im Inneren eines beliebigen, beschränkten Raumbereiches, der von einer Metallwand umgeben ist. Dies ist das Prinzip des FARADAY**schen Käfigs**.

Wir wollen nun noch die Normalkomponente von **E** auf der Randfläche $x = 0$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\phi, \qquad \mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) \\
\mathbf{En} &= E_x\big|_{x=0} = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left.\left\{-\frac{1}{2}\frac{2(x-a)}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{2(x+a)}{\left[(x+a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}\right|_{x=0} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{\left[a^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

Die Tangentialkomponenten $E_y = E_z = 0$, da

$$
\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{x=0} = 0
$$

gilt. In $\mathbb{B}_2$ verschwindet mit ϕ auch **E** identisch und somit erleidet die Normalkomponente von **E** auf der Grenzfläche einen Sprung, während die Tangentialkomponenten stetig sind, womit (3.42) erfüllt ist. Es muß nun wegen (3.41) auf der Grenzfläche eine Flächenladung existieren. Diese ist durch

$$
\eta(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{\left(a^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}
$$

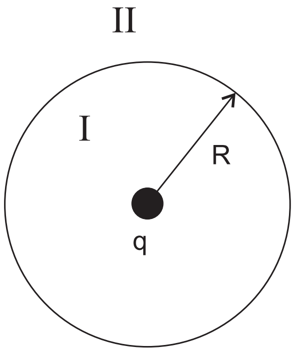
gegeben. Wir bestimmen ($r = \sqrt{y^2+z^2}$):

$$
\begin{aligned}
\int dA\,\eta(\mathbf{r}) &= -\frac{qa}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\,\frac{r}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{qa}{2\pi}2\pi\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d(r^2)}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{qa}{2}(-2)\left.\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\right|_0^{\infty} = -q.
\end{aligned}
$$

Die Ladung auf der Grenzfläche ist also gerade $-q$. Diese Flächenladungsdichte ist, im Gegensatz zur Spiegelladung, physikalisch. Man nennt sie die **Influenzladung**.

Wir erkennen weiters: ist auf der Fläche $\mathcal{A}$ das Potential ϕ als Randbedingung vorgegeben, so wird dadurch $(\nabla\phi(\mathbf{r}))\mathbf{n}$ eindeutig bestimmt! Man kann also *nicht* ϕ *und* $(\nabla\phi(\mathbf{r}))\mathbf{n}$ *gleichzeitig* frei wählen.

Wir untersuchen ein weiters Beispiel:



Es befinde sich im Mittelpunkt einer Kugel vom Radius R, welche auf einem konstanten Potential ϕ_0 gehalten wird, eine Punktladung q, und wir wollen ϕ im Bereich I bestimmen. In diesem gilt:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}q\delta(\mathbf{r}) \quad \Longrightarrow \quad \phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Damit sind die Äquipotentialflächen Kugelflächen und wir müssen nur noch die homogene Lösung

$$\nabla^2\phi_s(\mathbf{r}) = 0, \qquad \phi_s(\mathbf{r}) = C$$

zur Lösung im Bereich I addieren:

$$\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C.$$

Die Randbedingung für $r = R$ fordert

$$\phi^{\mathrm{I}}(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + C = \phi_0,$$

womit die Konstante C bestimmt werden kann:

$$C = \phi_0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R},$$

und wir erhalten die vollständige Lösung

$$\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}) = \phi_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Interessiert nun auch der Außenraum II, so gilt dort

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \phi(r) &= 0, \quad r \to \infty \\ \phi(R) &= \phi_0, \end{cases}$$

und dies wird mit dem Ansatz $\phi^{\mathrm{II}}(r) = C/r$ und

$$\phi^{\mathrm{II}}(R) = \phi_0 = \frac{C}{R} \quad \longrightarrow \quad C = R\phi_0,$$

zur Lösung

$$\phi^{\mathrm{II}}(r) = \frac{R\phi_0}{r}$$

führen. (Wäre $\phi_0 = 0$, also die Kugel geerdet, so wäre im Raum II kein **E**-Feld.)

$\phi^{\mathrm{II}}(r)$ können wir auch als Potential einer Scheinladung im Ursprung deuten:

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{II}}(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_s}{r} = \frac{R\phi_0}{r} \\ q_s &= 4\pi\varepsilon_0 R\phi_0.\end{aligned}$$

Es ist ganz offensichtlich, daß auch in diesem Beispiel die physikalische Ursache der Potentialverteilung im Innen- wie im Außenraum in einer Influenzladung zu suchen ist.

Um dies zu zeigen bestimmen wir die Normalkomponente von **E** beiderseits der Oberfläche:

$$\begin{aligned}\text{Bereich I:} \qquad E_r|_{r=R} &= -\left.\frac{\partial\phi^{\mathrm{I}}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} \\ \text{Bereich II:} \qquad E_r|_{r=R} &= -\left.\frac{\partial\phi^{\mathrm{II}}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{q_s}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}.\end{aligned}$$

Damit gilt nach (3.41)

$$\lim_{\delta\to 0}\left[E_r|_{R+\delta} - E_r|_{R-\delta}\right] = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

oder

$$(q_s - q)\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

und

$$\eta = \frac{1}{4\pi R^2}\,(q_s - q)\,.$$

Wir erhalten dann die Influenzladung and der Oberfläche als

$$\begin{aligned}\int dA\,\eta &= \frac{1}{4\pi R^2}\,(4\pi\varepsilon_0 R\phi_0 - q)\int dA \\ &= 4\pi\varepsilon_0 R\phi_0 - q.\end{aligned}$$

Ist nun $\phi_0 = 0$, so ist die Influenzladung gerade wieder $-q$.

Ist nun der Raum in n Bereiche $\mathbb{B}_j$ unterteilt und ρ_j die Raumladung in diesen Bereichen, dann gilt es für alle $\mathbb{B}_j$ die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

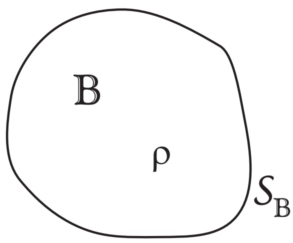
$$\nabla^2\phi^{(j)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_j$$

aufzufinden, welche gleichzeitig die auf den die $\mathbb{B}_j$ begrenzenden Flächen vorgegebenen Randbedingungen erfüllt. Wieder kann man $\phi^{(j)}(\mathbf{r}) = \phi_p^{(j)}(\mathbf{r}) + \phi_s^{(j)}(\mathbf{r})$ bilden und so die Randbedingungen sicherstellen. Dabei *muß* $\phi_s^{(j)}(\mathbf{r})$ *außerhalb* von $\mathbb{B}_j$ liegen, wenn man sich die homogene Lösung $\phi_s^{(j)}(\mathbf{r})$ durch eine Scheinladung verursacht denkt.

Das Problem zerfällt in n selbstständige Probleme.

3.6.4 Der Eindeutigkeitssatz und die Greensche Funktion des Randwertproblemes

Es ist folgendes Randwertproblem gegeben:



$\mathbb{B}$ ist ein zusammenhängender Bereich und $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ ist eine geschlossene Fläche, welche $\mathbb{B}$ begrenzt. Auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ sind Randwerte vorgegeben und in $\mathbb{B}$ ist die Ladungsdichte ρ gegeben. Auf $\mathbb{B}$ gilt dann:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}).$$

Gesucht ist das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$.

Eindeutigkeit der Lösung

Wir nehmen an es gäbe ϕ_1 und ϕ_2 derart, daß

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}), \qquad \phi_1|_{\text{Rand}} = \phi^r \quad \text{oder} \quad (\nabla\phi_1)\mathbf{n}|_{\text{Rand}} = f^r \\ \nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}), \qquad \phi_2|_{\text{Rand}} = \phi^r \quad \text{oder} \quad (\nabla\phi_2)\mathbf{n}|_{\text{Rand}} = f^r, \end{aligned}$$

wobei mit ϕ^r Dirichletsche Randbedingungen, mit f^r Neumannsche Randbedingungen, oder mit beiden auch gemischte Randbedingungen gegeben seien. Wir bilden $\psi = \phi_1 - \phi_2$, dann gilt

$$\nabla^2\psi = \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0$$

und

$$\begin{aligned} \psi|_{\text{Rand}} &= 0, \qquad \text{Dirichletsche Randbedingungen} \\ (\nabla\psi)\mathbf{n}|_{\text{Rand}} &= 0, \qquad \text{Neumannsche Randbedingungen.} \end{aligned}$$

Wir verwenden die erste Greensche Identität (3.35):

$$\int_{\mathbb{B}} dV\, \psi \underbrace{\nabla^2\psi}_{=0} + \int_{\mathbb{B}} dV\, \nabla\psi\, \nabla\psi = \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA\, \underbrace{\psi(\nabla\psi)\mathbf{n}}_{=0},$$

also

$$\int dV\,(\nabla\psi)^2 = 0, \quad \longrightarrow \quad \nabla\psi = 0, \quad \longrightarrow \quad \psi = konst.$$

Die bedeutet:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{Dirichlet} & \rightarrow & \psi \equiv 0 \\ \text{Neumann} & \rightarrow & \psi \equiv konst \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

> *Die Lösung obiger Randwertaufgabe legt das* **E**-*Feld* **eindeutig** *fest.*

Auffinden der Lösung

Man kann prinzipiell nach dem bereits bekannten Schema vorgehen:

1. ϕ_p bestimmen,
2. $\nabla^2\phi_0 = 0$ lösen, sodaß $\phi_p + \phi_0$ die Randbedingungen befriedigt.

Diese Vorgangsweise hat den Nachteil, daß ϕ_0 von den Randwerten abhängt **und** von ρ, da ja ϕ_p von ρ abhängt. Es wäre wünschenswert, wenn man mit Funktionen arbeiten könnte, welche nur von der Form der Berandung abhängen, nicht aber von den Randwerten und von ρ.

Dies gelingt mit Hilfe der Technik Greenscher Funktionen. Wir führen entsprechend (3.25) die Greensche Funktion $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ ein, welche der Poissonschen Differentialgleichung genügt:

$$\nabla^2_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{B}. \tag{3.50}$$

Eine Lösung ist, wie schon im Abschnitt 3.3.2 gezeigt wurde, $G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ($= G^0(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$, wie in den Übungen zu zeigen sein wird). Dies ist aber nicht die einzige Lösung von (3.50); weitere Lösungen finden wir mit

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + F(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \qquad \nabla^2 F(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0,$$

wobei $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ eine beliebige Funktion ist, welche die homogene Poissonsche Gleichung erfüllt.

Wir verwenden nun, wie schon zu Beginn dieses Kapitels in Abschnitt 3.6.1 die zweite Greensche Identität und setzen $\alpha = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ und $\beta = \phi(\mathbf{r})$, für die die gesuchte Lösung des Problemes. Damit entspricht $\phi(\mathbf{r})$ notwendig den Randbedingungen. Es gilt

$$\int_{\mathbb{B}} dV'\,\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right] =$$

$$\int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA'\,\left\{G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left[\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}')\right]\mathbf{n}' - \phi(\mathbf{r}')\left[\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\mathbf{n}'\right\}$$

Wir verwenden nun

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}') \\
\nabla^2_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

und erhalten unmittelbar

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{\varepsilon_0}\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \ldots$$

oder

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{B}} dV'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') + \varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \ldots \tag{3.51}$$

Damit ist die Lösung des Problemes aufgefunden, obwohl $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ eine beliebige Lösung von (3.50) ist. Die Randwerte kommen über das Flächenintegral durch Vorgabe von $[\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}')]\,\mathbf{n}'$ **und** $\phi(\mathbf{r}')$ am Rand in die Rechnung. Der Nachteil besteht zunächst darin, daß $[\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}')]\,\mathbf{n}'$ und $\phi(\mathbf{r}')$ am Rand bekannt sein müssen. Von diesem Problem kann man sich aber befreien:

(1) **Dirichletsche Randbedingungen:**
Hier bestimmen wir $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ derart, daß die Greensche Funktion der Bedingung

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv 0, \qquad \mathbf{r}' \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}} \tag{3.52}$$

genügt. G ist damit eine Lösung der Poissonschen Differentialgleichung, welche am Rand $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ verschwindet. Sie hängt somit nicht von ρ oder den Randwerten ab! Aus (3.51) folgt dann:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{B}} dV'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA'\, \phi(\mathbf{r}')\,[\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\,\mathbf{n}'.$$

(2) **Neumannsche Randbedingungen:**
Hier wäre man versucht $[\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\,\mathbf{n}' = 0$, $\mathbf{r}' \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ zu fordern. Es folgt aber aus

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
\int_{\mathbb{B}} dV'\, \nabla^2_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV'\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
\int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA'\, \underbrace{[\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\,\mathbf{n}'}_{=0} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Man wählt hingegen:

$$[\nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\mathbf{n}' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{A(\mathcal{S}_{\mathbb{B}})}, \qquad \mathbf{r}' \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}},$$

mit $A(\mathcal{S}_{\mathbb{B}})$ dem Flächeninhalt der Grenzfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{B}} dV'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') + \varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(\mathbf{r}')\right)\mathbf{n}' \\ &\quad + \frac{1}{A(\mathcal{S}_{\mathbb{B}})}\int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA'\,\phi(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Das letzte Integral gibt einen konstanten Beitrag, welcher keinen Einfluß auf das **E**-Feld hat.

Schließlich sei noch bemerkt, daß für $\mathbb{B} = \mathbb{R}^3$ $1/A(\mathcal{S}_{\mathbb{B}}) = 0$ wird, und in diesem Fall wird $[\nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\mathbf{n}' = 0$ wieder als Randbedingung möglich.

Es ist damit gelungen die Lösung des allgemeinen elektrostatischen Randwertproblemes auf die Lösung eines wesentlich einfacheren, nur von der Form des Bereiches $\mathbb{B}$ abhängigen Randwertproblemes für die Greensche Funktion zurückzuführen - und dies ist bereits schwierig genug!

Vielfach genügt jedoch die Kenntnis der freien Lösung. Das womit man sich häufig zufrieden gibt, ist eine gute Näherungslösung mit einer überschaubaren, also kontrollierbaren Ungenauigkeit. Die Voraussetzung hiefür ist, daß die von den Rändern hervorgerufenen Effekte klein sind gegenüber jenen, welche von den betrachteten Ladungen hervorgerufen werden. Wir werden uns also darauf beschränken Aussagen in Raumgebieten zu machen, die den Ladungen wesentlich näher liegen als den Rändern. (Ausgenommen hievon sind natürlich hochsymmetrische Probleme.)

3.7 Der elektrische Dipol

Unter einem elektrischen Dipol versteht man eine Ladungsverteilung, die aus zwei gleich großen, ungleichnamigen Punktladungen $+q$ und $-q$ besteht, welche im statischen Fall durch einen festen Abstand $|\mathbf{s}|$ (Abb. 3.4) von einander getrennt sind. Das elektrostatische Potential im Raumpunkt *(Aufpunkt)* $\mathbf{r}$ findet man aus Gleichung (3.21) nach Anwendung des Superpositionsgesetzes:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}\right). \tag{3.53}$$

Wir wollen jetzt die **Fernfeldnäherung** untersuchen. Dazu nehmen wir an, daß

$$|\mathbf{r}-\mathbf{a}| \gg |\mathbf{s}|, \qquad |\mathbf{r}-\mathbf{b}| \gg |\mathbf{s}|$$

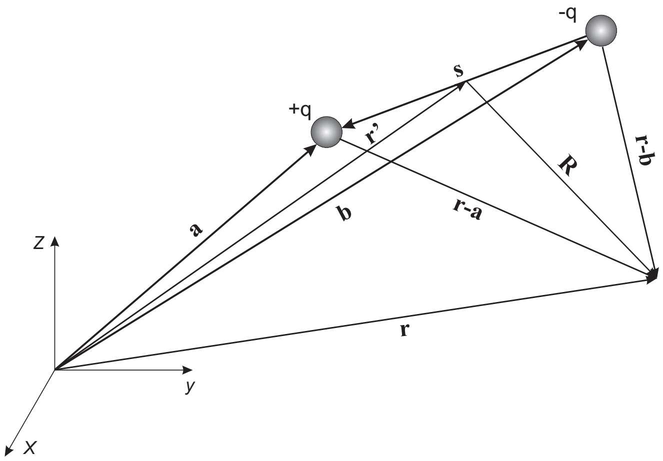


Abbildung 3.4: Der elektrische Dipol.

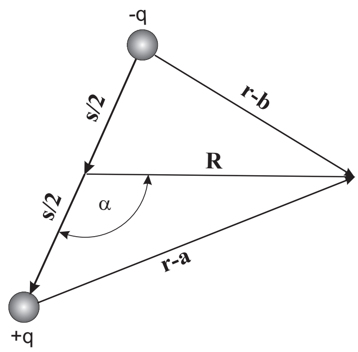


Abbildung 3.5: Geometrie zum elektrischen Dipol.

gelte. Wir schreiben nun die Brüche innerhalb der runden Klammern von (3.53) unter Verwendung von Abb. 3.5 um. Es folgt weiter:

$$\mathbf{r}-\mathbf{a}=\mathbf{R}-\frac{1}{2}\mathbf{s}, \qquad \mathbf{r}-\mathbf{b}=\mathbf{R}+\frac{1}{2}\mathbf{s},$$

und daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{R}\pm\frac{1}{2}\mathbf{s}|^2 &= \left(\mathbf{R}\pm\frac{1}{2}\mathbf{s}\right)\left(\mathbf{R}\pm\frac{1}{2}\mathbf{s}\right)\\
&= R^2+\frac{s^2}{4}\pm\mathbf{sR}\\
&= R^2+\frac{s^2}{4}\pm sR\cos\alpha\\
&= R^2\left[1\pm\frac{s}{R}\cos\alpha+\frac{1}{4}\left(\frac{s}{R}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Damit finden wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{R} \pm \frac{1}{2}\mathbf{s}|} &= \frac{1}{R}\left[1 \pm \frac{s}{R}\cos\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{s}{R}\right)^2\right]^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{R}\left[1 \mp \frac{1}{2}\frac{s}{R}\cos\alpha\right]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Damit erhalten wir aus (3.53) folgende Näherung für das elektrostatische Potential:

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{s}{R^2}\cos\alpha, \qquad |\mathbf{s}| \ll |\mathbf{R}|. \tag{3.55}$$

Wir definieren nun das **elektrische Diplomoment** als

$$\mathbf{p} = q\,\mathbf{s}, \tag{3.56}$$

mit der Dimension (Cm). Dann folgt für das elektrostatische Potential

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pR}}{R^3}, \qquad |\mathbf{s}| \ll |\mathbf{R}| \tag{3.57}$$

und weiters das **E**-Feld:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) \\ &\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\mathbf{pR}}{R^3}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^3}\nabla(\mathbf{pR}) + (\mathbf{pR})\nabla\frac{1}{R^3}\right].\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\nabla\frac{1}{R^3} = -\frac{3}{R^4}\frac{\mathbf{R}}{R}, \qquad \nabla(\mathbf{pR}) = \mathbf{p}$$

und wir erhalten:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3}\left[\frac{3}{R^2}(\mathbf{pR})\,\mathbf{R} - \mathbf{p}\right], \qquad |\mathbf{s}| \ll |\mathbf{R}|. \tag{3.58}$$

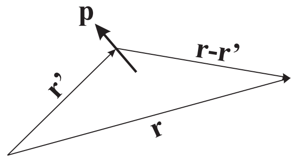
Führt man nun den Ortsvektor $\mathbf{r}'$ zum Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punktladungen ein (Abb. 3.4), dann erhält man in der Fernfeldnäherung wegen $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$:

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{3.59}$$

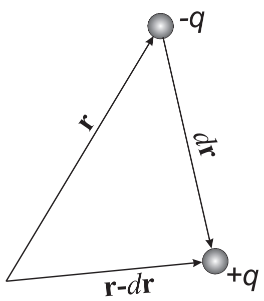
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\left\{3\frac{[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - \mathbf{p}\right\}, \tag{3.60}$$

für $|\mathbf{s}| \ll |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$.

Aus Gründen der mathematischen Vereinfachung ist es oft nützlich einen endlich ausgedehnten elektrischen Dipol durch das Modell des **elektrischen Punktdipols** zu ersetzen. Ausgehend vom zuvor besprochenen endlichen Dipol läßt man bei der Modellbildung einerseits $s \to 0$ und andererseits $q \to \infty$ gehen, wobei aber das elektrische Dipolmoment (3.56) konstant bleibt. Dieses befinde sich nun am Raumpunkt $\mathbf{r}'$, und damit sind die Fernfeldlösungen im Raumpunkt $\mathbf{r}$ durch (3.59) und (3.60) ohne die Einschränkung $|\mathbf{s}| \ll |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ gegeben und nunmehr *exakte* Ausdrücke.



Wir wollen nun die mechanischen Eigenschaften des Punktdipols im elektrostatischen Feld untersuchen. Man vereinfacht die Ableitung, indem man annimmt, daß die beiden Punktladungen den Abstand $d\mathbf{r}$ haben, welcher infinitesimal klein sei. Der Betrag der Punktladungen ist dann "sehr groß", sodaß das elektrische Dipolmoment $\mathbf{p} = q\, d\mathbf{r}$ einen endlichen Wert annimmt. Gemäß (2.31) gilt dann:



$$\begin{aligned} \mathbf{F_p}(\mathbf{r}) &= q\mathbf{E}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})\right] = q\, d\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

da $\mathbf{E}(\mathbf{r}+d\mathbf{r})-\mathbf{E}(\mathbf{r})$ definitionsgemäß das totale Differential $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$ der vektoriellen Feldgröße $\mathbf{E}$ am Ort $\mathbf{r}$ darstellt. Für das totale Differential gilt wiederum

$$\{d\mathbf{E}(\mathbf{r})\}_i = \sum_{k=1}^{3} dx_k \frac{\partial E_i(\mathbf{r})}{\partial x_k}$$

bzw.

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (d\mathbf{r}\nabla)\, \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

und damit folgt für die Kraft auf den elektrischen Punktdipol am Ort $\mathbf{r}$ mit dem Diplomoment $\mathbf{p}$ im $\mathbf{E}$-Feld nach (3.61):

$$\begin{aligned} \mathbf{F_p}(\mathbf{r}) &= (\mathbf{p}\nabla)\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \nabla\left(\mathbf{pE}(\mathbf{r})\right) = \mathrm{grad}\left(\mathbf{pE}(\mathbf{r})\right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

wobei die Beziehung $\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ Anwendung fand. Wir sehen aus (3.62), daß nur dann eine Kraft auf den Punktdipol wirken kann, wenn das $\mathbf{E}$-Feld inhomogen (also ortsabhängig) ist. Weiters ist $\mathbf{F_p}(\mathbf{r})$ **konservativ** und kann daher als negativer Gradient der potentiellen Energie $U_\mathbf{p}(\mathbf{r})$ des Punktdipols geschrieben werden:

$$\mathbf{F_p}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}U_\mathbf{p}(\mathbf{r}), \qquad U_\mathbf{p}(\mathbf{r}) = -\mathbf{pE}(\mathbf{r}). \quad (3.63)$$

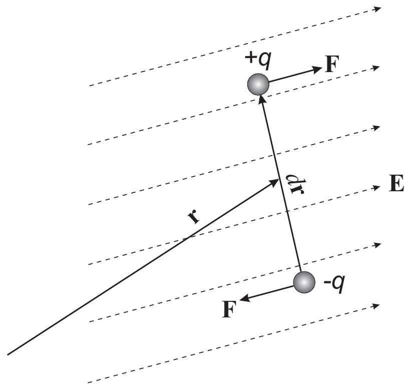


Abbildung 3.6: Drehmoment eines elektrischen Punktdipols im **E**-Feld.

Die potentielle Energie des elektrischen Punktdipols ist also minimal (maximal), wenn der Dipol parallel (antiparallel) zum **E**-Feld steht. Deswegen wird der elektrische Punktdipol ein **Drehmoment** erfahren, das ihn in die energetisch günstigste Lage ($U_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = -|\mathbf{p}|\,|\mathbf{E}|$) zu drehen versucht. Zur Bestimmung dieses Drehmomentes berechnen wir die Kraft, welche auf die einzelnen Punktladungen wirkt (Abb. 3.6):

$$\mathbf{F}_{\pm\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \pm q\mathbf{E}\left(\mathbf{r} \pm \frac{d\mathbf{r}}{2}\right) \approx \pm q\,\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Das Drehmoment $\mathbf{M}_{\pm\mathbf{q}}$, welches auf die einzelnen Ladungen wirkt, findet man dann über:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\pm\mathbf{q}}(\mathbf{r}) &= \pm\frac{d\mathbf{r}}{2} \times \mathbf{F}_{\pm\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \\
&= \pm\frac{d\mathbf{r}}{2} \times (\pm q\,\mathbf{E}(\mathbf{r})) \\
&= \frac{1}{2}\,(q d\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Damit folgt für das Drehmoment $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}$, welches ein elektrischer Punktdipol im **E**-Feld erfährt:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{3.64}$$

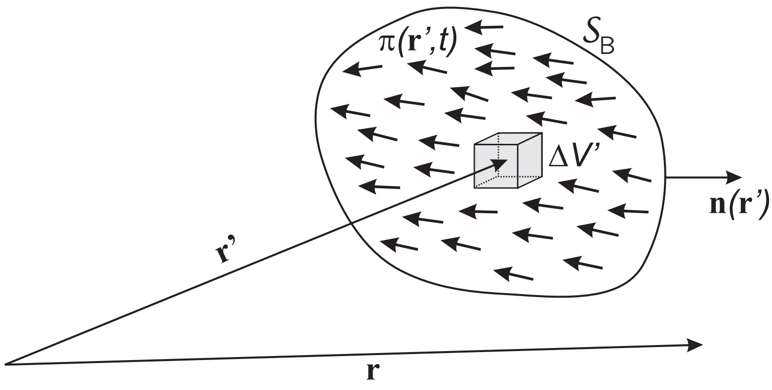


Abbildung 3.7: Zur Bestimmung des elektrostatischen Potentiales einer räumlichen elektrischen Dipolverteilung $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t)$.

3.8 Räumliche Verteilungen von elektrischen Punktdipolen

Wir definieren in völliger Analogie zu (2.4) die **elektrische Dipoldichte** $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t)$ als den Grenzwert

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}(\mathbf{r},t)}{\Delta V},\tag{3.65}$$

welche somit die Einheit (Cm^{-2}) hat. Da aufgrund dieser Definition das elektrische Dipolmoment in einem endlichen Volumen ΔV um den Punkt $\mathbf{r}$ durch $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t)$ gegeben ist, folgt weiters

$$\mathbf{p}(t)=\int_{\mathbb{B}} dV\,\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t)\tag{3.66}$$

für das Gesamtdipolmoment im Bereich $\mathbb{B}$.

Wir nehmen nun an, daß im Bereich $\mathbb{B}$ eine lokalisierte, zeitunabhängige Dipoldichte $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')$, $\mathbf{r}'\in\mathbb{B}$ gegeben sei (Abb. 3.7). Mit dem Volumselement $\Delta V'$ ist das Dipolmoment $\Delta V'\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')$ assoziiert und damit finden wir wegen (3.59) das elektrostatische Potential im Punkte $\mathbf{r}$:

$$\Delta\phi(\mathbf{r})\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\Delta V'.$$

Je kleiner nun $\Delta V'$ wird, umso genauer wird dieses Ergebnis und im infinitesimalen Grenzfall $\Delta V'\to dV'$ wird es exakt. Somit finden wir das von $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')$ im Raumpunkt $\mathbf{r}$ erzeugte Potential über

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{B}} dV'\,\frac{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

und mit

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{B}} dV' \, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{B}} dV' \left[\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \, \frac{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')\mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit (3.27) für eine Raumladung $\rho(\mathbf{r})$ und eine Flächenladungsdichte $\eta(\mathbf{r})$ auf der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$, so gilt:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \, \frac{\eta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.67}$$

und können uns vorstellen, daß das elektrostatische Potential einer Dipolverteilung aus der Überlagerung einer Raumladungsdichte

$$\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{div}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})$$

und einer Flächenladungsdichte auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$

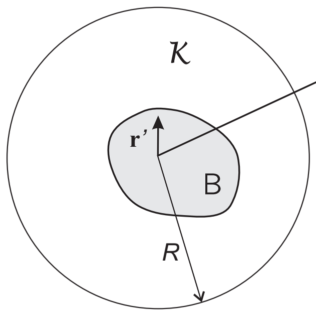
$$\eta_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})$$

entstanden ist. Dann folgt aus (3.29) für das $\mathbf{E}$-Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \, \eta_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{B}} dV' \, \rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

3.9 Die Multipolentwicklung

Häufig interessiert man sich für die Gestalt des elektrostatischen Potentiales einer räumlich beschränkten Ladungsverteilung weit außerhalb des von



Ladungen erfüllten Raumbereiches $\mathbb{B}$. Wir legen den Koordinatenursprung in den ladungserfüllten Raumbereich $\mathbb{B}$ und umgeben ihn mit einer Kugel $\mathcal{K}$ vom Radius R, sodaß der Außenraum von $\mathcal{K}$ mit Sicherheit ladungsfrei ist. Für jeden Punkt dieses Außenraumes gilt $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$, $\mathbf{r}' \in \mathbb{B}$. Es liegt dann nahe, die Greensche Funktion in eine Taylorreihe nach $\mathbf{r}'$ zu entwickeln:

$$\begin{aligned} G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= G^0(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} G^0(\mathbf{r}) x_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G^0(\mathbf{r}) x_i' x_j' \mp \ldots \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_\ell=1}^{3} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} G^0(\mathbf{r}) x_{i_1}' \cdots x_{i_\ell}'. \end{aligned}$$

Wir setzen diese Reihe in das Poisson-Integral (3.26) ein und vertauschen Summation mit Integration, was zulässig ist, da die Reihe unter den gegebenen Voraussetzungen gleichmäßig gegen $G^0(\mathbf{r})$ konvergiert; wir erhalten:

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_\ell}^{3} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} \int_{\mathbb{B}} dV' \, \rho(\mathbf{r}') x_{i_1}' \cdots x_{i_\ell}'.$$

Es treten hier zunächst Größen $\partial^\ell G^0(\mathbf{r})/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}$ auf, welche nur vom Aufpunkt $\mathbf{r}$, nicht aber von der Ladungsverteilung abhängen. Weiters treten Integrale

$$\mathcal{I}_{i_1 \ldots i_\ell} = \int_{\mathbb{B}} dV' \, \rho(\mathbf{r}') x_{i_1}' \cdots x_{i_\ell}' \tag{3.68}$$

auf, welche nur von $\rho(\mathbf{r}')$ nicht aber vom Aufpunkt abhängig sind. Somit stellt

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_\ell}^{3} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \mathcal{I}_{i_1 \ldots i_\ell} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} \tag{3.69}$$

eine Form dar, in der die Einflüsse der Quellen gänzlich von der Lage des Aufpunktes separiert sind. Wir erhalten nun für die Ableitungen von $G^0(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \ell &= 0 : & G^0(\mathbf{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{1}{|\mathbf{r}|} \\ \ell &= 1 : & \tfrac{\partial G^0(\mathbf{r})}{\partial x_i} &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{\partial}{\partial x_i} \tfrac{1}{|\mathbf{r}|} = -\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{x_i}{|\mathbf{r}|^3} \\ \ell &= 2 : & \tfrac{\partial^2 G^0(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{\partial}{\partial x_j} \tfrac{x_i}{|\mathbf{r}|^3} = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{3x_i x_j - |\mathbf{r}|^2 \delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^5}. \end{aligned}$$

Der ℓ-te Term wird also aus einem isotropen (richtungsunabhängigen) Faktor $r^{-(2\ell+1)}$ und aus einer speziellen Form ℓ-ten Grades in den Komponenten von

$\mathbf{r}$ bestehen. Folglich gilt:

$$\left| r^{\ell+1} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} \right| \leq C, \qquad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0},$$

und der ℓ-te Term verschwindet für $|\mathbf{r}| \to \infty$ wie $r^{-(\ell+1)}$. $\phi(\mathbf{r})$ selbst verschwindet aber für $|\mathbf{r}| \to \infty$ nicht langsamer als der $\ell = 0$ Term, also wie $|\mathbf{r}|^{-1}$.

Wir haben gesehen, daß die Ableitungen von $G^0(\mathbf{r})$ doch recht kompliziert werden, während die Koeffizienten $\mathcal{I}$ eine einfache Struktur besitzen. Das ist sicher ungeschickt, da man meist vor dem Problem steht das Potential an vielen Aufpunkten für eine gegebene Ladungsverteilung bestimmen zu müssen. Man hätte also lieber eine Form, welche in den Koordinaten des Aufpunktes einfach ist, und man würde dafür Komplikationen in den quellabhängigen Termen in Kauf nehmen, da diese nur einmal zu bestimmen sind. Man strebt also eine Form

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \frac{1}{|\mathbf{r}|^{2\ell+1}} \mathcal{Q}^\ell_{i_1 \ldots i_\ell} x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$$

an, welche leicht zu erhalten ist. Man erkennt zunächst unmittelbar (zumindets für $\ell = 0, 1, 2$), daß

$$r^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} x'_{i_1} \cdots x'_{i_\ell}$$

eine genüber der Vertauschung $x_i \longleftrightarrow x'_i$ symmetrische Form ist. Folglich gilt:

$$r^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} x'_{i_1} \cdots x'_{i_\ell} = r'^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r}')}{\partial x'_{i_1} \cdots \partial x'_{i_\ell}} x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$$

und daraus folgt

$$\mathcal{Q}_{i_1 \ldots i_\ell} = 4\pi\varepsilon_0 (-1)^\ell \int_{\mathbb{B}} dV' \, \rho(\mathbf{r}') r'^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r}')}{\partial x'_{i_1} \cdots \partial x'_{i_\ell}}.$$

Die Koeffizienten $\mathcal{Q}_{i_1 \ldots i_\ell}$ heißen **Multipolmomente** der Ladungsverteilung.

Wir erhalten etwa das **Monopolmoment** $\mathcal{Q}^0$ mit

$$\mathcal{Q}^0 = \int_{\mathbb{B}} dV' \, \rho(\mathbf{r}') = Q,$$

und wir sehen, daß es durch die Gesamtladung der Ladungsverteilung bestimmt ist. Sein Beitrag zum Potential $\phi(\mathbf{r})$ ist das Monopolpotential $Q/4\pi\varepsilon_0 r$

und entspricht gerade dem Coulombpotential einer im Koordinatenursprung fixierten Punktladung Q.

Das **Dipolmoment** $\mathcal{Q}^1$ besitzt drei Komponenten,

$$\mathcal{Q}_i^1 = \int_{\mathbb{B}} dV'\, x_i' \rho(\mathbf{r}') = \{\mathbf{p}\}_i\,,$$

welche man als die drei Komponenten eines Vektors $\mathbf{p}$ auffassen kann. Sein Beitrag zum Potential ist das **elektrische Dipolpotential**

$$\phi^1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{|\mathbf{r}|^3}, \tag{3.70}$$

und dies entspricht dem Ergebnis (3.59) für einen im Koordinatenursprung fixierten Punktdipol mit dem elektrischen Dipolmoment $\mathbf{p}$. Wir können aus diesem Ergebnis schließen, daß der in Kapitel 3.7 eingeführte Punktdipol eine Ladungsverteilung repräsentiert, für welche alle anderen Multipolmomente verschwinden.

3.10 Materie im elektrostatischen Feld

Wir betrachten zwei idealisierte Typen von Materie: den idealen Leiter und das ideale Dielektrikum.

3.10.1 Der ideale Leiter

Definition 3.1
Ideale Leiter *sind materielle Gegenstände, welche nur* **frei bewegliche Ladungen** *besitzen.*

Wird ein solcher idealer Leiter in ein elektrostatisches Feld gebracht, so wirken auf die freien Ladungen Kräfte, welche die Ladungen so lange verschieben, bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt. Das $\mathbf{E}$-Feld der verschobenen Ladungen addiert sich dann zum ursprünglichen $\mathbf{E}$-Feld.

Im Leiterinneren existiere nun die Ladungsdichte ρ_L und das Feld $\mathbf{E}_L$. Nach Erreichen des Gleichgewichtszustandes sind folgende vier Möglichkeiten offen:

(1) $\rho_L \neq 0, \quad \mathbf{E}_L \neq 0$

(2) $\rho_L \neq 0, \quad \mathbf{E}_L = 0$

(3) $\rho_L = 0, \quad \mathbf{E}_L \neq 0$

(4) $\rho_L = 0, \quad \mathbf{E}_L = 0$

ad (1): dies steht in Widerspruch zum Theorem von EARNSHAW (klassische Mechanik), welches besagt, daß sich eine elektrische Ladung im **E**-Feld nicht im stabilen Gleichgewicht befinden kann.
ad (2): steht in Widerspruch zu (3.22) und (3.38): $0 = \mathrm{div}\mathbf{E}_L = \rho_L/\varepsilon_0 \neq 0$.
ad (3): ist verträglich mit den Feldgleichungen (3.22), nur muß wegen $\mathrm{div}\mathbf{E}_L = 0$ ein Vektorfeld $\mathbf{A}_L$ existieren, sodaß $\mathbf{E}_L = \mathrm{rot}\mathbf{A}_L$ gilt.
ad (4): ist ebenfalls mit (3.22) verträglich.

Es müssen sich somit die frei beweglichen Ladungen an der **Oberfläche** des idealen Leiters befinden (er hat dann definitionsgemäß Ladungen, aber $\rho_L = 0$). Damit muß an der Oberfläche des Leiters die Tangentialkomponente des **E**-Feldes verschwinden, da sonst Kräfte auf die Ladungen ausgeübt würden und dann kein Gleichgewichtszustand herrschen könnte. Also: das **E**-Feld an der Oberfläche des idealen Leiters steht **senkrecht** zur Oberfläche. Wegen (3.6) und (2.27) ist auch offensichtlich, daß das **E**-Feld senkrecht zu den Äquipotentialflächen des elektrostatischen Feldes ϕ steht. Damit muß die Oberfläche eines idealen Leiters eine Äquipotentialfläche sein.

Umfaßt der ideale Leiter ein Gebiet $\mathbb{B}_L$, so muß die Laplacegleichung

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{B}_L \tag{3.71}$$

gelten und damit folgt wegen der Notwendigkeit, daß die Oberfläche des idealen Leiters eine Äquipotentialfläche sein muß

$$\phi(\mathbf{r}) = konst, \qquad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}_L} \tag{3.72}$$

und wegen (3.71) folgt $\phi(\mathbf{r}) = konst, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{B}_L$. Der gesamte ideale Leiter ist somit ein Äquipotentialbereich und damit kann der Fall (3) ausgeschlossen werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{B}_L. \tag{3.73}$$

Die sich an der Oberfläche befindlichen Ladungen werden durch die Flächenladungsdichte $\eta(\mathbf{r})$ beschrieben. Ist nun $\boxed{1}$ der Außenraum und $\boxed{2}$ der Innenraum ($\mathbb{B}_L$), so gilt für jedes $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}_L}$ wegen (3.41) und (3.73):

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\,\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0},$$

womit das **E**-Feld an der Oberfläche des idealen Leiters bestimmt ist. Andererseits gilt auch, da $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})$ senkrecht zur Oberfläche steht:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\eta(\mathbf{r})\,\mathbf{n}(\mathbf{r}).$$

3.10.2 Das ideale Dielektrikum

Definition 3.2
Ideale Dielektrika *sind materielle Gegenstände, die* **keine frei beweglichen Ladungen** *besitzen.*

Man geht von der Modellvorstellung der **dielektrischen Polarisiation** aus. Die Basis ist die Vorstellung, daß jede Materie aus positiv geladenen Atomkernen und negativ geladenen Elektronen aufgebaut ist. Bringt man nun ein solches Dielektrikum in ein **E**-Feld, so kommt es zu einer räumlichen Umverteilung der beiden elektrisch geladenen Bauteilsorten - die dielektrische Polarisation. Man unterscheidet zwei Mechanismen:

(i) **Die Verschiebungspolarisation:** im Atom oder Molekül wird infolge der Verschiebung der positiven und negativen Ladungen ein Dipolmoment induziert.

(ii) **Die Orientierungspolarisation:** es werden Moleküle mit einem permanenten (also auch ohne äußeres **E**-Feld vorhandenen) Dipolmoment im **E**-Feld ausgerichtet.

Im Gleichgewicht weist dann das polarisierte Dielektrikum eine große Anzahl von mikroskopischen Dipolen (Punktdipolen) auf, welche ihrerseits ein **E**-Feld erzeugen, das sich zum äußeren Feld addiert.

Zur makroskopischen Charakterisierung des idealen Dielektrikums beschreibt man die dielektrische Polarisation nicht durch die Dipolmomente der einzelnen Atome (Moleküle) sondern mit Hilfe einer elektrischen Dipoldichte **P**, dem **Vektor der (dielektrischen) Polarisation**.

3.10.3 Elektrostatik im idealen Dielektrikum

Man findet die Feldgleichungen als Synthese der Feldgleichungen für das Vakuum (3.24) und (3.30) mit der in Abschnitt 3.10.2 beschriebenen Modellbildung. Wir betrachten daher ein dielektrisches Gebiet $\mathbb{B}_D$, welches sich im Feld einer Raumladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathbb{B}_\rho$ befindet (Abb. 3.8). Die Reaktion des Dielektrikums auf das von der Raumladungsverteilung erzeugte Feld sei dabei durch einen Vektor **P** beschrieben. Aufgrund von (3.27) und (3.67) folgt:

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) \quad = \quad & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathbb{B}_\rho} dV' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \\
& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathbb{B}_D} dV'' \, \frac{\rho_D(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}_D}} dA'' \, \frac{\eta_D(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}
\end{aligned}
$$

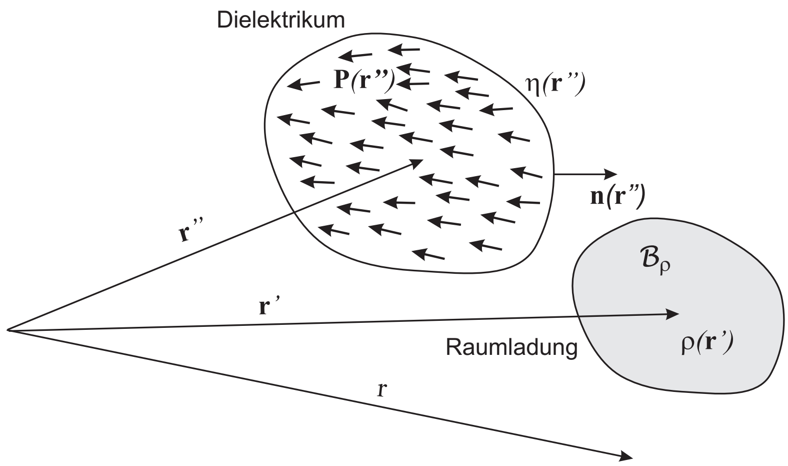


Abbildung 3.8: Ideales Dielektrikum im **E**-Feld einer Raumladungsverteilung.

mit

$$\rho_D(\mathbf{r}) = -\mathrm{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}), \qquad \eta_D(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}), \tag{3.74}$$

den mit **P** korrespondierenden Raum- und Flächenladungen entsprechend den Ergebnissen von Abschnitt 3.8. Oft bezeichnet man die zu $\rho(\mathbf{r})$ gehörenden Ladungen als *frei*, während die zu $\rho_D(\mathbf{r})$ und $\eta_D(\mathbf{r})$ gehörenden *gebunden* sind. Es folgen nun die Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho(\mathbf{r}) + \rho_D(\mathbf{r})\right] \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho(\mathbf{r}) + \mathrm{div}\mathbf{P}(\mathbf{r})\right]$$

oder

$$\rho(\mathbf{r}) = \mathrm{div}\left[\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})\right]. \tag{3.75}$$

Ein Vergleich mit (3.2) legt die Einführung eines dielektrischen **D**-Feldes

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.76}$$

nahe, mit der Dimension (Cm^{-2}). Somit lauten die Feldgleichungen der Elektrostatik bei Anwesenheit eines idealen Dielektrikums:

$$\mathrm{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{3.77}$$

oder in integraler Form:

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV\,\mathrm{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}\,\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbb{B}} dV\,\rho(\mathbf{r}), \tag{3.78}$$

was dem Gaußschen Gesetz (3.38) entspricht. Das Faradaysche Gesetz (3.39) bleibt offensichtlich unverändert.

Die Gleichungen (3.76) und (3.77) reichen offensichtlich nicht aus die Felder $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ zu bestimmen. Man benötigt detaillierte Informationen über den Vektor $\mathbf{P}$. Hier treten die speziellen Eigenschaften des Dielektrikums in Erscheinung, denn in welchem Ausmaß ein Dielektrikum eine makroskopische Polarisation erfährt, hängt nicht nur vom polarisierenden Feld sondern auch von der Natur des Materiales ab. Man wird aber im allgemeinen

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{E}(\mathbf{r}))$$

schreiben können. Stimmt nun die Richtung von $\mathbf{P}$ mit der von $\mathbf{E}$ überein, so folgt

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \kappa_e(\mathbf{E}(\mathbf{r}))\mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

wobei mit $\kappa_e(\mathbf{E}(\mathbf{r}))$ die **statische dielektrische Suszeptibilität** eingeführt wurde. Ist $\kappa_e(\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \kappa_e(\mathbf{r})$, so ist das Dielektrikum **linear**. Damit gilt für lineare Dielektrika:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \kappa_e(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [\varepsilon_0 + \kappa_e(\mathbf{r})]\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Man führt nun die dimensionslose **statische Dielektrizitätskonstante**

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\kappa_e(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

ein, und findet die Feldgleichungen

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad \mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho(\mathbf{r}), \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,$$

wenn man annimmt, daß $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon = \mathit{konst}$ gilt, also das Dielektrikum **homogen** ist. Man kann nun das Vakuum als Dielektrikum mit $\varepsilon = 1$ interpretieren, und man sieht, daß sich alle bisher für das Vakuum aufgefundenen Ergebnisse auf lineare, homogene Dielektrika übertragen lassen, indem ε_0 durch $\varepsilon\varepsilon_0$ ersetzt wird.

3.10.4 Stetigkeitsbedingungen

Die Stetigkeitsbedingungen können in völliger Analogie zu Abschnitt 3.4 abgeleitet werden, was aus der Analogie von (3.78) und (3.38) folgt. Die Bereiche $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ von Abb. 3.2 sind nun mit Dielektrika erfüllt, welche durch unterschiedliche Werte von ε charakterisiert sind. Es folgt dann die Stetigkeitsbedingung für die Normalkomponente des $\mathbf{D}$-Feldes in Analogie zu (3.41)

$$\left[\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\,\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r}). \tag{3.79}$$

Für die Tangentialkomponenten des $\mathbf{E}$-Feldes gilt unverändert (3.42). Es ist somit $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})$ in jedem Punkt der Trennfläche parallel zum Flächennormalvektor und man kann (3.42) durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right] = \mathbf{0}$$

ausdrücken.

Sind die Dielektrika in $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ lineare Medien und sind auf der Grenzfläche keine Flächenladungen enthalten ($\eta(\mathbf{r}) = 0$), so erhalten wir aus (3.79) und (3.42)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_2 \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Wir können nun ein Dielektrikum durch einen idealen Leiter mit $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0$ ersetzen. Da in seinem Inneren auch keine Ladungen vorkommen, gilt weiters $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0$ und damit ist auch $\mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0$. Es treten aber an der Oberfläche des Leiters freie Flächenladungen auf, welche durch die Flächenladungsdichte $\eta(\mathbf{r})$ beschrieben werden. Man findet dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \eta(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Für ein lineares Medium findet man schließlich an der Oberfläche des Leiters:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\varepsilon_1(\mathbf{r})\varepsilon_0}\mathbf{n}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in \mathcal{A},$$

entsprechend Abb. 3.2.