Kapitel 4

Magnetostatik

4.1 Die Grundgleichungen im Vakuum

Wie bereits in Abschnitt 3.1 folgen aus der Forderung (3.1) die Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} \tag{4.1}$$

bzw.

$$\phi_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}}(\mathbf{B}) = \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}\,\mathbf{B} = 0, \tag{4.2}$$

$$Z_{C_{\mathcal{A}}}(\mathbf{H}) = \int_{C_{\mathcal{A}}} d\mathbf{r}\,\mathbf{H} = \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\,\mathbf{j} = I_{\mathcal{A}}, \tag{4.3}$$

mit $\phi_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}}(\mathbf{B})$ als den Quellen des $\mathbf{B}$-Feldes und $Z_{C_{\mathcal{A}}}(\mathbf{H})$ der Zirkulation des $\mathbf{H}$-Feldes. Weiters ist wegen $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$ und wegen (2.23) auch $\partial\rho/\partial t = 0$, und somit folgt aufgrund der Kontinuitätsgleichung (2.21):

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0. \tag{4.4}$$

Es muß also in jedem endlichen Bereich gleich viel Strom zu- und abfließen; es darf im Endlichen keine Stromquellen geben. Weiters muß

$$\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = 0 \tag{4.5}$$

gelten, denn sonst würde aus $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$ folgen, daß mit $\partial\mathbf{j}/\partial t \neq 0$ auch $\partial\mathbf{H}/\partial t \neq 0$ wäre, was mit der Forderung (4.1) unvereinbar wäre, da $\mathbf{H}$ dann wegen (2.26) an ein $\mathbf{E}$-Feld gekoppelt sein müßte, da im Vakuum $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ über

$$\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{B} \tag{4.6}$$

einander proportional sind, wobei mit μ_0 die **Induktionskonstante** eingeführt wurde.

Wenn wir nun kurz über Dimensionen sprechen wollen, so sehen wir aus (4.3) unmittelbar, daß die Einheit des **H**-Feldes mit Am^{-1} gegeben ist. Die Dimension von **B** entnehmen wir (2.26) mit Vsm^{-2} oder **Tesla** (T) nachdem wir ja bereits für das **E**-Feld die Einheit Vm^{-1} gefunden hatten. Für den **Fluß** des **B**-Feldes durch eine Fläche finden wir dann die Einheit Vs oder **Weber** (Wb). Dann folgt die Einheit von μ_0 unmittelbar mit $\mathrm{Vs(Am)}^{-1}$. Das Produkt $\mu_0\varepsilon_0$ hat dann die Dimension $(\mathrm{As/Vm})(\mathrm{Vs/Am}) \mathrel{\hat{=}} \mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}$, also die einer inversen Geschwindigkeit zum Quadrat. Nachdem entweder ε_0 oder μ_0 willkürlich festlegbar sind, vereinbart man

$$\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c_0^{-1}, \tag{4.7}$$

mit c_0 der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Man legt nun μ_0 mit

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \tag{4.8}$$

fest. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{c_0^2\mu_0} = \frac{1}{4\pi\, c_0^2}10^7\,\frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{Vs}} \\ &= \frac{1}{4\pi \times 9}10^{-9}\,\frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{Vs}}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2} \approx 8.842 \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \end{aligned}$$

und wir sehen, daß dies nicht in Widerspruch zum Ergebnis für ε_0 aus dem Coulombgesetz, Seite 27, steht. Man könnte es im Prinzip sogar zur Messung der Lichtgeschwindigkeit heranziehen.

4.2 Formale Integration der magnetostatischen Gleichungen

Wir haben die Aufgabe die Differentialgleichungen

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j} \tag{4.9}$$

zu integrieren. Im Gegensatz zum elektrostatischen **E**-Feld, welches wirbel- aber nicht quellenfrei war, ist das **B**-Feld **quellenfrei**, besitzt aber die Stromdichte **j** als **Wirbeldichte** (4.3). (1) es gibt deshalb auch kein skalares Potential ψ mehr, aus welchem sich das **B**-Feld überall im Raum über $\mathbf{B} = -\mathrm{grad}\psi$ ableiten ließe. (2) immerhin gilt aber in jedem einfach zusammenhängenden Raumbereich $\mathbb{B}$, welcher nicht von Strömen durchflossen ist $\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathbf{0}$, und damit muß es dort ein skalares Potential ψ geben, aus welchem sich $\mathbf{B}$ als $\mathbf{B} = -\mathrm{grad}\psi$ ableiten läßt. Da universell $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ gilt, muß weiter in $\mathbb{B}$ die Laplace-Gleichung $\nabla^2\psi = 0$ erfüllt sein.

Allgemein können wir wie folgt vorgehen: da $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ universell gilt, muß es ein **Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$** derart geben, daß das $\mathbf{B}$-Feld als

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{4.10}$$

geschrieben werden kann. $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ muß aber noch eine zweite Gleichung befriedigen:

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mu_0\,\mathbf{j}$$

oder

$$-\nabla^2\mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} = \mu_0\,\mathbf{j}, \tag{4.11}$$

wobei diese Gleichung aber noch zu keiner Vereinfachung führt.

Aus Kapitel 3 erinnern wir uns, daß das skalare Potential eines Vektorfeldes nur bis auf Konstante bestimmt ist. Das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, aus welchem sich das $\mathbf{B}$-Feld als Rotation ergibt, ist jedoch noch mit einer viel weitergehenden Willkür behaftet. Wir können nämlich zu $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes $f(\mathbf{r})$ addieren:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}f(\mathbf{r}), \tag{4.12}$$

und erhalten durch Bildung der Rotation dasselbe $\mathbf{B}$-Feld wie zuvor:

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}f(\mathbf{r})}_{=0} = \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ sind somit als Vektorpotentiale *äquivalent*.

Satz 4.1 *Nehmen wir an, wir hätten irgendein* $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ *gefunden. Dann, so behaupten wir, gibt es zu diesem stets ein äquivalentes* $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ *derart, daß*

$$\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0 \tag{4.13}$$

erfüllt ist. Man spricht von **Coulomb Eichung**.

Es folgt ja aus (4.12) und (4.13) eine Gleichung für $f(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r}) &\stackrel{!}{=} 0\\
\mathrm{div}\left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}f(\mathbf{r})\right] &= 0\\
\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathrm{div}\,\mathrm{grad}f(\mathbf{r}) &= 0\\
\nabla^2 f(\mathbf{r}) &= -\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

wobei div$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ "gegeben" ist. (4.14) führt aber zu einem Possion-Integral (3.27), wenn wir ρ durch $\varepsilon_0$div$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ersetzen. Wir wissen auch bereits, daß das Poisson-Integral stets berechenbar ist, womit der Satz 4.1 bewiesen ist.

Man nennt nun die Transformation $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{r})$ eine **Eichtransformation** und das skalare Feld $f(\mathbf{r})$ ist das **Eichfeld**. Wir werden im Verlauf dieser Vorlesung noch andere Formen der Eichung kennenlernen.

Verwenden wir nun die Coulomb-Eichung (4.13) in (4.11), so folgt

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \, \mathbf{j}(\mathbf{r}),$$

und dies bedeutet, daß die Vektorkomponenten von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ die Poissonsche Gleichung

$$\nabla^2 A_i(\mathbf{r}) = -\mu_0 \, j_i(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3$$

erfüllen müssen. Damit gilt

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{j_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \int dV' \, G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') j_i(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

in Analogie zu (3.26). Wir fassen zusammen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mu_0 \varepsilon_0 \int dV' \, G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \tag{4.15}$$

mit $G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ der freien Greenschen Funktion aus der Elektrostatik.

Es muß nun noch bewiesen werden, daß das so bestimmte Feld tatsächlich auch der Coulomb-Eichung genügt, andernfalls würde wohl $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \, \mathbf{j}(\mathbf{r})$ erfüllt sein, nicht aber notwendiger Weise Gleichung (4.11), welche ja nur dann befriedigt ist, wenn $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ der Coulomb-Eichung entspricht. Wir bestimmen also:

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \varepsilon_0 \int dV' \, \nabla_{\mathbf{r}} \left[G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right].$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \left[\frac{\partial}{\partial x'} G^0(x - x', y - y', z - z'), \frac{\partial}{\partial y'} G^0(\cdots), \frac{\partial}{\partial z'} G^0(\cdots) \right] \\ &= \left[\frac{\partial G^0}{\partial (x - x')} \frac{\partial (x - x')}{\partial x'}, \ldots, \ldots \right] \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}} G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

und es folgt weiter

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} \left[G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] &= \left[\nabla_{\mathbf{r}'} G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}') + G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathrm{div} \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= -\left[\nabla_{\mathbf{r}} G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

wegen (4.4). Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu_0\varepsilon_0 \int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, \nabla_{\mathbf{r}} \left[G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right] \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= -\mu_0\varepsilon_0 \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}'\, G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wir können nun zwei Fälle unterscheiden:

(α) $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$ auf einem Bereich $\mathbb{I}$, wobei $\mathbb{I}$ beschränkt ist. Man kann dann $\mathbb{I} \subset \mathbb{B}$ so wählen, daß $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ auf $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ verschwindet und damit verschwindet das Oberflächenitengral (4.16) trivialer Weise.

(β) $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ erstreckt sich ins Unendliche und wir müssen über die unendlich ferne Kugeloberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}$ integrieren. Für jedes im Endlichen liegende $\mathbf{r}$ verschwindet $\lim_{\mathbf{r}'\to\infty} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ wie r'^{-1} und dann gilt (mit $\mathbf{R}' = R'\mathbf{n}$):

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\varepsilon_0 \lim_{R'\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_{R'}}} d\Omega'\, R'^2 G^0(\mathbf{r}-\mathbf{R}')\, \mathbf{j}(\mathbf{R}')\mathbf{n}.$$

Mit

$$G^0(\mathbf{r}-\mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}'|} \approx \frac{1}{R'}$$

und

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}')\mathbf{n} = j_n(R', \varphi, \vartheta)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\mu_0\varepsilon_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{R'\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_{R'}}} d\Omega'\, R'^2 \frac{1}{R'}\, j_n(R', \varphi, \vartheta) \\ &= \frac{1}{4\pi}\mu_0 \lim_{R'\to\infty} R' \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_{R'}}} d\Omega'\, j_n(R', \varphi, \vartheta). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nun gilt aber wegen (4.4)

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, \mathrm{div}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \lim_{R'\to\infty} R' \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_{R'}}} d\Omega'\, j_n(R', \varphi, \vartheta) \end{aligned}$$

und damit verschwindet das Integral (4.17) erst recht.

Damit haben wir insgesamt bewiesen, daß die Formel (4.15) korrekt ist, da $\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ ist. Diese Lösung ist zunächst aber ebensowenig eindeutig wie die Lösung der Poissonschen Gleichung im elektrostatischen Fall. Wir können zu ihr jede divergenzfreie Lösung der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 \mathbf{A}^0(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{A}^0(\mathbf{r}) = 0$$

hinzuaddieren, und eine solche Lösung existiert tatsächlich! $\mathbf{A}^0(\mathbf{r}) = (B_y^0 z, B_z^0 x, B_x^0 y)$ wäre zum Beispiel eine solche, da sie $\mathrm{div}\mathbf{A}^0(\mathbf{r}) = 0$ ganz offensichtlich erfüllt, und

$$\mathbf{B}^0(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}^0(\mathbf{r}) = (B_x^0, B_y^0, B_z^0) \neq 0 \tag{4.18}$$

ergibt, das **homogene** Feld.

Wir müssen also wieder Randbedingungen angeben, indem wir etwa fordern, daß die Felder (räumlich beschränkter Stromverteilungen) für $\mathbf{r} \to \infty$ verschwinden. Dies führt dann wieder zu **eindeutigen** Lösungen. Kennt man nun $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, so ist $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ unmittelbar bestimmbar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Abschließend ist noch festzustellen, daß das Fehlen magnetischer Ladungen (und magnetischer Ströme) dazu führt, daß es in der Vakuum-Magnetostatik kein Randwertproblem gibt. Freilich gibt es auch im Rahmen der Magnetostatik Randwertprobleme, sobald man von der Vakuum- zur makroskopischen Theorie übergeht.

4.3 Die magnetische Multipolentwicklung, das magnetische Fernfeld

Wir wollen nun das Fernfeld einer räumlich beschränkten Stromdichteverteilung untersuchen. Dazu können die Ideen aus Abschnitt 3.9 unmittelbar verwendet werden, und wir erhalten die zu (3.69) äquivalente Beziehung für die Komponenten des Vektorpotentiales

$$A_k(\mathbf{r}) = \mu_0 \varepsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_\ell = 1}^{3} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \mathcal{K}_{k, i_1 \ldots i_\ell} \frac{\partial^\ell G^0(\mathbf{r})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}}$$

mit, analog (3.68)

$$\mathcal{K}_{k,i_1\dots i_\ell} = \int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, j_k(\mathbf{r}')x'_{i_1}\cdots x'_{i_\ell}.$$

Wie wir sehen, besteht der einzige Unterschied darin, daß $\mathcal{K}$ dem Vektorcharakter von $\mathbf{A}$ entsprechend noch einen zusätzlichen Index k trägt. Damit finden wir in den niedrigsten Ordnungen $\ell = 0, 1$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^3}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,(\mathbf{r}\mathbf{r}')\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \cdots\right\}. \tag{4.20}$$

Wir nehmen nun an, daß $\mathbf{a}$ ein konstanter, aber beliebiger Vektor ist; dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left[(\mathbf{a}\mathbf{r})\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\right] &= \sum_{i,k}\frac{\partial}{\partial x_i}a_k x_k j_i \\
&= \sum_{i,k}\left\{a_k x_k\frac{\partial j_i}{\partial x_i} + a_k\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_i}}_{=\delta_{ik}}j_i\right\} \\
&= (\mathbf{a}\mathbf{r})\underbrace{\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r})}_{=0} + \mathbf{a}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \\
&= \mathbf{a}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Folglich gilt für jedes $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') &= \int\limits_{\mathbb{B}} dV'\operatorname{div}\left[(\mathbf{a}\mathbf{r}')\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right] \\
&= \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}'\,(\mathbf{a}\mathbf{r}')\,\mathbf{j}(\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Ist nun $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ nach Voraussetzung räumlich begrenzt, so gibt es beschränkte Bereiche $\mathbb{B}$, die die Stromverteilung so umschließen, daß $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ gilt. Integrieren wir (4.21) über einen solchen Bereich, so sehen wir, daß $\int_{\mathbb{B}} dV'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ identisch verschwindet, und daß damit auch der zu r^{-1} proportionale Anteil aus (4.20), der **Monopolbeitrag**, zum Vektorpotential identisch verschwindet.

Im nächsten Schritt formen wir den zu r^{-3} proportionalen **Dipolbeitrag**

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,(\mathbf{r}\mathbf{r}')\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

um, indem wir für zwei konstante, aber beliebige Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die Größe

$$\mathrm{div}\,[(\mathbf{ar})(\mathbf{br})\,\mathbf{j}(\mathbf{r})] = [\mathbf{a}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})]\,(\mathbf{br}) + (\mathbf{ar})\,[\mathbf{b}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})]$$

bilden, und aufgrund desselben Argumentes wie zuvor feststellen, daß für *alle* $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \; \{[\mathbf{a}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')]\,(\mathbf{br}') + (\mathbf{ar}')\,[\mathbf{b}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')]\} = 0$$

ist. Setzt man nun $\mathbf{b} = \mathbf{r}$ und $\mathbf{a}$ beliebig, so folgt

$$\mathbf{a}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,(\mathbf{rr}')\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\mathbf{a}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\mathbf{r}'\,[\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')]\,. \tag{4.22}$$

Es gilt weiters

$$\mathbf{r}\times[\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r})] = \mathbf{r}'\,[\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})] - \mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{rr}'),$$

und damit folgt für (4.20)

$$\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,(\mathbf{rr}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \left[\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right]\times\mathbf{r}$$

und wir *definieren* mit

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') \tag{4.23}$$

das **Dipolmoment einer Stromverteilung**. Es hat die Dimension Am^2. Damit finden wir den Dipolmomentanteil zum Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{A}^1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}\times\mathbf{r}}{r^3}, \tag{4.24}$$

was mit (3.70) zu vergleichen ist.

Es gibt keine magnetischen Monopolfelder und deswegen ist der führende Anteil des $\mathbf{B}$-Feldes im allgemeinen - wenn nur $\mathbf{M}\neq\mathbf{0}$ gilt - ein Dipolfeld:

$$\mathbf{B}^1(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}^1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{Mr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{M}}{r^5}.$$

Aus großer Entfernung betrachtet wird jede beschränke Stromverteilung mit $\mathbf{M}\neq\mathbf{0}$ ein reines Dipolfeld besitzen, während dies bei Ladungsverteilungen nur dann der Fall ist, wenn zufällig die Gesamtladung Null ist.

4.4 Der Stromfaden

Den einfachsten Quelltyp der Elektrostatik bildete die Punktladung, in der Magnetostatik sollte eine ähnlich einfache Stromdichteverteilung bestehen. Unmittelbar kommt die Stromdichte in den Sinn, welche durch eine Punktladung erzeugt wird, die sich entlang einer Kurve $\mathbf{R}(t)$ bewegt:

$$q(\mathbf{r},t) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = q\dot{\mathbf{R}}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)),$$

doch ist hiefür weder $\partial\rho/\partial t = 0$, noch $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0$ erfüllt und daher in der Magnetostatik nicht verwendbar.

Wir nehmen daher an, daß ein konstanter Strom I längs einer Raumkurve $\mathcal{C}$ fließe und überall sonst $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ gelte. Einen solchen Quelltyp nennt man **Stromfaden**.

Zur Bestimmung des Vektorpotentiales $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ eines solchen Stromfadens nehmen wir die z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems als Stromfaden. Damit gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z,$$

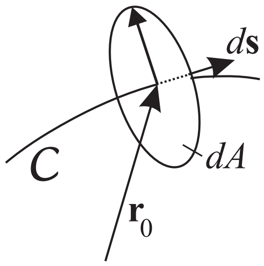
womit tatsächlich $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \partial j_z(\mathbf{r})/\partial z = 0$ ist. Es folgt dann wegen (4.15)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z \int dx'dy'dz' \, \frac{\delta(x')\delta(y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z \int dx'dy'dz' \, \frac{\delta(x')\delta(y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z \int dz' \, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

das Kurvenintegral von $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ entlang des Stromfadens $\mathcal{C}$. (4.25) gilt ganz allgemein: die Gleichung gilt auch, wenn die Kurve $\mathcal{C}$ gekrümmt ist und die explizite Angabe der zum Stromfaden gehörenden Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ nicht mehr so einfach ist. Dies folgt daraus, daß längs des Stromfadens $\mathcal{C}$ die Identität

$$\mathbf{j}dV = Id\mathbf{r} \tag{4.26}$$

gilt, wie wir jetzt zeigen wollen. Es sei $\mathcal{C}$ durch $\mathbf{r}(s)$ mit s parametrisiert. $\mathbf{r}_0$ liege auf $\mathcal{C}$. Dann errichtet



man in $\mathbf{r}_0$ das **begleitende Dreibein**, ein lokales **kartesisches** Koordinatensystem. In ihm sind dV und $\mathbf{j}$ durch

$$dV = d\mathbf{A}d\mathbf{s}, \qquad \mathbf{j} = |\mathbf{j}|\,\mathbf{t}$$

gegeben. Außerdem gilt wegen (2.18) $|\mathbf{j}|dA = I$, da der Strom auf die Kurve $\mathcal{C}$ konzentriert ist. Es ist dann für $I \neq 0$ $|\mathbf{j}|$ auf der Kurve unendlich groß; $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ muß daher Distributionscharakter haben. Es folgt somit

$$\mathbf{j}dV = |\mathbf{j}|dA\mathbf{t}ds = Id\mathbf{r},$$

was ja zu zeigen war. Es folgt also tatsächlich

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = I\mu_0\varepsilon_0 \int\limits_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}'\, G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{4.27}$$

als Endformel für das Vektorpotential. Das $\mathbf{B}$-Feld ist damit auch unmittelbar nach (4.17) bestimmbar:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{4.28}$$

Dies ist das Gesetz von Biot-Savart, welches üblicher Weise aus der Kraftwirkung zweier unendlich langer, paraller, zeitlich konstanter Ströme abgeleitet wird.

4.5 Der lineare Leiter

Damit für den linearen Leiter überhaupt $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$ gelten kann, muß er sich sicherlich von $z = -\infty$ nach $z = \infty$ erstrecken. Wir verwenden (4.28) mit $\mathbf{r}' = (0, 0, z')$ und finden

$$d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = (-y\,dz', x\,dz', 0);$$

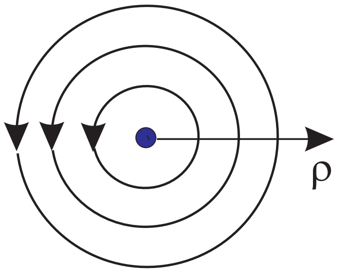
setzen wir $x^2 + y^2 = \rho^2$ und $z - z' = u$, so folgt weiter

$$\begin{aligned}
B_x(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} Iy \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{1}{(\rho^2+u^2)^{3/2}} \\
B_y(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} Ix \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{1}{(\rho^2+u^2)^{3/2}} \\
B_z(\mathbf{r}) &= 0.
\end{aligned}$$

Das Integral konvergiert und hat den Wert $2/\rho^2$, und damit ergibt sich schließlich:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x^2+y^2}(-y,x,0). \tag{4.29}$$

Wir sehen also, daß $|\mathbf{B}|$ auf konzentrischen Kreisen um den Leiter konstant ist und proportional zu $1/\rho$ abnimmt. $\mathbf{B}$ selbst liegt tangential an die Kreise und erfüllt mit der Stromrichtung die "Korkenzieherregel". Längs dieser Kreise gilt



$$\oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{R}\oint_C d\mathbf{s} = I,$$

also (4.3).

Wir bestimmen nun das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ für den linearen Leiter über (4.27) und erhalten

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+u^2}} \tag{4.30}$$

und sehen, daß dieses Integral divergiert! Was können wir tun um unser Ergebnis zu "retten"?

Wir schränken das Integral auf $-L$ nach $+L$ ein, was natürlich mit unseren Grundannahmen überhaupt nicht übereinstimmt, und machen anschließend den Grenzübergang $L \to \infty$. (4.30) ergibt dann

$$\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z\log\left[\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}+L}{\sqrt{\rho^2+L^2}-L}\right]$$

und für $L \gg \rho$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z\log\left[\frac{4L^2}{\rho^2}\right]\\ &= \frac{I\mu_0}{4\pi}\mathbf{e}_z\left[\log 4L^2 - \log\rho^2\right].\end{aligned}$$

Somit besteht $\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r})$ aus einem divergenten aber ortsunabhängigen Teil und einem zweiten, welcher konvergent ist und die Ortsabhängigkeit enthält. Nur dieser Teil spielt dann bei der Bildung der Rotation von $\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r})$ eine Rolle und liefert das bereits bekannte $\mathbf{B}$-Feld (4.29).

Wir haben somit einen Trick gelernt, wie man häufig in der Physik aus formal divergenten Ausdrücken noch sinnvolle physikalische Resultate erhalten kann. Das Ergebnis (4.30) wird auch häufig als Argument dafür verwendet, daß $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ eine nicht beobachtbare, also eine nicht physikalische Größe darstellt, welche ein reines Rechenhilfsmittel darstellt.

4.6 Die Stromschleife, der magnetische Dipol

Es ist aus dem vorhergehenden Abschnitt leicht zu erkennen, daß Stromfäden, welche im Endlichen zu Schleifen (endlicher Länge) geschlossen sind, zu einem endlichen $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ führen werden. Wir verwenden wieder (4.23), welches für Stromfäden wegen (4.26) in

$$\mathbf{M} = -\frac{I}{2} \int d\mathbf{r} \times \mathbf{r}$$

übergeht. Nun sei $\mathcal{C}$ eine geschlossene Jordankurve, also eine Randkurve $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ und wir können den verallgemeinerten Satz von Stokes anwenden. Es sei dann $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\phi(\mathbf{r})$ und wir finden

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{r}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{a} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{r}\, \phi(\mathbf{r}) \\
&= \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\, \mathrm{rot}[\mathbf{a}\phi(\mathbf{r})] \\
&= \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\, [\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) \times \mathbf{a}] \\
&= -\mathbf{a} \int_{\mathcal{A}} \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) \times d\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{rot}[\mathbf{a}\phi(\mathbf{r})]\}_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) a_k \\
&= (\mathrm{grad}\phi \times \mathbf{a})_i,
\end{aligned}$$

und den Eigenschaften des Spatproduktes, folgt weiter

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{r}\, \phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A} \times \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}),$$

was schließlich in

$$\mathbf{M} = -\frac{I}{2} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{r} \times \mathbf{r} = -\frac{I}{2} \int_{\mathcal{A}} (d\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{r}$$

resultiert. Es gilt weiter

$$(d\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{r} = \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \sum_{m,n} \varepsilon_{jmn} dA_m \frac{\partial x_k}{\partial x_n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \, \varepsilon_{ijk} \sum_m \varepsilon_{jmk} dA_m \\
&= - \sum_{i,j,k,m} \mathbf{e}_i \, \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jmk} dA_m \\
&= - \sum_{i,j,k,m} \mathbf{e}_i \left[\delta_{im} \underbrace{\delta_{kk}}_{=3} - \underbrace{\delta_{ik}\delta_{km}}_{=\delta_{im}} \right] dA_m \\
&= -2 \sum_i \mathbf{e}_i dA_i = -2 d\mathbf{A}.
\end{aligned}
$$

Also folgt für das Dipolmoment

$$
\mathbf{M} = I \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}. \tag{4.31}
$$

Ist die Stromschleife eben, so kann auch $\mathcal{A}$ eben gewählt werden, und dann ist $\mathbf{n} = d\mathbf{A}$ und es gilt

$$
\mathbf{M} = IA\mathbf{n}. \tag{4.32}
$$

Gleichung (4.32) dient auch dazu, den **magnetischen Punktdipol** zu erklären: man läßt die Stromschleife so schrumpfen, daß $A \to 0$ geht, das Produkt IA aber konstant bleibt. In diesem Fall verschwinden alle höheren Beiträge in der Multipolentwicklung, und es bleibt das reine Dipolfeld übrig.

Wir können nun das Vektorpotential eines Stromelementes $Id\mathbf{r}$ bzw. eines zeitlich konstanten, auf einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ fließenden Kreisstromes I (in Coulomb-Eichung) angeben. Wir gehen dazu von (4.25) aus

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{I\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} dA' \, \mathbf{n} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

wobei der Stokesche Satz angewendet wurde. Damit folgt für das $\mathbf{B}$-Feld

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{I\mu_0}{4\pi} \mathrm{rot} \int_{\mathcal{A}} dA' \, \mathbf{n} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} dA' \, \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\mathbf{n} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} dA' \left[\mathbf{n} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - (\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{r}}) \, \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

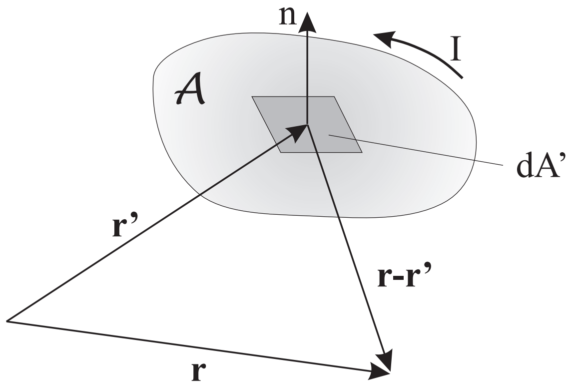


Abbildung 4.1: Zur Bestimmung des **B**-Feldes eines Kreisstroms.

Nun ist

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{r}})\,\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= -\,(\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{r}})\,\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= -\nabla_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\
&= \nabla_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right).
\end{aligned}
$$

Weiters vereinfacht sich aufgrund der Identität[1]

$$
\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{4.35}
$$

der erste Term innerhalb der eckigen Klammern von (4.34) zu

$$
\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 0, \qquad \forall\,\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'.
$$

Es folgt dann:

$$
\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\left[\frac{I\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{A}} dA'\left(\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right], \qquad \forall\,\mathbf{r}\notin\mathcal{A}.
$$

Ist nun die Fläche A sehr klein und $\mathbf{r}$ weit vom Kreisstrom entfernt, so ist $\nabla_{\mathbf{r}'}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ auf $\mathcal{A}$ näherungsweise konstant, und man findet das **B**-Feld für

[1] F. Schürrer, *Distributionen, Fouriertransformationen, Greensche Funktionen*, Skriptum zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER THEORETISCHEN PHYSIK, Graz (1996), Seite 56.

den "kleinen" Kreisstrom in weiter Entfernung von $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &\simeq -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}}\left(IA\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{M}\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \end{aligned} \tag{4.36}$$

und aus (4.33) folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M}\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{4.37}$$

4.7 Kräfte im magnetischen Feld

Das Lorentzsche Kraftgesetz (2.32) lehrt uns, daß eine Stromdichte $\mathbf{j}$ im $\mathbf{B}$-Feld eine Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

nach sich zieht. In einem stromdurchflossenen Bereich $\mathbb{B}$ tritt demnach formal die Kraft

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbb{B}} dV\,\mathbf{f} = \int_{\mathbb{B}} dV\,\mathbf{j}\times\mathbf{B} \tag{4.38}$$

auf. Natürlich sind es die Ladungsträger, welche den Strom bilden, die diese Kraft erfahren. Wollen wir aber im Kontinuumsbild bleiben, so sind es die Feldlinien des $\mathbf{j}(\mathbf{r})$-Feldes, die **Stromlinien**, welche durch die Kraft $\mathbf{F}$ im Magnetfeld abgelenkt werden.

Grundsätzlich anders ist die Situation bei Stromfäden geartet, welche man sich als Idealisierung dünner und starrer Drähte vorstellen kann. Da $\mathbf{j}$ tangential an dem Stromfaden liegt, verschwindet die Tangetialkomponente der Kraft $\mathbf{F}$ und deswegen ist $\mathbf{F}$ die Kraft, welche ein (starr angenommener) Stromfaden als Ganzer im Magnetfeld erfährt. Somit folgt wegen (4.26) aus (4.38) die Kraft

$$\mathbf{F} = I\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{4.39}$$

und für das Drehmoment

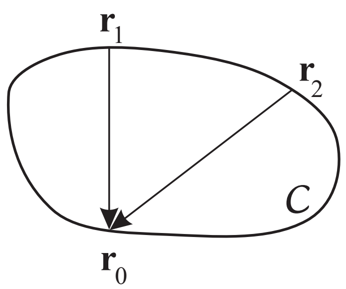
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{M}} &= I\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}\times d\mathbf{r}\times\mathbf{B} \\ &= I\left\{\oint_{\mathcal{C}} [\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} - \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B}(\mathbf{r})(\mathbf{r}\,d\mathbf{r})\right\}. \end{aligned}$$

Für eine Stromschleife folgt weiter

$$\mathbf{F} = I \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I \int_{\mathcal{A}} (d\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}),$$

und wir erkennen, daß $\mathbf{F}$ im homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^0$ nach (4.18) identisch verschwindet, nicht aber das Drehmoment.

Wir sind also wieder einmal mit dem Problem "Selbstkraft" konfrontiert: es fühlt doch der Ladungsträger am Ort $\mathbf{r}_0$ auf $\mathcal{C}$ das Magnetfeld, das von allen Stromelementen an den anderen Kurvenpunkten erzeugt wird. Für diese Kraft gilt offensichtlich:



$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= I \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= I \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \times \frac{I\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\frac{d\mathbf{r} \times [d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{=J}.$$

Der Integrand J läßt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}J &= \frac{d\mathbf{r}' \, [d\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -d\mathbf{r}' \left(d\mathbf{r} \, \mathrm{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.\end{aligned}$$

Der Beitrag des ersten Summanden verschwindet bei der Integration über $\mathcal{C}$ identisch und es bleibt

$$\mathbf{F} \propto \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \, d\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Vertauschen wir hier $\mathbf{r}$ mit $\mathbf{r}'$, so geht der Integrand in sein Negatives über und es folgt $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Eine Stromschleife übt auf sich selbst keine Kräfte aus.

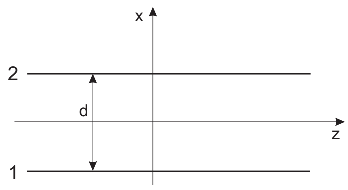
Es kommt aber natürlich zu Kräften, wenn zwei (oder mehrere) Stromschleifen vorhanden sind. Es übt dann Schleife 2 auf Schleife 1 die Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = I_1 \oint_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= I_1 I_2 \oint\limits_{\mathcal{C}_1}\oint\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \times [d\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\
&= I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{\mathcal{C}_1}\oint\limits_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\
&= I_1 I_2 \mathbf{G}, \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

und Schleife 1 auf Schleife 2 die Kraft $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Der Vektor $\mathbf{G}$ in Gleichung (4.40) ist dabei nach Größe und Betrag nur von der Form und der gegenseitigen Anordnung der Leiterschleifen abhängig.

Wir wollen (4.40) dazu benutzen, die Kraft zwischen zwei Leitern im Abstand d auszurechnen. Es ist $\mathbf{r}_1 = (-d/2, 0, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (d/2, 0, z_2)$ und damit



$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 &= -d\mathbf{e}_x + (z_1 - z_2)\mathbf{e}_z, \\
d\mathbf{r}_1 &= dz_1 \mathbf{e}_z, \qquad d\mathbf{r}_2 = dz_2 \mathbf{e}_z, \\
d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 &= dz_1 dz_2,
\end{aligned}
$$

und wir finden für $\mathbf{G}$:

$$
\mathbf{G} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \left[\frac{d}{[d^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \mathbf{e}_x - \frac{z_1 - z_2}{[d^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \mathbf{e}_z \right].
$$

Der zweite Beitrag verschwindet, da offensichtlich $z_1 - z_2$ in z_1 und z_2 antisymmetrisch ist. Mit $z_1 - z_2 = u$, bzw. $dz_2 = du$ folgt mit

$$
\mathbf{G} = \frac{\mu_0 d}{4\pi} \mathbf{e}_x \int dz_1 \int du \frac{1}{[d^2 + u^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi d} \mathbf{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} dz_1
$$

ein offensichtlich divergentes Ergebnis. Dies ist keineswegs verwunderlich, werden doch zwei unendlich lange Leiter auch unendlich große Kräfte aufeinander ausüben. Führen wir hingegen die Längeneinheit L ein, so folgt

$$
\mathbf{G} = \frac{\mu_0}{2\pi d} \mathbf{e}_x \int_0^L dz_1 = \frac{L\mu_0}{2\pi d} \mathbf{e}_x
$$

und damit ist

$$
\frac{\mathbf{F}_{12}}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 \mathbf{e}_x. \qquad (4.41)
$$

Die Leiter stoßen sich ab, wenn I_1 und I_2 in entgegengesetzter Richtung fließen und ziehen bei gleicher Stromrichtung an, wobei $|F_{12}/L|$ proportional $1/d$ ist, und damit mit wachsendem Abstand abnimmt.

Gleichung (4.41) ist besonders wichtig, da sie zur Defintion der Einheit der Stromstärke, des **absoluten Ampère**, dient: dazu betrachtet man einen $L = 1\,\mathrm{m}$ langen Abschnitt zweier unendlich langer, im Abstand von $d = 1\,\mathrm{m}$ voneinander parallel verlaufender Stromfäden, welche vom gleichen Strom $I_1 = I_2 = I$ durchflossen werden. Man bezeichnet diejenige Stromstärke als $1\,\mathrm{A}$, welche zu einer Kraft von $2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}$ auf das Leiterstück führt.

Natürlich erfährt auch ein magnetischer Dipol Kräfte und Drehmomente im $\mathbf{B}$-Feld. Am besten geht man bei der Berechnung von einer ebenen Stromschleife aus, welche die ebene Fläche $\mathcal{A}$ umrandet. Wir erhalten dann wegen (4.39)

$$\mathbf{F} = I \oint_{\mathcal{S}_\mathcal{A}} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = I \int_\mathcal{A} dA\,(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \sum_{m,n} \varepsilon_{jmn} n_m \frac{\partial}{\partial x_n} B_k(\mathbf{r}) \\
&= -\sum_{i,j,k,m,n} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jmn} n_m \frac{\partial}{\partial x_n} B_k(\mathbf{r}) \\
&= \sum_{i,n,k,m} \mathbf{e}_i (\delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn}) n_m \frac{\partial}{\partial x_n} B_k(\mathbf{r}) \\
&= \sum_{i,k} \mathbf{e}_i \left(n_k \frac{\partial}{\partial x_i} B_k(\mathbf{r}) - n_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} B_k(\mathbf{r})}_{=\mathrm{div}\mathbf{B}=0} \right) \\
&= \mathrm{grad}\,[\mathbf{n}\mathbf{B}(\mathbf{r})]\,,
\end{aligned}$$

und wir erhalten für die Kraft:

$$\mathbf{F} = I \int_\mathcal{A} dA\, \mathrm{grad}\,[\mathbf{n}\mathbf{B}(\mathbf{r})]\,.$$

Wir gehen nun auf den Punktdipol über, indem wir $\mathcal{A}$ auf $\mathbf{r}_0$ konzentrieren und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= M \mathrm{grad}\,[\mathbf{n}\mathbf{B}(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \\
&= \mathrm{grad}\,[\mathbf{M}\,\mathbf{B}(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

oder

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k M_k B_k(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}\,. \tag{4.43}$$

Nun soll in der Umgebung von $\mathbf{r}_0$ kein zusätzlicher Strom fließen, welcher zu $\mathbf{B}$ beitragen könnte. Somit gilt in $\mathbf{r}_0$: $\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathbf{0}$, also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} B_k(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial x_k} B_i(\mathbf{r}_0)$$

und wir erhalten aus (4.43):

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_k M_k \frac{\partial}{\partial x_k} B_i(\mathbf{r}) \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{M}\,\mathrm{grad})\mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Gleichung (4.43) entspricht Gleichung (3.62) für den elektrischen Dipol, und diese Äquivalenz setzt sich auch in das Drehmoment fort:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{M}} &= I \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= I \oint_{\mathcal{S}_\mathcal{A}} \{ d\mathbf{r}\, [\mathbf{r}\mathbf{B}(\mathbf{r})] - \mathbf{B}(\mathbf{r})(\mathbf{r}\, d\mathbf{r}) \} . \end{aligned}$$

Wir gehen wieder auf den Punktdipol über, indem wir $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ auf $\mathbf{r}_0$ konzentrieren und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ durch $\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ ersetzen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{M}} &= I \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\; [\mathbf{r}\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)] - I \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)}{2} \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} dr^2}_{=0} \\ &= I \int_{\mathcal{A}} dA\, (\mathbf{n} \times \nabla)\, [\mathbf{r}\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)] \\ &= I \int_{\mathcal{A}} dA\; [\mathbf{n} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)] . \end{aligned}$$

Dies ergibt mit (4.32)

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{B},$$

mit dem elektrischen Analogon (3.64).

4.8 Räumliche Verteilungen von magnetischen Dipolen

Um eine größere Anzahl von magnetischen Dipolen behandeln zu können, gehen wir auf eine Kontinuumsbeschreibung über: zu einem Zeitpunkt t betrachtet man eine Folge von sich auf einen Punkt $\mathbf{r}$ konzentrierenden Raumbereichen, die jeweils das magnetische Dipolmoment $\mathbf{\Delta M}(\mathbf{r}, t)$ enthalten und

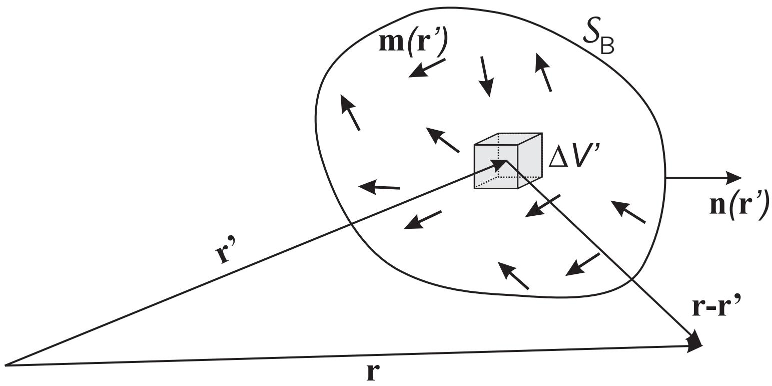


Abbildung 4.2: Zur Bestimmung des Vektorpotentiales einer räumlichen magnetischen Dipolverteilung.

das Volumen ΔV aufweisen. Die **magnetische Dipoldichte** $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ am Punkte $\mathbf{r}$ und zur Zeit t ist dann der Grenzwert

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{\Delta M}(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} \tag{4.45}$$

mit der Dimension Am^{-1}. Das magnetische Dipolmoment des Volumselementes dV um $\mathbf{r}$ ist dann durch $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)dV$ gegeben, und das magnetische Dipolmoment einer im Raumbereich $\mathbb{B}$ lokalisierten magnetischen Dipoldichte $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ ergibt sich als

$$\mathbf{M}(t) = \int_{\mathbb{B}} dV\, \mathbf{m}(\mathbf{r}, t). \tag{4.46}$$

Es sei nun eine statische, im Raumbereich $\mathbb{B}$ lokalisierte magnetische Dipoldichte $\mathbf{m}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathbb{B}$ entsprechend Abb. 4.2 gegeben. Wir erhalten dann im Punkte $\mathbf{r}$ entsprechend (4.37) das infinitesimale Vektorpotential $d\mathbf{A}(\mathbf{r})$ im Volumselement dV':

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{m}(\mathbf{r}')dV' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right],$$

und daraus durch Integration das gesamte Vektorpotential

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{B}} dV'\, \mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{B}} dV'\, \mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \end{aligned}$$

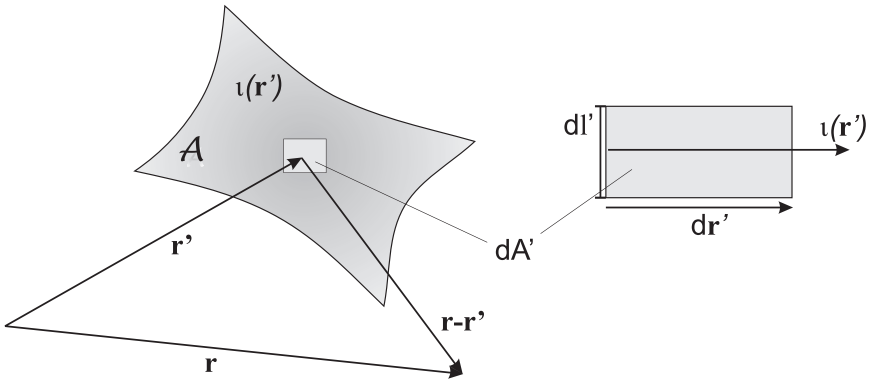
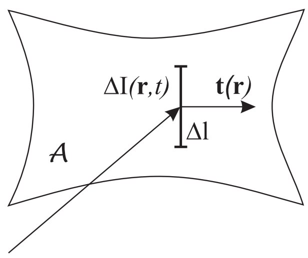


Abbildung 4.3: Der Zusammenhang zwischen Flächenstromdichte und Strom.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{m}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \nabla_{\mathbf{r}'} \times \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{m}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \, \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Man kann unmittelbar zeigen, daß $\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ ist, und damit ist die Coulomb-Eichung erfüllt. Der hier aufgefundene Ausdruck entspricht Gleichung (3.67) für das elektrostatische Potential einer elektrischen Raum- und Flächenladung. Um diese Analogie vollständig zu machen, benötigt man allerdings noch das magnetische Pendant zur Flächenladungsdichte.

Wenn Strom nur entlang einer Fläche fließt, ist es sinnvoll, anstelle der Stromdichte $\mathbf{j}$ eine Flächenstromdichte einzuführen. Man geht dabei analog zur Einführung von $\mathbf{j}$ nach (2.15) vor und verwendet anstelle des Flächenelementes ein Linienelement: zu einem Zeitpunkt t betrachtet man die Folge von sich im Punkte $\mathbf{r}$ konzentrierten, in der stromdurchflossenen Fläche liegenden Linienelemente $\Delta\ell$ mit demselben Normaleneinheitsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{r})$. Die Richtung von $\mathbf{t}$ stimmt mit der des positiven Ladungstransports überein. Durch solch ein Linienelement der Länge $\Delta\ell$ fließt zur Zeit t der Strom $\Delta I(\mathbf{r},t)$. Die Flächenstromdichte $\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t)$ am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t ist dann der Grenzwert



$$
\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t) = \lim_{\Delta\ell\to 0} \frac{\Delta I(\mathbf{r},t)}{\Delta\ell}\mathbf{t}(\mathbf{r}) \qquad (4.48)
$$

mit der Dimension Am^{-1}.

Es ist nun eine zeitunabhängige Flächsenstromdichte $\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r})$ auf einer Fläche

$\mathcal{A}$ gegeben (Abb. 4.3), dann ist nach (4.48) der Strom I durch $d\ell'$ mit

$$I' = |\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}')|\, d\ell'$$

gegebenen und die Flächenstromdichte im Punkte $\mathbf{r}'$ läßt sich dann als

$$\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}) = \frac{dI'}{d\ell'} \frac{d\mathbf{r}'}{d\mathbf{r}}$$

ausdrücken. Damit folgt

$$\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}')dA' = \frac{dI'}{d\ell'} \frac{d\mathbf{r}'}{d\mathbf{r}} d\ell'\, dr' \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}')dA' = I'd\mathbf{r}'. \tag{4.49}$$

Wenn (4.25) auch für zeitunabhängige Flächenströme gilt, dann erzeugt der mit dem Flächenelement dA' in $\mathbf{r}$ korrespondierende Flächenstrom das infinitesimale Vektorpotential

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r})dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

und das Vektorpotential der zeitunabhängigen Flächenstromdichte ergibt sich aus Integration über $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{A}} dA' \, \frac{\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{4.50}$$

Haben wir nun in einem Raumbereich $\mathbb{B}$ eine stationäre Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ lokalisiert, und auf der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$ eine vorgegebene Flächenstromdichte $\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r})$, so ist gemäß (4.25) und (4.26), sowie (4.50) das Vektorpotential durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} dA' \, \frac{\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

gegeben. Daher kann man sich das Vektorpotential (4.47) einer durch die magnetische Dipoldichte $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ beschriebenen räumlichen Dipolverteilung entstanden denken als Superposition der Vektorpotentiale einer Stromdichte

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\, \mathbf{m}(\mathbf{r}) \tag{4.51}$$

und einer Flächenstromdichte

$$\boldsymbol{\iota}_M(\mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) \tag{4.52}$$

auf der Oberfläche.

4.9 Materie im B-Feld

Das Verhalten von Materie unter dem Einfluß eines magnetischen $\mathbf{B}$-Feldes läßt sich unter der Annahme verstehen, daß das Feld **atomare magnetische Dipole** in der Materie erzeugt oder verändert. Diese Dipole erzeugen dann ihrerseits ein $\mathbf{B}$-Feld, welches sich dem ursprünglichen überlagert. Diese Reaktion materieller Körper nennt man **magnetische Polarisation** oder **Magnetisierung**. Man unterscheidet zwei Mechanismen:

(i) Die **Vertauschungspolarisation**: es wird ein magnetisches Dipolmoment im Atom oder Molekül infolge der Änderung der Bewegung der Elektronen induziert. Substanzen, welche dieses Verhalten aufweisen, heißen **diamagnetisch**.

(ii) Die **Orientierungspolarisation**: es werden Atome oder Moleküle mit einem permanenten magnetischen Dipolmoment ausgerichtet. Substanzen mit einem solchen Verhalten nennt man **paramagnetisch**.

Wir sind wieder an einer makroskopischen Charakterisierung der Magnetisierung von Materie interessiert, und wir beschreiben sie durch eine magnetische Dipoldichte, welche wir **Magnetisierung** nennen. Wir betrachten dazu einen magnetisch polarisierten Gegenstand im $\mathbf{B}$-Feld einer stationären Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Das Vektorpotential in Coulomb-Eichung folgt aus (4.25) und (4.26), sowie aus (4.47), (4.51) und (4.52):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}_1} dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}_2} dV' \, \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}_2}} dA' \, \frac{\boldsymbol{\iota}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (4.53)$$

wobei die stationäre Stromverteilung den Bereich $\mathbb{B}_1$ und der polarisierte Gegenstand den Bereich $\mathbb{B}_2$ ausfüllen. Man nennt in diesem Zusammenhang $\mathbf{j}_M$ und $\boldsymbol{\iota}_M$ *gebundene* Ströme, während die zu $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ gehörenden Ströme *frei* genannt werden.

Betrachtet man nun einen Feldpunkt $\mathbf{r} \notin \mathcal{S}_{\mathbb{B}_2}$, so findet man unter Verwendung von (4.35):

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
&= \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
&= -\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int\limits_{\mathbb{B}_1} dV' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int\limits_{\mathbb{B}_2} dV' \, \mathbf{j}_M(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right\} \\
&\quad -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}_2}} dA' \, \boldsymbol{\iota}_M(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_0 \left\{ \int\limits_{\mathbb{B}_1} dV' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \int\limits_{\mathbb{B}_2} dV' \, \mathbf{j}_M(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right\} \\
&= \mu_0 \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{r}) \right].
\end{aligned}
$$

Somit finden wir die modifizierten Feldgleichungen der Magnetostatik bei Anwesenheit von Materie:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{r}) \right], \quad \forall\, \mathbf{r} \notin \mathcal{S}_{\mathbb{B}_M},
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

mit $\mathbb{B}_M$ dem magnetisierbaren Bereich. Wir führen nun wieder die magnetische Polarisation (4.51) ein:

$$
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathrm{rot}\mathbf{m}(\mathbf{r}) \right]
$$

oder

$$
\mathrm{rot} \left[\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mu_0 \mathbf{m}(\mathbf{r}) \right] = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}).
$$

Dies führt zur Einführung des $\mathbf{H}$-Feldes in der Form

$$
\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{m}(\mathbf{r}), \tag{4.55}
$$

und wir erhalten eine modifizierte Form von (4.54) mit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\
\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \forall\, \mathbf{r} \notin \mathcal{S}_{\mathbb{B}_M}.
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

Wir finden unmittelbar die integrale Form von (4.56)

$$
\int\limits_{\mathbb{B}} dV \, \mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \oint\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}\, \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{4.57}
$$

$$
\int\limits_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}' \, \mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \oint\limits_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} d\mathbf{r}\, \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathcal{A}} d\mathbf{A}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}) = I. \tag{4.58}
$$

Hiebei ist I der Strom durch $\mathcal{A}$, und das Linienelement $d\mathbf{r}$ bildet mit dem Flächenelement $d\mathbf{A}$ eine Rechtsschraube.

Die spezifischen Eigenschaften der betrachteten Materie werden sich in der Form der funktionalen Abhängigkeit

$$
\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{H})
$$

manifestieren. Ist $\mathbf{m} \parallel \mathbf{H}$ und damit auch parallel $\mathbf{B}$, so folgt

$$
\mathbf{m} = \chi_m(H)\mathbf{H},
$$

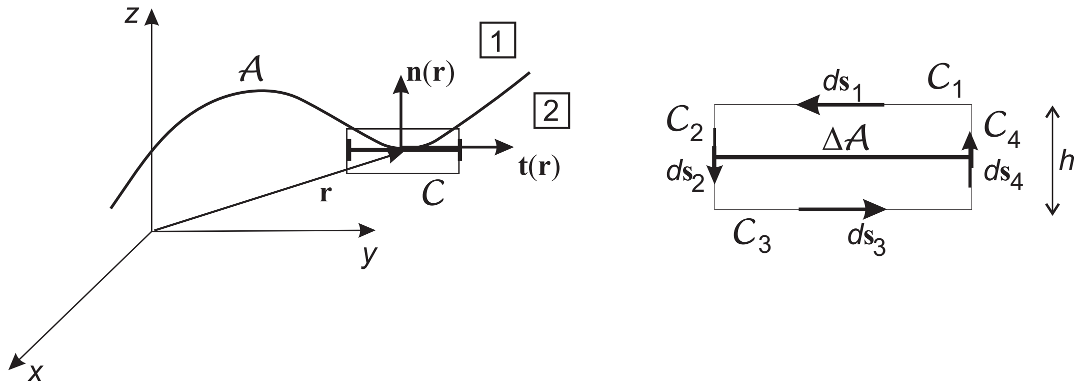


Abbildung 4.4: Zur Berechnung des Verhaltens der Tangentialkomponente des **B**-Feldes beim Durchgang durch eine geladene Fläche.

mit $\chi_m(H)$ der (statischen) **magnetischen Suszeptibilität**. Insbesonders nennt man Medien mit $\chi_m \neq \chi_m(H)$ **lineare** Medien. $\chi_m \geq 0$ gilt nur im Falle der Ausrichtung permanenter Dipole, also im Fall des Paramagnetismus; diamagnetische Materialien zeichnen sich durch $\chi_m \leq 0$ aus. Für lineare Medien gilt nach (4.55)

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{m}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H}(1 + \chi_m),$$

und mit der **statischen Permeabilität**

$$\mu = 1 + \chi_m$$

ergibt sich der Zusammenhang zwischen **H**- und **B**-Feld für lineare Medien mit:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{4.59}$$

Für **homogene** Medien, also $\chi_m \neq \chi_m(\mathbf{r})$, folgen schließlich die Feldgleichungen:

$$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}). \tag{4.60}$$

4.10 Stetigkeitsbedingungen

Man betrachtet wieder einen Punkt **r** einer Trennfläche $\mathcal{A}$ zwischen zwei magnetischen Medien und auf $\mathcal{A}$ mögen keine Flächenströme fließen (Abb. 4.4). Rund um **r** bezeichnen wir willkürlich eine Seite von $\mathcal{A}$ mit $\boxed{1}$ und die andere mit $\boxed{2}$. Das Verhalten der Tangentialkomponente von **H** folgt dabei unmittelbar aus (4.58) unter der Annahme, daß kein freier Strom durch die von $\mathcal{C}$ berandete Fläche (Abb. 4.4, rechts) fließt:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\, \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0.$$

Das Linienintegral setzt sich additiv aus den Integralen über $\mathcal{C}_1$ bis $\mathcal{C}_4$ zusammen und läßt man $h \to 0$ gehen und wählt man anschließend die Längen der Kurve $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_3$ infinitesimal, dann folgt in Analogie zu Abschnitt 3.4

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{t}(\mathbf{r})$$

und die Tangentialkomponente des **H**-Feldes ändert sich beim Durchgang durch $\mathcal{A}$ nicht.

Das Verhalten der Normalkomponente des **B**-Feldes in **r** gewinnt man durch Anwendung von (4.57) in Analogie zu Abschnitt 3.4:

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})$$

und die Normalkomponente des **B**-Feldes ändert sich beim Durchgang durch die Fläche $\mathcal{A}$ nicht.