Kapitel 5

Integrationstheorie der MAXWELLschen Gleichungen

5.1 Die Grundgleichungen

Bei voller Zeitabhängigkeit beschreiben die folgenden Gleichungen (abgeleitet aus (2.23) bis (2.26) sowie (2.27) und (2.28)) den elektromagnetischen Zustand des Vakuums:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t) && (5.1)\\
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) && (5.2)\\
\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 && (5.3)\\
\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \mathbf{0}. && (5.4)
\end{aligned}
$$

5.2 Elektrodynamische Potentiale

Die zentrale Aufgabe der Elektrodynamik besteht darin, Methoden zur Integration des Gleichungssystemes (5.1) bis (5.4) zu entwickeln. Dies ist ein an sich schwieriges Unterfangen - mit einer Ausnahme: Gleichung (5.3) kann unmittelbar integriert werden[1]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \qquad (5.5)$$

[1] $\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ sagt an sich aus, daß es keinen magnetischen Monopol gibt. Dies ist eine Erfahrungstatsache. $\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ ist aber kein Beweis *gegen* die Existenz von Monopolen. Gewisse moderne Elementarteilchentheorien weisen jetzt darauf hin, daß es magnetische Monopole geben müßte. Dieser einfache Ansatz zur Integration der MAXWELLschen Gleichungen ginge dann verloren. Dennoch gelingt es, sie zu integrieren. (Phys. Blätter, **31**, 352 (1975).)

wobei $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ein zunächst beliebiges Vektorfeld ist. $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ existiert also stets und hat dieselbe Bedeutung wie in Kapitel 4. Da nun aber $\mathbf{B}$, und damit auch $\mathbf{A}$, die übrigen MAXWELL-Gleichungen befriedigen muß, wird die - zunächst freie - Wahl von $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ eingeschränkt.

Wir setzen nun (5.5) in (5.4) ein und erhalten

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0$$

oder

$$\mathrm{rot}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right] = 0,$$

und damit ist nunmehr nicht mehr $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ (wie in der Elektrostatik) sondern $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)/\partial t$ wirbelfrei. Daraus folgt wiederum, daß es ein skalares Potential ψ gibt, welches wie folgt beschrieben wird:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r},t). \tag{5.6}$$

Dies ist zunächst wieder ein frei wählbares Potential, das **elektrische Potential**. Im statischen Fall kann man $\mathbf{A}$ stets so wählen, daß $\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)/\partial t = 0$ ist und damit wird ψ gleich dem elektrostatischen Potential ϕ, weshalb wir auch im dynamischen Fall weiterhin das Symbol ϕ für das elektrische Potential verwenden. Es gilt also wegen (5.6)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{5.7}$$

und damit muß ϕ auch alle Gleichungen befriedigen, in denen $\mathbf{E}$ auftritt. Durch die Einführung von $\mathbf{A}$ und ϕ sind nunmehr die homogenen MAXWELL-Gleichungen (5.3) und (5.4) *identisch* gelöst, und sie sind für uns nicht mehr von Relevanz.

Wir führen nun $\mathbf{A}$ und ϕ in die inhomogenen Gleichungen (5.1) und (5.2) ein. Aus (5.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{E} = \mathrm{div}\left[-\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right] &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t) \\
\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}}_{=\nabla^2}\phi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t) \\
\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t). \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Aus (5.2) folgt, ohne das Argument $(\mathbf{r},t)$:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{j}$$

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2\mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0\mathbf{j} \\
-\nabla^2\mathbf{A} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0\mathbf{j}. \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Diese zwei Gleichungen stellen ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung von $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $\phi(\mathbf{r},t)$ dar.

5.3 Eichungen

Wir haben aber bereits im Kapitel 4 diskutiert, daß man $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ durch **Eichung** mit besonders einfachen Eigenschaften ausstatten kann. Diesen Sachverhalt wollen wir nun allgemeiner diskutieren, kommen jedoch zu Beginn auf die Coulomb-Eichung zurück.

5.3.1 Die Coulomb-Eichung

Wir forderten von $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ die Eigenschaft

$$
\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0. \qquad (5.10)
$$

Kann diese Eigenschaft auch im zeitabhängigen Fall gefordert werden? Ja, natürlich aber nur dann, wenn sich weder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ noch $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ dadurch verändern (im Gegensatz zur Magnetostatik, wo wir nur $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zu untersuchen hatten).

Angenommen, wir haben zunächst irgendein $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und wir verändern dieses durch Hinzuaddieren des Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes $f(\mathbf{r},t)$ zu $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)$. Können wir damit $\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = 0$ erreichen (also existiert so ein $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)$ überhaupt), ohne daß sich $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ ändern?

(a) $\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) \stackrel{?}{=} 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathrm{div}\left[\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \mathrm{grad}f(\mathbf{r},t)\right] &= 0 \\
\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}}_{=\nabla^2} f(\mathbf{r},t) &= 0 \\
\nabla^2 f(\mathbf{r},t) &= -\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

Somit ist die Existenz von $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)$ gesichert, da (5.11) stets durch ein Poissonintegral lösbar ist, und damit kann das geeignete $f(\mathbf{r},t)$ aufgefunden werden.

(b) bleibt $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ unverändert?

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathrm{rot}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) &= \mathrm{rot}\,[\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mathrm{grad}f(\mathbf{r},t)] \\ &= \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}}_{=0}f(\mathbf{r},t) \\ &= \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t).\end{aligned}$$

Somit bleibt $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ unverändert.

(c) bleibt $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ unverändert?

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\mathrm{grad}\phi'(\mathbf{r},t)-\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= -\mathrm{grad}\phi'(\mathbf{r},t)-\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mathrm{grad}f(\mathbf{r},t)] \\ &= -\mathrm{grad}\phi'(\mathbf{r},t)-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\mathrm{grad}\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= -\mathrm{grad}\left[\phi'(\mathbf{r},t)+\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right]-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &\neq -\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},t)-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\end{aligned}$$

außer

$$\phi'(\mathbf{r},t)=\phi(\mathbf{r},t)-\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{5.12}$$

Weil aber $f(\mathbf{r},t)$ existiert, existiert auch stets ein $\phi'(\mathbf{r},t)$ in der Form (5.12), sodaß $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ unverändert bleibt.

Demzufolge bleiben die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ unverändert, wenn wir **gleichzeitig** an den Potentialen die Transformationen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\mapsto\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mathrm{grad}f(\mathbf{r},t) \\ \phi(\mathbf{r},t)\mapsto\phi'(\mathbf{r},t) &= \phi(\mathbf{r},t)-\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{5.13}$$

vornehmen. Es ist dies die *allgemeinste Eichtransformation*.

Wir finden also, daß zu jedem Paar $[\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\phi(\mathbf{r},t)]$ eine Menge äquivalenter Paare $\{[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t),\phi'(\mathbf{r},t)],\ldots\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mathrm{grad}f(\mathbf{r},t) \\ \phi'(\mathbf{r},t) &= \phi(\mathbf{r},t)-\partial f(\mathbf{r},t)/\partial t\end{aligned} \tag{5.14}$$

existiert, die zum **selben** $[\mathbf{B}(\mathbf{r},t), \mathbf{E}(\mathbf{r},t)]$-Feld führen. Diese Paare sind offensichtlich über Skalarfelder $f(\mathbf{r},t)$ entsprechend (5.14) miteinander verbunden. Die Addition des Gradienten $\nabla f(\mathbf{r},t)$ zum Vektorpotential und die gleichzeitige Subtraktion der Zeitableitung $\partial f(\mathbf{r},t)/\partial t$ vom elektrischen Potential lassen also die Physik invariant. Es ist somit nicht notwendig, "alle" $[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t), \phi'(\mathbf{r},t)]$ zu bestimmen. Es ist vielmehr hinreichend, *einen* Vertreter dieser Menge aufzusuchen.

Mit der Coulomb-Eichung suchen wir nur jenen Vertreter $[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t), \phi'(\mathbf{r},t)]$ auf, für den gilt, daß $\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = 0$ ist. Das darf man auch, weil es eine solche Eichtransformation tatsächlich gibt; d.h.: es existiert, wie wir gezeigt haben, zu **jedem** $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ein $f(\mathbf{r},t)$ derart, daß wir mit der Menge aller $[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t), \phi'(\mathbf{r},t)]$, für welche $\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = 0$ ist, alle möglichen Feldzustände erfaßt haben.

Wir machen nun explizite von der Coulomb-Eichung (5.13) Gebrauch und führen sie in (5.8) und (5.9) ein:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t) \\
\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},t).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Diese Gleichungen sind unter der Nebenbedingung $\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0$ zu lösen.

Es seien nun nur Randbedingungen im Unendlichen gegeben. Es folgt dann unmittelbar für das elektrische Potential (siehe Gleichung (3.11)):

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{5.16}$$

Dieses Ergebnis führen wir in die zweite Gleichung von (5.15) ein; dazu bestimmen wir zunächst:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t)/\partial t}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Nun kann aber $\partial\rho(\mathbf{r}',t)/\partial t$ über die Kontinuitätsgleichung (2.21) durch die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\frac{\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Weiters benötigen wir:

$$\mathrm{grad}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\nabla_{\mathrm{r}}\left\{\frac{\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\,\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

und wir finden

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \quad (5.17)$$

Diese Gleichung muß nun für $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ unter der Nebenbedingung $\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0$ gelöst werden. Wegen des Auftretens von $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)$, welches den Einfluß *jedes* Punktes des Raumes auf das Geschehen im Punkte $\mathbf{r}$ manifestiert, nennt man die Form von (5.17) **nicht lokal**. (5.17) ist ganz offensichtlich nicht trivial lösbar. Eine einfache Lösung gelingt nur für $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t) = \mathbf{0}$:

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

Aber auch in diesem Fall ist es nicht elegant, daß die Gleichungen für $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $\phi(\mathbf{r},t)$ unterschiedlichen Typs sind. Von Vorteil ist jedoch, daß Gleichung (5.16) als Poisson-Gleichung einfach ist. Deshalb findet die Coulomb-Eichung auch Anwendung.

5.3.2 Die Idee der Eichung

Wir können nun die Idee der Eichung ganz allgemein wie folgt darstellen: für alle $[\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\phi(\mathbf{r},t)]$ gilt:

$$\left.\begin{array}{ccc} [\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\phi(\mathbf{r},t)] & \mapsto & [\mathbf{B}(\mathbf{r},t),\mathbf{E}(\mathbf{r},t)] \\ \downarrow & & \| \\ [\mathbf{A}'(\mathbf{r},t),\phi'(\mathbf{r},t)] & \mapsto & [\mathbf{B}(\mathbf{r},t),\mathbf{E}(\mathbf{r},t)] \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} \mathbf{A}'(\mathbf{r},t) & = & \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \mathrm{grad} f(\mathbf{r},t) \\ \phi'(\mathbf{r},t) & = & \phi - \dfrac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} \end{array}$$

und dann ist $f(\mathbf{r},t)$ so zu wählen, daß $[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t),\phi'(\mathbf{r},t)]$ die gewünschten Eigenschaften hat, also etwa bei der Coulomb-Eichung $\mathrm{div}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = 0$. Es stellt sich nun die Frage: gibt es ein solches $f(\mathbf{r},t)$? Wenn ja, so ist es hinreichend für die Kenntnis aller Zustände $[\mathbf{B}(\mathbf{r},t),\mathbf{E}(\mathbf{r},t)]$, nur mehr jene $[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t),\phi'(\mathbf{r},t)]$ zu bestimmen (d.h.: als Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichungen zu suchen) die der speziellen Eichbedingung entsprechen.

5.3.3 Die Lorentz-Eichung

Aufgrund von Abschnitt 5.3.1 können wir erwarten, daß wir für das Vektorpotential, welches die Bedingung

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0 \quad (5.18)$$

erfüllt, für (5.8) und (5.9) eine hochsymmetrische Form erhalten können. Man nennt (5.18) die LORENTZ-Eichung. Aus (5.8) wird dann:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t), \tag{5.19}$$

und aus (5.9)

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t). \tag{5.20}$$

Damit ist es sogar gelungen die beiden Gleichungen zu entkoppeln. Es ist aber (5.19) und (5.20) unter der *Nebenbedingung* (5.18) zu lösen.

Wohl ist aber zuerst zu zeigen, daß im Rahmen der allgemeinen Eichtransformationen diese Eichung überhaupt möglich ist. Wir müssen gemäß Abschnitt 5.3.2 überprüfen, ob ein $f(\mathbf{r},t)$ gefunden werden kann, welches es erlaubt, (5.18) zu erfüllen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left[\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \mathrm{grad} f(\mathbf{r},t)\right] + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right] &= 0 \\
\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad} f(\mathbf{r},t)}_{=\nabla^2 f(\mathbf{r},t)} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \left[-\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right]. \tag{5.21}$$

In dieser Gleichung sind $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $\phi(\mathbf{r},t)$ gegeben und $f(\mathbf{r},t)$ ist gesucht. Wir werden noch zeigen, daß (5.21) stets eine Lösung hat, und damit ist die Lorentz-Eichung immer möglich.

Die Lorentz-Eichung führt nicht nur auf eine hoch symmetrische Form der zu lösenden Differentialgleichungen, die Gleichungen (5.19) und (5.20) sind auch für beliebige Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ **lokal**.

5.4 Der Energiesatz der Elektrodynamik

Wir beginnen mit einer formalen Manipulation der MAXWELL-Gleichungen. Wir multiplizieren (2.24) skalar mit $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und (2.26) skalar mit $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
-\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \\
\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 0,
\end{aligned}$$

und subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander

$$\left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]+[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\mathbf{H}]=-\mathbf{E}\mathbf{j},$$

oder

$$\left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]+\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}\mathbf{j}. \tag{5.22}$$

Man definiert nun den Pointing**schen Vektor**

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{5.23}$$

mit der Dimension

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\times\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Asm}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{ms}}=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2s}}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

und führt (5.22) in die Form

$$\left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]+\mathrm{div}\mathbf{S}=-\mathbf{E}\,\mathbf{j} \tag{5.24}$$

über, dem Pointing**schen Satz**. Untersuchen wir nun einen Raumbereich $\mathbb{B}$ mit der Oberfläche $\mathcal{S}_\mathbb{B}$, so finden wir die integrale Form von (5.24):

$$-\int\limits_{\mathbb{B}}dV\left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]=\int\limits_{\mathcal{S}_\mathbb{B}}d\mathbf{A}\,\mathbf{S}+\int\limits_{\mathbb{B}}dV\,\mathbf{E}\,\mathbf{j}. \tag{5.25}$$

Um nun (5.24) interpretieren zu können, betrachten wir den Sonderfall eines linearen Mediums:

$$\left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{E}\,\mathbf{D}+\mathbf{H}\,\mathbf{B}\right],$$

und aus Gleichung (3.37) wissen wir, daß

$$w(\mathbf{r})=\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\mathbf{D}$$

die Energiedichte des elektrischen Feldes ist. Damit ist dann analog $\mathbf{H}\,\mathbf{B}/2$ als Energiedichte des magnetischen Feldes zu interpretieren. Damit wird (5.25) zu einer Bilanzgleichung mit der Energiedichte $(\mathbf{E}\,\mathbf{D}+\mathbf{H}\,\mathbf{B})/2$ des elektromagnetischen Feldes, und $\int_\mathbb{B} dV\,\mathbf{E}\,\mathbf{j}$ als die in der Zeiteinheit in Wärmeenergie umgewandelte elektromagnetische Energie. Das verbleibende Oberflächenintegral ist der elektromagnetische Energiefluß pro Zeiteinheit durch die Oberfläche $\mathcal{S}_\mathbb{B}$ (Abstrahlung). Dabei gibt die Richtung von $\mathbf{S}$ die Richtung des

Energieflusses an und der Betrag von $\mathbf{S}$ den elektromagnetischen Energietransport pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zu $d\mathbf{A}$.

Wir wollen jetzt noch kurz den Term $-\mathbf{j}\,\mathbf{E}$ auf seine physikalische Bedeutung untersuchen. Dazu betrachten wir eine Punktladung, welche sich im elektromagnetischen Feld bewegt. Auf sie wirkt die Lorentzkraft (2.31), die an ihr die Arbeit

$$\delta W = \mathbf{F}d\mathbf{r} = q\mathbf{E}d\mathbf{r} + q\underbrace{(\mathbf{v}\times\mathbf{B})d\mathbf{r}}_{=0}$$

verrichtet. Ihre Leistung ist durch

$$N = \frac{\delta W}{\delta t} = q\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{E} = q\mathbf{v}\mathbf{E}$$

gegeben. Nun ist mit der Ladung q stets ein massenbehaftetes Teilchen verbunden und somit wird diese Arbeit - kann dieses Teilchen der Lorentzkraft folgen - zu einer Änderung der kinetischen Energie führen. Kinetische Energie ist aber eine Form mechanischer Energie und damit beschreibt $q\mathbf{v}\mathbf{E}$ die Veränderung der mechanischen Energie des Teilchens aufgrund seiner Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld.

Im Kontinuumsfall ist obige Argumentation leicht anwendbar. Es gilt ja:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t),$$

und aus der Lorentzkraft folgt weiter

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t) &= \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\left[\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right]\\ &= \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\\ &= n(\mathbf{r},t),\end{aligned}$$

mit der Leistungsdichte $n(\mathbf{r},t)$, womit die in (5.24) auftretende Form unmittelbar aufgefunden werden konnte.

5.5 Die Wellengleichung

Wir erkennen aus der Lorentz-Eichung (Abschnitt 5.3.3), daß $\phi(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $f(\mathbf{r},t)$ der Differentialgleichung

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = g(\mathbf{r},t) \tag{5.26}$$

gehorchen, mit $c_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. Dies ist eine lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten. Man bezeichnet diesen

Differentialgleichungstyp als **Wellengleichung**, und zwar als **homogene Wellengleichung** für $g = 0$ und als **inhomogene Wellengleichung** für $g \neq 0$.

Neben der Potentialgleichung $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ ist die Wellengleichung einer der wichtigsten Grundtypen linearer, partieller Differentialgleichungen. Zwischen Potentialgleichung und Wellengleichung besteht nicht nur der Unterschied zwischen ∇^2 und $\nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, sondern, vor allem, daß die "vierte Ableitung" in der Wellengleichung ein negatives Vorzeichen trägt. Dennoch gehören beide Differentialgleichungen zur Form

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_1, \ldots, x_\ell) = g(x_1, \ldots, x_\ell),$$

mit (α_{ij}) einer symmetrischen Matrix. Diese Matrix erlaubt die Einführung folgender quadratischer Form:

$$F(x_1, \ldots, x_\ell) = \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_{ij} x_i x_j .$$

Setzt man $F = konst.$, so beschreibt F für $\ell = 2$ (zwei Dimensionen) die üblichen Kegelschnitte, für $\ell = 3$ Kegelschnittflächen (Ellipsoid, Hyperboloid) und Analoges für höhere Dimensionen. Diese geometrischen Körper unterscheiden sich voneinander sehr stark, und welche der Möglichkeiten F verbirgt, hängt von den Vorzeichen der Eigenwerte der Matrix (α_{ij}) ab, welche ja stets existieren.

In diesem Sinne ist die Potentialgleichung mit einer elliptischen Form und die Wellengleichung mit einer hyperbolischen Form asoziiert (und man nennt sie auch so ...). Ist eine der Ableitungen von erster Ordnung, so spricht man von einer parabolischen Differentialgleichung, wie es etwa auf die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 f(\mathbf{r}, t)$$

zutrifft.

5.5.1 Die eindimensionale Wellengleichung

Wir untersuchen zunächst, der Eifachheit halber, die homogene, eindimensionale Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{5.27}$$

Satz 5.1 *Jede (zweifach differenzierbare) Funktion der Form $f(x - ct)$ oder $f(x + ct)$ ist Lösung der Gleichung (5.27).*

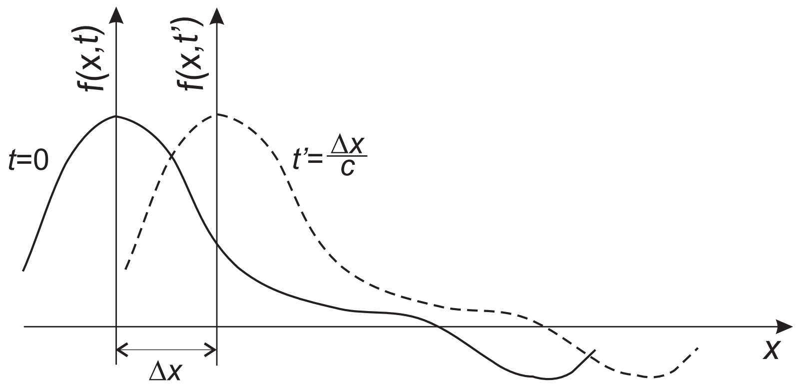


Abbildung 5.1: Lösungen von (5.27) am Beispiel einer Funktion $f(x-ct)$.

Wir führen

$$u_\pm = x \pm ct$$

ein, und es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(u_\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial f(u_\pm)}{\partial u_\pm}\frac{\partial u_\pm}{\partial x} = 1\, f'(u_\pm) \\
\frac{\partial^2 f(u_\pm)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} f'(u_\pm) = \frac{\partial f'(u_\pm)}{\partial u_\pm}\frac{\partial u_\pm}{\partial x} = f''(u_\pm) \\
\frac{\partial f(u_\pm)}{\partial t} &= \frac{\partial f(u_\pm)}{\partial u_\pm}\frac{\partial u_\pm}{\partial t} = \pm c f'(u_\pm) \\
\frac{\partial^2 f(u_\pm)}{\partial t^2} &= \pm c\frac{\partial}{\partial t} f'(u_\pm) = \pm c\frac{\partial f'(u_\pm)}{\partial u_\pm}\frac{\partial u_\pm}{\partial t} = c^2 f''(u_\pm),
\end{aligned}$$

und damit ist $f(u_\pm)$ tatsächlich Lösung von (5.27). Die Lösungen haben die in Abb. 5.1 dargestellte Form. Offensichtlich beschreibt $f(x-ct)$ eine Funktion, die sich ohne Veränderung ihrer Form mit konstanter Geschwindigkeit c von links nach rechts verschiebt:

$$\begin{aligned}
t = 0: &\qquad f(x - c\,0) = f(x) \\
t = t': &\qquad f(x - ct') = f\left(x - \frac{\Delta x}{c} c\right) = f(x - \Delta x),
\end{aligned}$$

und $f(x-\Delta x)$ ist jene Funktion, welche man aus $f(x)$ gewinnt, indem man (wie in Abb. 5.1 angedeutet) den Ursprung um $\Delta x = ct'$ nach links verschiebt. In der Zeit $\Delta x/c$ läuft die Welle um Δx nach rechts. In der Zeiteinheit $t' = 1$ legt sie den Weg $\Delta x = c\,1$ zurück, sodaß wir sagen können, daß sich die Welle mit der Geschwindigkeit c nach rechts ($f(x+ct)$ mit c nach links) bewegt. Dabei muß die "Welle" keineswegs etwas Periodisches sein.

Da die Wellengleichung linear ist, lassen sich Lösungen superponieren, um auf diese Weise neue Lösungen zu konstruieren. Es können damit auch zwei Wellen "gegeneinander" laufen. Es durchdringen sich dann die zwei Wellen ohne sich zu stören.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung wird dann von der Gestalt

$$g(x,t) = f^+(x-ct) + f^-(x+ct)$$

sein. Kennt man diese Funktion zur Zeit t_0, so kann man das Verhalten zu späteren Zeiten nur dann vorhersagen, wenn man Zusatzinformationen besitzt: (a) man kennt die Laufrichtung (also ist f^+ oder f^- gleich Null) oder (b) man kennt auch $\partial g(x,t)/\partial t$.

Wir wollen nun spezialisieren: mit $f(u_\pm)$ ist auch

$$\cos(ku_\pm) = \cos[k(x \pm ct)] = \cos(kx \pm kct), \quad k > 0 \tag{5.28}$$

Lösung der Wellengleichung. An sich sind wir durch die Wahl des Cosinus sehr speziell geworden; dies wird aber dadurch aufgelockert, indem nicht nur $\cos(x \pm ct)$, sondern $\{\cos[k(x \pm ct)] \,|\, k \in \mathbb{R}^+\}$ studiert wird. Wegen $\cos x = \Re\mathrm{e}\{e^{ix}\}$ gilt weiter:

$$\cos(kx \pm kct) = \Re\mathrm{e}\left\{e^{i(kx \pm kct)}\right\}.$$

Die Periodizität des Cosinus in der Phase $u_\pm$ führt natürlich zu einer doppelten Periodizität, da in der Phase x und t auftreten.

Wir können folgende Eigenschaften bestimmen:

1. Die räumliche Periode λ. Zu einer gegebenen Zeit t_0 ist die Lösung räumlich periodisch. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \cos h(x) &\overset{!}{=} \cos[h(x+\lambda)] \\ h(x) &= h(x+\lambda) \pm 2\pi. \end{aligned}$$

   Es folgt im speziellen:

$$\begin{aligned} \cos[k(x \pm ct)] &= \cos[k(x + \lambda \pm ct)] \\ k(x \pm ct) &= k(x + \lambda \pm ct) \pm 2\pi \\ 0 &= k\lambda \pm 2\pi, \end{aligned}$$

$$\lambda = \pm\frac{2\pi}{k}. \tag{5.29}$$

   Die Lösung ist also örtlich mit der Wellenlänge λ periodisch. Man nennt k die **Wellenzahl**.

2. Die Lösung ist an einem festen Ort x_0 zeitlich periodisch und hat die **Schwingungsdauer**
$$T = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c}.$$
In der Zeit T hat sich die Lösung gerade um λ verschoben und ist dann von der ursprünglichen nicht mehr unterscheidbar. Es ist weiters
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = \frac{ck}{2\pi}$$
die **Frequenz** und
$$\omega = 2\pi\nu = kc \tag{5.30}$$
die **Kreisfrequenz** der Lösung. Die Einhaltung der Beziehung (5.30) ist wichtig, da sonst $\cos(kx \pm \omega t)$ keine Lösung der Wellengleichung ist.

Wollen wir nun den Nullpunkt verschieben, also $x \mapsto x - x_0$, $t \mapsto t - t_0$, so gilt:

$$\begin{aligned}\cos[k(x - x_0) \pm \omega(t - t_0)] &= \cos(kx \pm \omega t - kx_0 \mp \omega t_0) \\ &= \cos(kx \pm \omega t + \phi),\end{aligned}$$

mit dem Phasenwinkel ϕ, welcher modulo 2π bestimmt ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned}\cos(kx \pm \omega t + \phi) &= \Re\mathrm{e}\left\{e^{i(kx \pm \omega t + \phi)}\right\} \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{e^{i\phi} e^{i(kx \pm \omega t)}\right\},\end{aligned}$$

und damit ist natürlich $|A| \cos(kx \pm \omega t)$ Lösung der Wellengleichung. Es folgt dann

$$\begin{aligned}|A| \Re\mathrm{e}\left\{e^{i\phi} e^{i(kx \pm \omega t)}\right\} &= \Re\mathrm{e}\left\{|A| e^{i\phi} e^{i(kx \pm \omega t)}\right\} \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{A e^{i(kx \pm \omega t)}\right\}, \qquad A \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

als weitere Lösung der Wellengleichung.

Wir addieren nun die beiden gegenläufigen Wellen

$$\begin{aligned}\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t) &= \Re\mathrm{e}\left\{e^{i(kx + \omega t)} + e^{i(kx - \omega t)}\right\} \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{e^{ikx} \underbrace{\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)}_{=2\cos\omega t}\right\} \\ &= 2 \cos kx \cos \omega t. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Damit wurde die **stehende Welle** als weitere Lösung der Wellengleichung aufgefunden.

Man spricht nun davon, daß für $k, \omega > 0$ die Welle $\cos(kx - \omega t)$ nach **rechts** und die Welle $\cos(kx + \omega t)$ nach **links** läuft. Die Laufrichtung kann verändert werden, indem k oder ω negativ gewählt werden.

Diese hier soeben näher untersuchten Wellen stellen, obwohl dies nur sehr spezielle Lösungen sind, den wichtigsten Wellentyp dar. Es lassen sich nämlich, wie noch zu zeigen sein wird, alle Wellenzüge aus diesen speziellen, periodischen, unendlich ausgedehnten Wellen durch Superposition erzeugen.

5.5.2 Der mehrdimensionale Fall

Die Wellengleichung lautet nun

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.32}$$

und wir wollen in der Folge einige spezielle Lösungen untersuchen.

Ebene Wellen

Satz 5.2 *Für einen beliebigen Vektor* $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ *und* $|\omega| = c|\mathbf{k}|$ *lösen die Funktionen*

$$f(\mathbf{r}, t) = \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \phi) = \Re\mathrm{e}\left\{e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \phi)}\right\}$$

die Wellengleichung (5.32). (Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ *ist dies trivial erfüllt.)*

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\cos\left(\sum_{j=1}^{3} k_j x_j - \omega t + \phi\right) \\
&= -\sin\left(\sum_{j=1}^{3} k_j x_j - \omega t + \phi\right) k_i \\
\frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i^2} &= -k_i^2 \cos\left(\sum_{j=1}^{3} k_j x_j - \omega t + \phi\right) = -k_i^2 f(\mathbf{r}, t) \\
\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\sin\left(\sum_{j=1}^{3} k_j x_j - \omega t + \phi\right)(-\omega) \\
\frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 f(\mathbf{r}, t) = -|\mathbf{k}|^2 c^2 f(\mathbf{r}, t) \\
\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3}(-k_i^2) f(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t)\sum_{i=1}^{3} k_i^2 = -f(\mathbf{r}, t)|\mathbf{k}|^2.
\end{aligned}$$

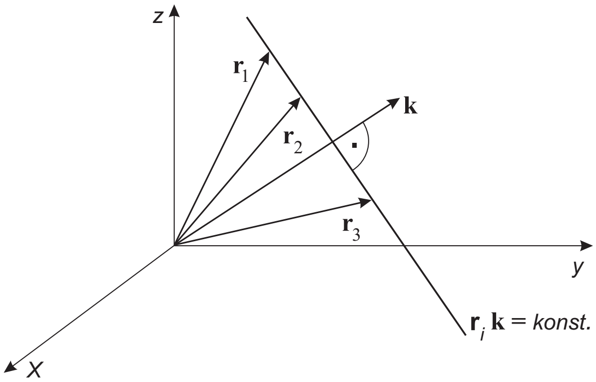


Abbildung 5.2: $\mathbf{r}_i\mathbf{k} = konst.$ ist eine Ebene senkrecht auf $\mathbf{k}$. Auf dieser Ebene hat die Welle überall die gleiche Amplitude zu einer gegebenen Zeit t_0. Diese Ebene wird **Wellenfront** genannt.

Eingesetzt in (5.32) ergibt

$$-f(\mathbf{r},t)|\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{c^2}\left[-|\mathbf{k}|^2 c^2 f(\mathbf{r},t)\right] = 0,$$

womit der Satz 5.2 bewiesen ist.

Wir untersuchen die physikalische Bedeutung der Lösung $f(\mathbf{r},t_0) = \cos(\mathbf{kr} - \omega t_0 + \phi)$ zur festen Zeit t_0. Dann ist der Wert der Cosinusfunktion für alle $\mathbf{kr} = konst.$ konstant. Dies trifft auf alle Vektoren $\mathbf{r}_i$ zu, deren orthogonale Projektion auf den Vektor $\mathbf{k}$ denselben Wert hat (siehe Abb. 5.2). Dies entspricht aber allen Punkten $\mathbf{r}_i$, welche auf einer Normalebene zu $\mathbf{k}$ liegen. Man nennt diese Ebene eine **Wellenfront**.

Läßt man nun die Zeit laufen, also $t = t_0 + \Delta t$, so wollen wir untersuchen, in welchem Punkt $\mathbf{r}'$ wieder derselbe Wert wie zum Zeitpunkt t_0 aufgefunden wird:

$$\begin{aligned} \cos\left[\mathbf{kr}' - \omega(t_0+\Delta t) + \phi\right] &\stackrel{!}{=} \cos(\mathbf{kr} - \omega t_0 + \phi) \\ \cos\left(|\mathbf{k}||\mathbf{r}+\mathbf{\Delta r}|\cos\gamma - \omega t_0 - \omega\Delta t + \phi\right) &\stackrel{!}{=} \cos(|\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\gamma - \omega t_0 + \phi), \end{aligned} \tag{5.33}$$

mit γ dem Winkel zwischen $\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}$. Wir schreiben weiter

$$|\mathbf{k}||\mathbf{r}+\mathbf{\Delta r}|\cos\gamma = |\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\gamma + |\mathbf{k}|\underbrace{|\mathbf{\Delta r}|\cos\gamma}_{=\Delta x}.$$

Die Gleichung (5.33) wird erfüllt sein, wenn

$$|\mathbf{k}|\Delta x - \omega\Delta t = 0$$

oder

$$\Delta t = \frac{|\mathbf{k}|\Delta x}{\omega}$$

erfüllt ist. Nach einer Zeitspanne Δt hat sich somit die Wellenfront um Δx längs $\mathbf{k}$ weiterbewegt. Für $\Delta t = 1$ erhalten wir schließlich:

$$\Delta x = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|c}{|\mathbf{k}|} = c.$$

Die Wellenfront bewegt sich also mit der Geschwindigkeit c in Richtung von $\mathbf{k}$. Wir nennen nun $\mathbf{k}$ den **Wellenvektor**, $|\mathbf{k}|$ die **Wellenzahl**, und den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ in Richtung von $\mathbf{k}$ die **Ausbreitungsrichtung**.

Der Abstand zweier Wellenfronten (für $t = konst.$) zur gleichen Amplitude wird **Wellenlänge** genannt und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \cos(|\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\gamma + konst) &= \cos(|\mathbf{k}||\mathbf{r} + \mathbf{\Delta r}|\cos\gamma + konst + 2\pi) \\ |\mathbf{k}|\underbrace{|\mathbf{\Delta r}|\cos\gamma}_{=\lambda} &= 2\pi, \end{aligned}$$

oder

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}.$$

Wir erhalten dann die **Periode**, also die Zeit, die benötigt wird, um um die Wellenlänge fortzuschreiten, mit

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

woraus sich die **Frequenz** $\nu = 1/T = c/\lambda$ und die **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi\nu = |\mathbf{k}|c$ ergibt.

Aus diesen Ergebnissen ist zu ersehen, daß ebene Wellen in ihren Eigenschaften sehr direkt den Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung entsprechen. Wählen wir noch $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$, so finden wir völlige Übereinstimmung.

Wegen der beliebigen Phase ϕ ist auch, wie bereits früher,

$$f(\mathbf{r}, t) = \Re\mathrm{e}\left\{Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}, \qquad A \in \mathbb{C}$$

Lösung der Wellengleichung (5.32).

Kugelwellen

Dieser Wellentyp stellt die zweite, wichtige Klasse von periodischen Lösungen dar:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{r}\cos(kr - \omega t + \phi) \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{\frac{1}{r}e^{i(kr-\omega t+\phi)}\right\}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

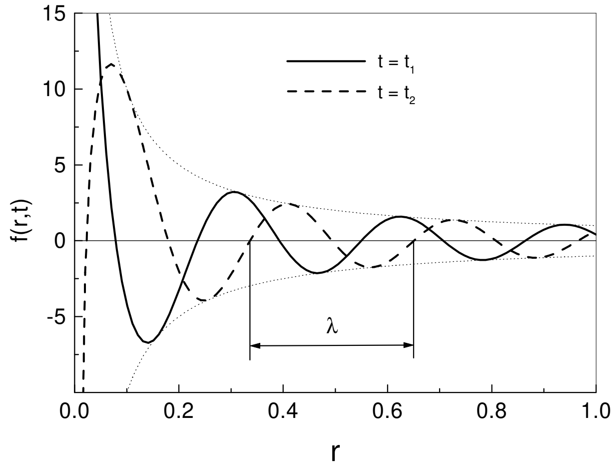


Abbildung 5.3: Die Kugelwelle.

mit $|\omega| = c|k|$, dem Skalar k und $r = |\mathbf{r}|$.

Wir zeigen zunächst, daß (5.34) tatsächlich Lösung der Wellengleichung (5.32) ist und gehen dazu auf Kugelkoordinaten über. Es gilt

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial r}\right),$$

da $f(\mathbf{r}, t)$ nach (5.34) winkelunabhängig ist, also $\partial f(\mathbf{r}, t)/\partial\vartheta = \partial f(\mathbf{r}, t)/\partial\varphi = 0$. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial r} &= \Re\mathrm{e}\left\{\left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{i(kr-\omega t+\phi)}\right\} \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial r}\right) &= \Re\mathrm{e}\left\{[ik + (ikr-1)ik]\, e^{i(kr-\omega t+\phi)}\right\} \\
&= -\Re\mathrm{e}\left\{k^2 r e^{i(kr-\omega t+\phi)}\right\}.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = -\Re\mathrm{e}\left\{\frac{k^2}{r} e^{i(kr-\omega t+\phi)}\right\} = -k^2 f(\mathbf{r}, t).$$

Da weiters

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(\mathbf{r}, t)$$

ist, folgt unmittelbar für $k^2 = \omega^2/c^2$, oder $|k|c = |\omega|$, daß (5.32) erfüllt ist.

Die Lösungen (5.34) haben folgende Eigenschaften:

1. **Wellenfronten** sind durch $kr - \omega t + \phi = konst.$ definiert, und sind somit **Kugelflächen**, die sich mit der Phasengeschwindigkeit c vom

Ursprung fortbewegen (als auslaufende Wellen), bzw. sich auf den Ursprung zubewegen (als einlaufende Wellen).

2. Bezeichnen wir den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nulldurchgängen als **Wellenlänge** (siehe Abb. 5.3), so sehen wir, daß sie wie bereits früher durch $\lambda = 2\pi/|k|$ gegeben ist. Die Welle ist nunmehr aber räumlich nicht mehr periodisch, da die Auslenkung wie $1/r$ abfällt. Es gilt noch $f(r) = 0, \quad \to f(r + n\lambda) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$, nicht aber $f(r) = f(r + n\lambda), \quad n \in \mathbb{N}$!

3. Schließlich wollen wir noch das Integral des Quadrats einer solchen Kugelwelle über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R bestimmen:

$$\begin{aligned} \int dA\, f^2 &= \int d\Omega R^2 \frac{1}{R^2} \cos^2(kR - \omega t + \phi) \\ &= 4\pi \cos^2(kR - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

   Dieses Ergebnis zeigt ein im wesentlichen von R unabhängiges Verhalten: es bleibt für alle R nach oben auf 4π beschränkt und überstreicht für beliebige Werte von R im Laufe der Zeit alle Werte $[0, 4\pi]$.

5.5.3 Vektorwellen

Wir betrachten nun Vektorfelder, welche der homogenen Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.35}$$

genügen. In dieser Gleichung genügt *jede Komponente* des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ für sich einer skalaren Wellengleichung (zumindest in kartesischen Koordinaten). Folglich liefert der Ansatz

$$A_i(\mathbf{r}, t) = \Re\mathrm{e} \left\{ A_i^0 e^{i(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega_i t)} \right\}$$

die Lösung für die Komponenten des Vektorfeldes, woraus dann die Lösung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{3} A_i \mathbf{e}_i = \Re\mathrm{e} \left\{ \sum_{i=1}^{3} A_i^0 \mathbf{e}_i e^{i(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega_i t)} \right\} \tag{5.36}$$

für das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ konstruiert werden kann. Dabei sind ω_i und $\mathbf{k}_i$ für jede Komponente verschieden, A_i^0 ist eine beliebige komplexe Zahl, und die Relation

$$|\omega_i| = c|\mathbf{k}_i|$$

muß erfüllt sein.

Es erweist sich jedoch als *ausreichend*, und auch zweckmäßig, sich auf Wellen der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \Re\mathrm{e}\left\{\mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} \tag{5.37}$$

zu beschränken, in welcher $\mathbf{k}$ und damit ω für alle Komponenten von $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ diesselben sind. Die allgemeinere Lösung läßt sich aus Vektorfeldern vom Typ (5.37) erzeugen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{allg.}(\mathbf{r},t) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}^{(j)}(\mathbf{r},t) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \Re\mathrm{e}\left\{\mathbf{A}^{0(j)} e^{i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_j t)}\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \Re\mathrm{e}\left\{\sum_{k=1}^{3} A_k^{0(j)} \mathbf{e}_k e^{i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_j t)}\right\}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\mathbf{A}^{0(i)} = A_i^0 \mathbf{e}_i$ ($\mathbf{A}^{0(i)}$ hat also nur eine Komponente in Richtung $\mathbf{e}_i$) und wählen $A_k^{0(i)} = A_{ik}^0 \delta_{ik}$; damit sind nur die Diagonalelemente von Null verschieden. Somit folgt

$$\mathbf{A}^{allg.}(\mathbf{r},t) = \Re\mathrm{e}\left\{\sum_{j=1}^{3} A_{jj}^0 \mathbf{e}_j e^{i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_j t)}\right\}.$$

Setzt man schließlich $A_{ii}^0 = A_i^0$ aus (5.36), so sieht man die Übereinstimmung der beiden Darstellungsformen.

Es sei abschließend noch darauf hingewiesen, daß nur (5.37) - und nicht (5.36) - bei Koordinatendrehungen wie ein Vektor transformiert. Somit ist durch (5.37) eine **Vektorwelle** definiert.

$\mathbf{A}^0$ in (5.37) wird der **Amplitudenvektor** genannt. Man kann ihn in jede orthonormale Basis entwickeln, also insbesonders in eine, deren $\mathbf{e}_3$-Komponente in Richtung von $\mathbf{k}$ zeigt:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \hat{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \perp \hat{\mathbf{k}}.$$

Dann ist die Komponente A_3^0 die Amplitude der Vektorwelle in Ausbreitungsrichtung, und A_1^0, A_2^0 sind die Amplituden senkrecht zu $\mathbf{k}$. Ist nun, ganz speziell, $\mathbf{A}^0$ parallel zu $\mathbf{k}$, so schwingt die Welle in Ausbreitungsrichtung, und man spricht von einer **longitudinalen Welle**. Ist hingegen $\mathbf{A}^0$ senkrecht zu $\mathbf{k}$, also $\mathbf{A}^0\mathbf{k} = 0$, so finden die Auslenkungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung statt, und man spricht von einer **transversalen Welle**.

Wie wir noch später sehen werden, sind freie elektromagnetische Wellen stets transversale Wellen. Diese besitzen ein weiteres Charakteristikum: die

Polarisation, welche mit der relativen Phase der komplexen Amplituden $\mathbf{A}_1^0$ und $\mathbf{A}_2^0$ zusammenhängt. Um dies zu zeigen, schreiben wir $\mathbf{A}$ zunächst als

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Re\mathrm{e}\left\{\mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{\left(A_1^0\mathbf{e}_1 + A_2^0\mathbf{e}_2\right) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{\left(|\mathbf{A}_1^0|e^{i\phi_1}\mathbf{e}_1 + |\mathbf{A}_2^0|e^{i\phi_2}\mathbf{e}_2\right) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}. \end{aligned}$$

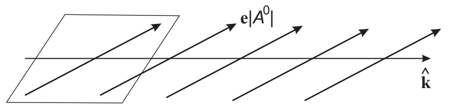
Wir untersuchen zuerst den Fall $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, oder um π verschieden, also $\phi_1 = \phi_2 + \pi$. Damit ergibt sich:

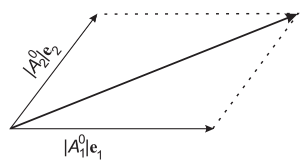
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Re\mathrm{e}\left\{\left(|\mathbf{A}_1^0|\mathbf{e}_1 + |\mathbf{A}_2^0|\mathbf{e}_2\right) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)}\right\}, \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi \\ \mathbf{A} &= \Re\mathrm{e}\left\{\left(|\mathbf{A}_1^0|\mathbf{e}_1 + |\mathbf{A}_2^0|\mathbf{e}_2\,\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}\right) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi_1)}\right\}, \quad \phi_1 = \phi_2 + \pi. \end{aligned}$$

Also

$$\mathbf{A} = \Re\mathrm{e}\left\{\left(|\mathbf{A}_1^0|\mathbf{e}_1 \pm |\mathbf{A}_2^0|\mathbf{e}_2\right) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)}\right\};$$

damit gibt es genau eine wohldefinierte Richtung $\mathbf{e}$ auf der Normalebene zu $\hat{\mathbf{k}}$, in der die Welle unabhängig von $\mathbf{r}$ und t schwingt. Eine solche Welle nennt man **linear polarisiert** und ihre Amplitude ist durch





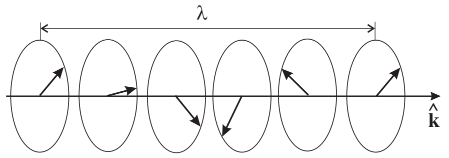
$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^0| &= \sqrt{|\mathbf{A}_1^0|^2 + |\mathbf{A}_2^0|^2} \\ &= \sqrt{\mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_1^{0\star} + \mathbf{A}_2^0\mathbf{A}_2^{0\star}} \end{aligned}$$

gegeben, wenn $\mathbf{A}_i^{0\star}$ das konjugiert komplexe zu $\mathbf{A}_i^0$ ist.

Der zweite Fall ergibt sich mit $|\mathbf{A}_1^0| = |\mathbf{A}_2^0| = |\mathbf{A}^0|$ und $\phi_1 - \phi_2 = \pm\pi/2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Re\mathrm{e}\left\{|\mathbf{A}^0|\mathbf{e}_1 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi_1)} + |\mathbf{A}^0|\mathbf{e}_2 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi_1\mp\pi/2)}\right\} \\ &= \Re\mathrm{e}\left\{|\mathbf{A}^0|e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi_1)}\underbrace{\left(\mathbf{e}_1 + e^{\mp i\pi/2}\mathbf{e}_2\right)}_{=\mathbf{e}_1\pm i\mathbf{e}_2}\right\} \\ &= |\mathbf{A}^0|\left\{\cos(\mathbf{kr}-\omega t+\phi_1)\mathbf{e}_1 \pm \sin(\mathbf{kr}-\omega t+\phi_1)\mathbf{e}_2\right\}. \end{aligned}$$

Die Schwingungsrichtung ist nicht länger unabhängig von der Phase. Vielmehr beschreibt die "Spitze" des Vektors $\mathbf{A} = (A_1, A_2, 0)$ eine Kreisspirale der Ganghöhe λ und mit der Ausbreitungsrichtung $\hat{\mathbf{k}}$. Diese Spirale wird für $\Delta\phi = \pi/2$ als Rechts- (*positive Helizität*), und für $\Delta\phi = -\pi/2$ als Linksspirale (*negative*



Helizität) durchlaufen. Halten wir $\mathbf{r}$ fest, so durchläuft die Welle mit konstanter Winkelgeschwindikeit ω einen Kreis vom Radius $|\mathbf{A}^0|$. Deswegen bezeichnet man diese Welle auch als **rechts-** bzw. **links-zirkular polarisiert**.

Ist eine transversale Welle weder linear noch zirkular polarisiert, so kann man zeigen, daß die Spitze von $\mathbf{A}$ für konstantes $\mathbf{r}$ in der Normalebene zu $\hat{\mathbf{k}}$ eine Ellipse durchläuft. Man spricht von einer **elliptisch polarisierten** Welle.

5.6 Freie elektromagnetische Wellen

Wir wollen nun zeigen, daß die im vorhergehenden Kapitel näher untersuchten ebenen Wellen nicht nur die skalare und vektorielle, homogene Wellengleichung für $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ lösen, sondern auch die MAXWELL-Gleichungen selbst, sofern $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ identisch verschwinden. Dies ist dann gleichbedeutend mit der *Existenz elektromagnetischer Wellen*, welche sich, einmal angeregt, im Vakuum fortpflanzen.

Um dies zu zeigen, können grundsätzlich drei Wege beschritten werden:

1. Aus $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\phi(\mathbf{r}, t)$ wird durch Differentiation $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ gewonnen.

2. Wir können die quellfreien MAXWELL-Gleichungen ineinander einsetzen und zeigen, daß die Felder selbst Wellengleichungen erfüllen.

3. Wir setzen für $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ einfach ebene Wellen an und zeigen, daß dieser Ansatz unter gewissen Bedingungen die MAXWELL-Gleichungen erfüllt.

Wir wollen hier dem dritten Weg folgen. Dazu ist eine Vorbemerkung wesentlich: die MAXWELL-Gleichungen sind linear, also werden Real- und Imaginärteil komplex angesetzter Lösungen nicht gemischt (Superposition von Real- und Imaginärteil). Finden wir daher, daß die komplexen Wellen Lösungen der MAXWELL-Gleichungen sind, so können wir mit ihnen rechnen, und den Übergang zum Realteil erst am Ende der Rechnung vollziehen (solange wir nur *lineare* Transformationen durchführen). Eine solche Vorgangsweise erleichtert den Rechenaufwand beträchtlich.

Zunächst bilden wir systematisch die verschiedenen Ableitungen einer ebenen, komplexen Vektorwelle, welche noch oft genug benötigt werden. Die Welle ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

gegeben. Es gilt dann

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} = -i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \tag{5.38}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= -i\omega(-i\omega)\mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = -\omega^2 \mathbf{A}(\mathbf{r},t), && (5.39)\\
\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{div}\left[\mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right]\\
&= \mathbf{A}^0 \nabla e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\\
&= \mathbf{A}^0 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\exp\left\{i\left(\sum_{j=1}^{3} k_j r_j - \omega t\right)\right\}, \frac{\partial}{\partial x_2}\cdots, \frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\right)\\
&= \mathbf{A}^0 \left(ik_1 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, ik_2\cdots, ik_3\cdots\right)\\
&= \mathbf{A}^0 i\mathbf{k} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = i\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{r},t), && (5.40)\\
\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \nabla^2\left(\mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right)\\
&= \left(\nabla^2 A_1^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \nabla^2 A_2^0\cdots, \nabla^2 A_3^0\cdots\right)\\
&= \left(A_1^0 \mathrm{div}\,\mathrm{grad} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \ldots, \ldots\right)\\
&= \left(A_1^0 \mathrm{div}\left[i\mathbf{k} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right], \ldots, \ldots\right)\\
&= \left(A_1^0 i\mathbf{k}\,\mathrm{grad} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \ldots, \ldots\right)\\
&= \left(-A_1^0 \mathbf{kk} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \ldots, \ldots\right)\\
&= -(\mathbf{kk})\mathbf{A}(\mathbf{r},t), && (5.41)\\
\mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \nabla \times \mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\\
&= -\mathbf{A}^0 \times \nabla e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\\
&= -\mathbf{A}^0 \times i\mathbf{k} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\\
&= i\left(\mathbf{k} \times \mathbf{A}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right)\\
&= i\left[\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]. && (5.42)
\end{aligned}
$$

Nun sind die Vorarbeiten geleistet, welche uns zu überprüfen erlauben, ob die Vektorwelle die homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt. Wir verwenden den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}^0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}
\end{aligned}
$$

und untersuchen die Gleichung (5.1):

$$
\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \quad \stackrel{(5.40)}{\longrightarrow} \quad \mathbf{kE}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{5.43}
$$

und daraus folgt unmittelbar $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \perp \mathbf{k}$! Weiters ergibt (5.2)

$$
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0
$$

mit (5.38) und (5.42)

$$
i\left[\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right] - \mu_0\varepsilon_0\left[-i\omega\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right] = 0,
$$

woraus

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\omega\mu_0\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{5.44}$$

folgt. Weiters ergibt (5.3) analog zu (5.43):

$$\mathbf{kB}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{5.45}$$

womit auch $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{k}$ gilt. Schließlich benützen wir (5.4) zusammen mit (5.38) und (5.42) und erhalten

$$i\,[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] + [-i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{0},$$

oder

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \omega\mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \tag{5.46}$$

Es folgt unmittelbar aus (5.43) und (5.45), daß die ebenen Wellen, welche das **E**- und **B**-Feld beschreiben, **transversal** sein müssen, um die MAXWELL-Gleichungen erfüllen zu können.

Wir multiplizieren noch (5.44) und (5.46) vektoriell mit $\mathbf{k}$ und setzen die beiden Gleichungen ineinander ein:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] &= -\mu_0\varepsilon_0\omega\,[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \\
&= -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\
\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= \omega\,[\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \\
&= -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t).
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{ab}) - \mathbf{b}(\mathbf{aa}),$$

und weiters folgt wegen (5.43) und (5.45) $\mathbf{ab} = 0$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\left(\mathbf{kk} - \mu_0\varepsilon_0\omega^2\right) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\left(\mathbf{kk} - \mu_0\varepsilon_0\omega^2\right) &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, daß ebene Wellen die MAXWELL-Gleichungen dann und nur dann lösen, wenn

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}|\mathbf{k}| = \pm c_0|\mathbf{k}| \tag{5.47}$$

erfüllt ist. (Andernfalls müssen die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ identisch verschwinden.) Die Beziehung (5.47) entspricht wieder dem bereits unter (5.30) genannten Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahl. c_0 erweist sich somit als *Phasengeschwindigkeit* der freien elektromagnetischenWelle im *Vakuum*; weiters ist c_0 von der Frequenz und der Wellenlänge unabhängig.

Licht ist aber nun eine solche elektromagnetische Welle, und folglich ist c_0 nichts anderes als die **Vakuumlichtgeschwindigkeit**.

Es folgt aber weiter aus (5.46), daß

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\omega}\left[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right] \tag{5.48}$$

ist, und damit steht $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ nicht nur auf $\mathbf{k}$ (wegen $\mathbf{k}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$) senkrecht, sondern auch auf $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Diese Beziehung gilt getrennt sowohl für den Real- als auch für den Imaginärteil der komplexen Wellen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{B}' + i\mathbf{B}'' \\
\mathbf{E} &= \mathbf{E}' + i\mathbf{E}'' \\
\mathbf{k}(\mathbf{B}' + i\mathbf{B}'') &= \mathbf{k}\mathbf{B}' + i\mathbf{k}\mathbf{B}'' = 0 \\
\longrightarrow \quad \mathbf{k}\mathbf{B}' &= \mathbf{k}\mathbf{B}'' = 0,
\end{aligned}$$

und Analoges für $\mathbf{E}$. Daraus folgt wegen (5.48) notwendig: $\mathbf{B}' \perp \mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'' \perp \mathbf{E}''$. Wegen (5.46) und $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ folgt auch

$$|\mathbf{B}(\mathbf{r},t)| = \frac{|\mathbf{k}|}{|\omega|}\,|\mathbf{E}| = \frac{1}{c_0}\,|\mathbf{E}|\,.$$

Bestimmt man daraus das Verhältnis von $|\mathbf{E}|$ zu $|\mathbf{H}|$, so erhält man:

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

Die Dimension dieser Größe ist

$$\left(\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}}\right)^{1/2} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega \text{ (Ohm)},$$

und dies ist die Dimension eines Widerstandes. Man spricht vom **Wellenwiderstand** des Vakuums, welcher den Wert 376.73 Ω hat.

Nun hat natürlich $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, wie auch $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, als transversale Vektorwelle eine bestimmte Polarisation. Wegen (5.48) ist der Typ der Polarisation für beide gleich.

Es ist somit in diesem Abschnitt gelungen die Existenz von ebenen, elektromagnetischen Wellen als Lösungen der quellenfreien MAXWELL-Gleichungen zu beweisen und alle wesentliche Eigenschaften dieser Lösungen kennenzulernen.

5.7 Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

5.7.1 Grundsätzliches

Die ebenen Wellen sind spezielle Lösungen der Wellengleichung, und als solche besonders wichtig, weil mit ihnen, aufgrund der Linearität der Wellengleichung, *alle anderen* Lösungen aufgebaut werden können. Dies kann durch Einführung des mathematischen Konzeptes der FOURIER**schen Integraltransformation**[2] gezeigt werden.

Zunächst aber noch einige Bemerkungen zur eindimensionalen Wellengleichung. Wir wissen, daß die (komplexwertigen) Funktionen

$$\phi^{\pm}(k,t) = e^{i(kx \pm c|k|t)}$$

die Wellengleichung für jedes k lösen. Da die Wellengleichung linear ist, ist auch jede Linearkombination

$$h(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n} a(k_\nu)\phi^+(k_\nu,t) + \sum_{\mu=1}^{m} b(k_\mu)\phi^-(k_\mu,t), \quad a(k_\nu), b(k_\mu) \in \mathbb{C}$$

Lösung der Wellengleichung. Ja sogar die "kontinuierlichen Linearkombinationen"

$$h(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, a(k)\phi^+(k,t) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, b(k)\phi^-(k,t) \tag{5.49}$$

mit beliebigen komplexwertigen Funktionen $a(k)$ und $b(k)$ besitzen diese Eigenschaft.

Es stellen sich nun folgende Fragen:

1. Wie unterscheiden sich die durch (5.49) dargestellten Lösungen von der *beliebigen* Lösung $f(x \pm ct)$? - Gar nicht! - Jede beliebige Lösung ($f(x \pm ct)$ (mit nicht ganz pathologischen Eigenschaften im Unendlichen) läßt sich als ein solches Integral schreiben.

2. Wenn man, angenommen, die Lösung kennt, wie sehen dann die Funktionen $a(k)$ und $b(k)$ aus?

[2] F. Schürrer, *Distributionen, Fouriertransformationen, Greensche Funktionen*, Skriptum zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER THEORETISCHEN PHYSIK, Graz (1996), Seite 58 ff.

5.7.2 Bemerkungen zur FOURIERschen Integraltransformation

Antwort auf die oben formulierten Fragen gibt die Fouriersche Integraltransformation (Fouriertransformation). Um dies zu zeigen, führen wir die reell- oder komplexwertige Funktion $f(x)$ ein, welche auf der gesamten x-Achse definiert ist. Dieser Funktion ordnen wir “als Ganzes” mittels

$$f(x) \longmapsto \mathcal{FT}\{f(x)\} = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \tag{5.50}$$

eine auf $-\infty \leq k \leq \infty$ definierte Funktion $\tilde{f}(k)$ zu. Sie heißt die **Fouriertransformierte** von $f(x)$ oder **Spektraldichte** von $f(x)$. Hiezu muß natürlich obiges Integral für alle k existieren. Dazu ist wiederum notwendig, daß $f(x)$ für alle $|x| \to \infty$ hinreichend schnell verschwindet.

Es sei nun $\mathcal{C}^F$ eine Klasse fouriertransformierbarer Funktionen und weiters sei $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Es bildet dann

a) $\mathcal{C}^F$ einen **linearen Raum** bezüglich der Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x), \qquad f(x), g(x) \in \mathcal{C}^{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

b) Die Fouriertransformation $\mathcal{FT}$ ist eine **lineare** Abbildung:

$$\mathcal{FT}\{\lambda f + \mu g\} = \lambda \mathcal{FT}\{f\} + \mu \mathcal{FT}\{g\}\,.$$

Damit gilt

$$\mathcal{FT}\{f+g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[f(x) + g(x)\right] = \tilde{f}(k) + \tilde{g}(k), \quad \tilde{f}(k), \tilde{g}(k) \in \tilde{\mathcal{C}}^F,$$

und der Raum der fouriertransformierten Funktionen $\tilde{\mathcal{C}}^F$ bildet auch einen **linearen Raum**. Damit ist aber auch der Übergang zur Fouriertransformierten eine **lineare Abbildung** von $\mathcal{C}^F$ auf $\tilde{\mathcal{C}}^F$:

$$\begin{aligned} \mathcal{FT}: \quad \mathcal{C}^F &\longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}^F \\ f &\longmapsto \tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Das Nullelement von $\mathcal{C}^F$ ist $f(x) = 0$ und das inverse Element ist durch $g(x) = -f(x)$ gegeben. Aufgrund von (5.51) existiert dann in $\tilde{\mathcal{C}}^F$ das Nullelement $\tilde{f}(k) = 0$ und das inverse Element $\tilde{g}(k) = -\tilde{f}(k)$.

Es stellt sich nun die Frage nach der Umkehrbarkeit der Fouriertransformation: ist es möglich von $\tilde{f}(k)$ auf $f(x)$ rückzuschließen? Die Antwort wird durch folgenden Satz gegeben:

Satz 5.3 *Existiert das Integral*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k), \tag{5.52}$$

so ist die Fouriertransformation umkehrbar und die Umkehrung wird durch (5.52) beschrieben. Dies ist das FOURIER**sche Umkehrtheorem**.

Dies ist aber nichts anderes als die Fouriertransformierte von $\tilde{f}(-k)$:

$$\mathcal{FT}\{f(x)\} = \tilde{f}(k), \qquad \mathcal{FT}\left\{\tilde{f}(-k)\right\} = f(x).$$

Auch ist die Form des Umkehrtheorems bemerkenswert: da alle Funktionen e^{ix} in x periodisch sind, bedeutet dies, daß alle Funktionen $f(x)$ als kontinuierliche Überlagerung von periodischen Funktionen dargestellt werden. Dabei muß aber $f(x)$ keineswegs periodisch sein. (Ganz im Gegenteil! Wir haben ja gesehen, daß die Fouriertransformierte besonders dann existiert, wenn $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ gilt.) Dies ist ein wichtiger Unterschied zur diskreten Überlagerung

$$g(x) = \sum_n \tilde{g}_n e^{ik_n x}, \tag{5.53}$$

wo über endlich, oder unendlich, viele n summiert wird. Liegen dabei die k_n äquidistant auf der k-Achse, gilt also für irgendein k_0, $\quad k_n = nk_0$, so ist $g(x)$ selbst **periodisch** mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_0$. Die $g(x)$ definierende Summe (5.53) ist dann eine **Fourier-Reihe**. Werden hingegen die k_n willkürlich gewählt, sodaß sie insbesonders in irrationalen Verhältnissen zueinander stehen, so bezeichnet man $g(x)$ als **fastperiodische** Funktion. In beiden Fällen gilt aber, daß $g(x)$ für $|x| \to \infty$ unter keinen Umständen verschwinden kann! Eine solche Möglichkeit entsteht erst durch den Übergang zur kontinuierlichen Überlagerung durch eine Fouriersche Integraltransformation.

Der Integralsatz (5.52) verwendet einen interessanten Begriff der Gleichheit. Daß es sich dabei nicht um **punktweise** Gleichheit handeln kann, wird aus folgendem Beispiel unmittelbar klar: wir betrachten die Funktion

$$f^\alpha(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \alpha & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Ihre Fouriertransformierte ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\alpha(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} dx\, e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{i}{k\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ik} - e^{ik}\right) = \frac{2\sin k}{k\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

In diesem Ergebnis kommen die Randwerte α nicht mehr vor und $\tilde{f}^{\alpha}(k)$ ist die Fouriertransformierte aller (kontinuierlich vielen) Funktionen $f^{\alpha}(x)$ mit beliebigem α. Der Gleichheitsbegriff ist also so gestaltet, daß durch Integration verloren gegangene Eigenschaften kein Kriterium für die Gleichheit sind. Wir können nun aber auch nicht mehr erwarten, daß durch die Umkehrtransformation dieses α in Erscheinung tritt. Wir können somit nur dann von einer Umkehrtransformation sprechen, wenn wir einen Gleichheitsbegriff verwenden, der von vornherein alle (punktweise ungleichen) Funktionen $f^{\alpha}(x)$ als gleich ansieht.

Eine solche Gleichheitstransformation kann man zum Beispiel durch **Gleichheit im Mittel**

$$f_1 = f_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, |f_1(x) - f_2(x)|^p = 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

erreichen. Es folgt also aus der punktweisen Gleichheit auch die Gleichheit im Mittel, doch gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht, sondern nur noch für stetige Funktionen. Unstetige Funktionen (wie in unserem Beispiel) müssen nun nur noch "fast überall" übereinstimmen, also bis auf eine *Menge vom Maß Null.* (Erweiterter Integralbegriff nach LEBESGUE.) Da aber jede im Riemannschen Sinne integrable Funktion - und auch mit demselben Resultat - im Lebesgueschen Sinne integrabel ist, brauchen wir uns für praktische Zwecke mit diesen Feinheiten aber nicht auseinanderzusetzen.

Es stellt sich aber nun die sehr komplizierte Frage nach der Klasse von Funktionen, für welche das Umkehrintegral (5.52) überhaupt existiert. Die wichtigste Klasse bilden die **quadratintegrablen** Funktionen, die Klasse $\mathcal{L}^2$, und für sie gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x)|^2 < \infty$$

(im Lebesgueschen Sinne). Alle diese Klassen sind aber unbequem klein. (Nicht einmal $f(x) = 1$ hat darin Platz!)

Man stellt daher die Fouriertransformation im Rahmen der Theorie verallgemeinerter Funktionen dar. Dazu erweitert man die Definition der Fouriertransformation auf

$$\tilde{f}(k) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx-\varepsilon x^2} f(x). \tag{5.54}$$

Dies ergibt für alle Funktionen $f(x)$, für welche bereits ein $\tilde{f}(k)$ im ursprünglichen Sinne nach (5.50) existiert, das alte Resultat. Hingegen existiert der Limes, wegen des konvergenzerzeugenden Faktors $e^{-\varepsilon x^2}$ häufig auch dann, wenn das ursprüngliche Integral nicht definiert ist. Ein typisches Beispiel hiefür ist die Funktion $f(x) = 1$ mit der Fouriertransformation:[3]

$$f(x) = 1 \quad \mapsto \quad \tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k),$$

mit $\delta(k)$, der Diracschen Deltadistribution zum Argument k.

Mit (5.54) wurde die Fouriertransformation erweitert und das Verfahren wurde unsymmetrisch insoferne, als wir nun für $f(x)$ gewöhnliche Funktionen zulassen und dafür als Fouriertransformierte Distributionen erhalten. Wollen wir wieder Symmetrie herstellen, indem wir auch für $f(x)$ verallgemeinerte Funktionen zulassen, so ist dies zwar möglich - $f(x) = \delta(x) \quad \mapsto \quad \tilde{f}(k) = 1/\sqrt{2\pi}$ - doch gilt dann nicht das Umkehrtheorem in der Gestalt (5.52). Wir erweitern daher zu dem

Satz 5.4 *Wenn der Limes der Folge*

$$f(x) = \lim_{\eta \to +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx - \eta k^2} \tilde{f}(k) \tag{5.55}$$

existiert, ist die Fouriertransformation **umkehrbar** *und die ursprüngliche Funktion ist durch (5.55) gegeben.*

Zusammengefaßt erhalten wir folgende, wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation:

1. Die Fouriertransformation ist linear:

$$\mathcal{FT}\{af(x) + bg(x)\} = a\tilde{f}(k) + b\tilde{g}(k), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

2.

$$f(x) \mapsto \tilde{f}(k) \quad \Rightarrow \quad f(ax+b) \mapsto \frac{e^{ikb/a}}{|a|}\tilde{f}(k/a).$$

3. Selbst wenn $f(x)$ reellwertig ist, ist $\tilde{f}(k)$ im allgemeinen komplexwertig, und es gilt dann

$$f^\star(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}^\star(k) = -\tilde{f}(-k).$$

[3] F. Schürrer, *Distributionen, Fouriertransformationen, Greensche Funktionen*, Skriptum zur Vorlesung Mathematische Methoden der Theoretischen Physik, Graz (1996), Seite 65 ff.

4. Ist $f(x)$ symmetrisch, oder antisymmetrisch, so besitzt auch $\tilde{f}(x)$ diese Eigenschaft:

$$f(-x) = \pm f(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(-k) = \pm \tilde{f}(k).$$

Damit folgt aus den Punkten 3 und 4: die Spektraldichte einer symmetrischen, rellen Funktion ist reell, die einer antisymmetrischen, rellen Funktion, rein imaginär.

5. Die Funktion

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x - x')g(x') \tag{5.56}$$

nennt man das **Faltungsprodukt** von f und g. Man schreibt formal:

$$h = f \star g.$$

Satz 5.5 Faltungstheorem:
Die Fouriertransformierte des Faltungsproduktes ist das Produkt der Fouriertransformierten von f und g multiplziert mit $\sqrt{2\pi}$:

$$h = f \star g \quad \mapsto \quad \tilde{h} = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \tilde{g}. \tag{5.57}$$

Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Theorems ist natürlich die Existenz des Faltungsproduktes (5.56) - notfalls im Sinne von:

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, e^{-\varepsilon x'^2} f(x - x') \, g(x'). \tag{5.58}$$

Ein solches Faltungsintegral ist uns bereits in Abschnitt 3.3.2, in welchem die freie Greensche Funktion und das Poissonsche Integral behandelt wurden, in Gleichung (3.26) begegnet.

Das Theorem ist auch von besonderer Bedeutung bei der Lösung von linearen Integralgleichungen des Typs

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, h(x - x') \, f(x').$$

Wir bilden die Fouriertransformierte:

$$\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k) + \sqrt{2\pi} \tilde{h}(k) \tilde{f}(k),$$

und lösen nach $\tilde{f}(k)$ auf:

$$\tilde{f}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{1 - \sqrt{2\pi} \tilde{h}(k)}.$$

Durch Rücktransformation von $\tilde{f}(k)$ erhält man dann die gesuchte Lösung.

6. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist durch

$$f(x) \mapsto \tilde{f}(k) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \mapsto ik\tilde{f}(k) \tag{5.59}$$

gegeben. Dies kann dazu benützt werden, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen überzuführen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j \frac{d^j}{dx^j} \right) f(x) &= g(x) \\ \mathcal{FT}: \quad \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (ik)^j \tilde{f}(k) &= \tilde{g}(k) \\ \tilde{f}(k) \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j (ik)^j}_{=P^n(k)} &= \tilde{g}(k) \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{P^n(k)},$$

mit $P^n(k)$ einem Polynom n-ter Ordnung in k. Daraus folgt durch Umkehrtransformation die Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \frac{\tilde{g}(k)}{P^n(k)}.$$

7. Die Wahl des Vorzeichens in $e^{\pm ikx}$ ist willkürlich. Lediglich bei Hin- und Rücktransformation muß ein Vorzeichenwechsel stattfinden. So trifft man etwa bei Zeitfunktionen $f(t)$ folgende Vereinbarung:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t) \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega). \end{aligned} \tag{5.60}$$

Ähnliches gilt für die Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$ vor dem Integral. Wichtig ist, daß das Produkt aus Hin- und Rücktransformation in einer Dimension den Faktor $(2\pi)^{-1}$ ergibt.

5.7.3 Erweiterung auf Funktionen mehrerer Variabler

Es sei $f(\mathbf{r},t) = f(x_1,x_2,x_3,t)$, dann ist offenbar

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) &= \tilde{f}(k_1,k_2,k_3,\omega) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{-ik_1x_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{-ik_2x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_3\, e^{-ik_3x_3} \\
&\quad\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} f(x_1,x_2,x_3,t) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3r dt\, e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} f(\mathbf{r},t); \qquad (5.61)
\end{aligned}
$$

die Umkehrtransformation lautet dann:

$$
f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\tilde{f}(\mathbf{k},\omega), \qquad (5.62)
$$

mit den offensichtlichen Erweiterungen auf verallgemeinerte Funktionen.

5.7.4 Die Wellengleichung und die Fouriertransformation

Der eben eingeführte Formalismus der Fouriertransformation steht mit unseren, in Abschnitt 5.7.1 aufgeworfenen Fragen in engstem Zusammenhang. Dies symbolisiert deutlich die Umkehrformel (5.62) mit $f(\mathbf{r},t)$ der Lösung der Gleichung, $\exp\{i(\mathbf{kr}-\omega t)\}$ den ebenen Wellen, und $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$ der Fouriertransformierten der Lösung.

Wir wollen nun in der weiteren Argumentation sehr sorgfältig vorgehen:

- Zunächst, und das wissen wir bereits, gestattet die Fouriertransformation die Darstellung jeder (transformierten) Funktion $f(x)$ durch kontinuierliche Überlagerung periodischer Funktionen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/\left|k\right|$.

- Gleicherweise bedeutet die Formel (5.62), daß man *jede* fouriertransformierbare Orts- und Zeitfunktion durch kontinuierliche Superposition von ebenen Wellen darstellen kann, wobei die $\mathbf{k}_i$ und ω_i unabhängig voneinander alle Werte von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen. (Dies rechtfertigt auch unsere Vorzeichenkonvention bezüglich ω und $\mathbf{kr}$.)

- Soll diese kontinuierliche Superposition ebener Wellen Lösung der homogenen Wellengleichung sein, müssen wir fordern, daß die Beziehung

(5.47) aufrecht bleibt. Wir dürfen also nur solche ebenen Wellen superponieren, die selbst Lösung der Wellengleichung sind. Wir müssen daher in (5.62) $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$ in der Form

$$\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) = \tilde{f}^-(\mathbf{k})\delta(\omega + c\,|\mathbf{k}|) + \tilde{f}^+(\mathbf{k})\delta(\omega - c\,|\mathbf{k}|) \tag{5.63}$$

ansetzen. Damit ist $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$ nur dann von Null verschieden, wenn (5.47) gilt, und $\tilde{f}^+(\mathbf{k})$ und $\tilde{f}^-(\mathbf{k})$ sind frei wählbar, um so die allgemeine Lösung

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k \left\{\tilde{f}^-(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}+c|\mathbf{k}|t)} + \tilde{f}^+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}-c|\mathbf{k}|t)}\right\}$$

der homogenen Wellengleichung zu finden.

Für eine Raumdimension gilt speziell (etwa $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$):

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \left\{\tilde{f}^-(k)e^{i(kx+ckt)} + \tilde{f}^+(k)e^{i(kx-ckt)}\right\} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \left\{\tilde{f}^-(k)e^{ik(x+ct)} + \tilde{f}^+(k)e^{ik(x-ct)}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f^-(x+ct) + f^+(x-ct)\right].
\end{aligned}$$

Nachdem für $\tilde{f}^-(k)$ und $\tilde{f}^+(k)$ jede beliebige fouriertransformierbare Funktion gewählt werden kann und wir wissen, daß die Fouriertransformation bijektiv ist, sind somit auch $f^-(x+ct)$ und $f^+(x-ct)$ beliebige fouriertransformierbare Funktionen mit dem Argument $(x+ct)$ bzw. $(x-ct)$. Dieses Ergebnis haben wir bereits in Abschnitt 5.5.1 auf Seite 103 aufgefunden.

Wir haben diese allgemeine Lösung der Wellengleichung gewonnen, indem wir

- vom Prinzip der Superposition,
- von der Eigenschaft der Fouriertransformation, daß man jede beliebige Funktion als kontinuierliche Überlagerung ebener Wellen darstellen kann, und
- von der Eigenschaft, daß für die Lösungen der Wellengleichung durch ebene Wellen $\omega = \pm c\,|\mathbf{k}|$ gelten muß

Gebrauch gemacht haben.

- Diese Ergebnisse lassen sich auch direkt aus der Wellengleichung gewinnen, indem wir diese fouriertransformieren. Es gilt ja

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = g(\mathbf{r},t).$$

Aus (5.59) und (5.60) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\mathcal{FT}\left\{\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right\} &= -i\omega\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) \\
\mathcal{FT}\left\{\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}\right\} &= -\omega^2\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) \\
\mathcal{FT}\left\{\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\right\} &= ik_i\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) \\
\mathcal{FT}\{\mathrm{grad} f(\mathbf{r},t)\} &= i\mathbf{k}\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) \\
\mathcal{FT}\left\{\nabla^2 f(\mathbf{r},t)\right\} &= \mathcal{FT}\left\{\sum_i \frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial x_i^2}\right\} \\
&= \sum_i \mathcal{FT}\left\{\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial x_i^2}\right\} \\
&= \sum_i \left[-k_i^2\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\right] \\
&= \tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\sum_i(-ik_i^2) = -\mathbf{k}\mathbf{k}\tilde{f}(\mathbf{k},\omega),
\end{aligned}$$

und damit ergibt sich für die fouriertransformierte Wellengleichung:

$$-(\mathbf{k}\mathbf{k})\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) = \tilde{g}(\mathbf{k},\omega)$$

oder

$$-\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\left(\mathbf{k}\mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = \tilde{g}(\mathbf{k},\omega),$$

also eine algebraische Gleichung für $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$.

Wir untersuchen jetzt nur die homogene Gleichung

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\left(\mathbf{k}\mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) &= 0 \\
\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\left(|\mathbf{k}| - \frac{\omega}{c}\right)\left(|\mathbf{k}| + \frac{\omega}{c}\right) &= 0 \\
\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\left(\omega + c\,|\mathbf{k}|\right)\left(\omega - c\,|\mathbf{k}|\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung für $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$ sieht wie folgt aus:

1. $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$ muß überall dort verschwinden, wo $|\mathbf{k}| \neq \pm\omega/c$ ist.
2. An den Stellen $|\mathbf{k}| = \pm\omega/c$ darf $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$ jeden Wert annehmen.

Somit lautet die Lösung

$$\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) = \tilde{f}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + |\mathbf{k}|\,c) + \tilde{f}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - |\mathbf{k}|\,c),$$

mit $\tilde{f}^{\pm}(\mathbf{k})$ frei wählbar. Dieses Ergebnis stimmt völlig mit (5.63) überein. Nur haben wir hier mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung der Wellengleichung erhalten. Diese Lösung ist aber nun auf die Menge fouriertransformierbarer Funktionen beschränkt.

5.7.5 Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung

Wir wenden nun die gewonnenen Ergebnisse auf die elektromagnetischen Wellengleichungen für $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $\phi(\mathbf{r},t)$ an. Diese Gleichungen lauten entsprechend (5.19) und (5.20) im homogenen Fall:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= 0 \\
\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= 0,
\end{aligned}$$

mit der Lorentzeichung

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{t} = 0$$

als Nebenbedingung. Wir erhalten als Lösung der transformierten Wellengleichung

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega) &= \tilde{\phi}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + |\mathbf{k}|\,c_0) + \tilde{\phi}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - |\mathbf{k}|\,c_0) \\
\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) &= \tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + |\mathbf{k}|\,c_0) + \tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - |\mathbf{k}|\,c_0),
\end{aligned} \tag{5.64}$$

weil wir ja für jede Komponente von $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ die Lösung der skalaren Wellengleichung ansetzen dürfen. Nach der Rücktransformation gilt:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega) \\
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega).
\end{aligned}$$

Da nun aber die Lösungen der Lorentzeichung genügen müssen, sind $\tilde{\phi}^{\pm}(\mathbf{k})$ und $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ nicht mehr völlig frei wählbar. Sie müssen vielmehr der Fouriertransformierten der Lorentzeichung

$$i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) + \frac{1}{c_0^2}(-i\omega)\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega) = 0,$$

oder

$$\mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) - \frac{\omega}{c_0^2}\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega) = 0$$

genügen. Wir setzen (5.64) ein:

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}\left[\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + c_0\,|\mathbf{k}|) + \tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - c_0\,|\mathbf{k}|)\right] \\ &\quad - \frac{\omega}{c_0^2}\left[\tilde{\phi}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + c_0\,|\mathbf{k}|) + \tilde{\phi}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - c_0\,|\mathbf{k}|)\right] = 0 \\ &\left[\mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k}) - \frac{\omega}{c_0^2}\tilde{\phi}^{-}(\mathbf{k})\right]\delta(\omega + c_0\,|\mathbf{k}|) \\ &\quad + \left[\mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k}) - \frac{\omega}{c_0^2}\tilde{\phi}^{+}(\mathbf{k})\right]\delta(\omega - c_0\,|\mathbf{k}|) = 0. \end{aligned}$$

Somit müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern für $\omega = c_0\,|\mathbf{k}|$ verschwinden. Dadurch ist auch das Verhältnis von $\mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ zu $\tilde{\phi}^{\pm}(\mathbf{k})$ für *alle* ω festgelegt, da $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ und $\tilde{\phi}^{\pm}(\mathbf{k})$ nicht mehr, wie früher $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$, von ω abhängen. Man findet:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k}) &= \frac{\omega}{c_0^2}\tilde{\phi}^{-}(\mathbf{k}), \quad \omega = -c_0\,|\mathbf{k}| \\ \mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k}) &= \frac{\omega}{c_0^2}\tilde{\phi}^{+}(\mathbf{k}), \quad \omega = c_0\,|\mathbf{k}| \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{-}(\mathbf{k}) &= -c_0\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k}) \\ \tilde{\phi}^{+}(\mathbf{k}) &= c_0\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k}), \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/\,|\mathbf{k}|\,. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Es ist somit $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ frei wählbar und $\tilde{\phi}^{\pm}(\mathbf{k})$ läßt sich aus (5.65) bestimmen.

Die freie Wählbarkeit von $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ kann sogar noch weiter eingeschränkt werden, und dennoch erhält man die allgemeinste Lösung. Es ist nämlich hinreichend $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ **transversal** zu wählen:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})\hat{\mathbf{k}} = 0, \tag{5.66}$$

wobei wegen (5.65) $\tilde{\phi}^{\pm}(\mathbf{k}) = 0$ folgt.

Zum Beweis, daß (5.66) hinreichend ist die allgemeinst mögliche Lösung zu finden, wählen wir $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ zunächst ganz allgemein, bestimmen daraus $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, und werden erkennen, daß die longitudinale Komponente von $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ keinen Feldbeitrag liefert.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \\
&= \mathrm{rot}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \\
&\quad \times \left\{\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + c_0\,|\mathbf{k}|) + \tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - c_0\,|\mathbf{k}|)\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k\, \mathrm{rot}\left\{\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)} + \tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}-c_0|\mathbf{k}|t)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)} &= -\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k}) \times \nabla e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)} \\
&= -[\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k}) \times i\mathbf{k}]e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)},
\end{aligned}
$$

und damit folgt weiter

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= -\frac{i}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k\, \left\{[\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}]e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)}\right. \\
&\quad \left. + [\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}]e^{i(\mathbf{kr}-c_0|\mathbf{k}|t)}\right\}. \qquad (5.67)
\end{aligned}
$$

In $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}$ geht jedoch nur die Transversalkomponente von $\tilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{k})$ ein. Es folgt weiter für das $\mathbf{E}$-Feld:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},t) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\left\{\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + c_0\,|\mathbf{k}|)\right. \\
&\quad \left. +\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - c_0\,|\mathbf{k}|)\right\} \\
&\quad -\mathrm{grad}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\left\{-c_0\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})\delta(\omega + c_0\,|\mathbf{k}|)\right. \\
&\quad \left. + c_0\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})\delta(\omega - c_0\,|\mathbf{k}|)\right\} \\
&= \frac{-ic_0}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k\, |\mathbf{k}|\left\{\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)} - \tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}-c_0|\mathbf{k}|t)}\right\} \\
&\quad -\frac{-ic_0}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k\, \left\{-[\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{k})]\mathbf{k}e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)} + [\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{k})]\mathbf{k}e^{i(\mathbf{kr}-c_0|\mathbf{k}|t)}\right\},
\end{aligned}
$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3k\, c_0\, |\mathbf{k}| \left(\left\{ \hat{\mathbf{k}}[\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^-(\mathbf{k})] - \tilde{\mathbf{A}}^-(\mathbf{k}) \right\} e^{i(\mathbf{kr}+c_0|\mathbf{k}|t)} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \hat{\mathbf{k}}[\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^+(\mathbf{k})] - \tilde{\mathbf{A}}^+(\mathbf{k}) \right\} e^{i(\mathbf{kr}-c_0|\mathbf{k}|t)} \right). \qquad (5.68)\end{aligned}$$

Entscheidend ist nun der Ausdruck

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{k}}[\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^\pm(\mathbf{k})] - \tilde{\mathbf{A}}^\pm(\mathbf{k}).$$

Der erste Term $\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^\pm)$ ist die longitudinale Komponente von $\tilde{\mathbf{A}}^\pm$, von welcher der gesamte Vektor $\tilde{\mathbf{A}}^\pm$ abgezogen wird. Daher steht $\mathbf{T}$ auf $\hat{\mathbf{k}}$ senkrecht, wie man durch Multiplikation von $\mathbf{T}$ mit $\hat{\mathbf{k}}$ leicht sieht:

$$\hat{\mathbf{k}}\mathbf{T} = \underbrace{\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}}_{=1}[\hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^\pm(\mathbf{k})] - \hat{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{A}}^\pm(\mathbf{k}) = 0.$$

Wieder spielt nur die Transversalkomponente von $\tilde{\mathbf{A}}^\pm$ eine Rolle, womit die zuvor gemachte Behauptung, daß es hinreichen ist $\tilde{\mathbf{A}}^\pm(\mathbf{k})$ transversal zu wählen, bewiesen ist.

Dieses hier gefundene Ergebnis stellt in keiner Weise eine Einschränkung dahingehend dar, daß die Feldkomponenten, bei geeigenten Randbedingungen, nicht doch longitudinale Komponenten haben können. Im Integral von (5.67) und (5.68) kommen ja alle $\mathbf{k}$-Richtungen vor, und die Randbedingungen filtern dann entsprechend aus.

5.8 Die inhomogene Wellengleichung

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir die Lösungen der homogenen Wellengleichung diskutiert. Damit wurden die notwendigen Vorarbeiten geleistet, um jetzt die Frage nach der **Wellenerzeugung** durch Ladungs- und/oder Stromquellen behandeln zu können.

Die Situation, mit welcher wir hier konfrontiert werden, hat ihr Analogon im harmonischen Oszillator als Problem der analytischen Mechanik. Dort lieferte die homogene Schwingungsgleichung die *Eigenschwingungen* des Systemes, und die inhomogene Schwingungsgleichung die *Anregung* von Schwingungen.

5.8.1 Die Greensche Funktion der Wellengleichung

Wir werden die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\mathbf{r},t) = g(\mathbf{r},t), \qquad (5.69)$$

wie schon die Poissonsche Differentialgleichung in Abschitt 3.3.1, mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktionen lösen. Wir schreiben in Analogie zu (3.25) die Greensche Funktion als Lösung von (5.69) für δ-Quellen. Ist der Raum homogen, so gilt

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'), \tag{5.70}$$

und die Lösung von (5.69) lautet:

$$f(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{B}} dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') g(\mathbf{r}', t'). \tag{5.71}$$

Der Beweis für die Richtigkeit von (5.71) ist durch Einsetzen leicht zu führen.

Wir können aus (5.71) bereits eine Reihe von Aussagen über wichtige Eigenschaften der Greenschen Funktion machen. Zunächst sieht man, daß infolge der Zeitintegration in (5.71) die Lösung zur Zeit t mit den Quellen $g(\mathbf{r}', t')$ zu allen anderen Zeiten verbunden wird. Darunter sind natürlich auch Zeiten $t' > t$. Der Zeitverlauf der Quellen ist willkürlich und damit darf $f(\mathbf{r}, t)$ nicht von den Quellen für $t' > t$ abhängen - "Hellsehen" ist nicht möglich. Es muß also

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = 0, \quad t - t' < 0 \tag{5.72}$$

gelten. Diese Beziehung ist Ausdruck von **Kausalität**. (5.72) ist aber nicht ausreichend. Dies ist einzusehen, wenn wir den Zeitpunkt $t' = t - \Delta t$ betrachten, zu welchem $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \Delta t) \neq 0$ gelten soll. Das Ortsintegral von (5.71) sagt aber aus, daß zur Lösung im Orte $\mathbf{r}$ die Quellen an allen anderen Orten $\mathbf{r}'$ beitragen, unabhängig davon, wie groß die Entfernung $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ auch sein mag. Dies verlangt aber eine unendlich schnelle Ausbreitung der Wirkung. Gibt es hingegen eine obere Grenze der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Wirkung ausbreiten kann, etwa c', dann kann $f(\mathbf{r}, t)$ von diesen Quellen nur erfahren, wenn

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < c'\Delta t$$

ist. Somit müssen wir (5.72) auf

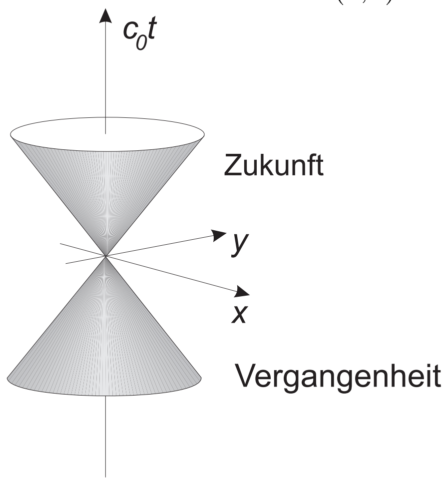
$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = 0, \quad t - t' < \frac{1}{c'}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{5.73}$$

einschränken. Es ist das wesentliche Ergebnis der speziellen Relativitätstheorie,[4] daß eine solche maximale Geschwindigkeit postuliert wird, und alle derzeit bekannten experimentellen Befunde deuten darauf hin, daß diese

[4]siehe: B. Schnizer Skriptum zur Vorlesung *Analytische Mechanik*, Kapitel 10.

maximale Geschwindigkeit die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 ist. Die Einschränkung (5.73) ist auch Ausdruck des *Nahwirkungscharakters* der Elektrodynamik.

Betrachten wir nun $(\mathbf{r}, t)$ als einen Punkt im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum, so beschreibt die Bedingung $|\mathbf{r}| < c_0 t$, also



$$\mathbf{rr} = x^2 + y^2 + z^2 < c_0^2 t^2$$

das Innere eines "Kugelkegels". Dies ist der **Lichtkegel**. Setzen wir $z = 0$, so kann man einen Schnitt durch den Kugelkegel machen. Dieser Schnitt ist in nebenstehender Abbildung dargestellt. Demnach zerfällt der Raum in die disjunkten Gebiete:

$$r^2 < c_0^2 t^2, \quad r^2 = c_0^2 t^2, \quad r^2 > c_0^2 t^2.$$

Bezeichnen wir nun den Punkt $(\mathbf{r}, t)$ als *Ereignis*, so sind zwei Ereignisse $(\mathbf{r}, t)$ und $(\mathbf{r}', t')$

$$\begin{array}{rlrcl} \textit{zeitartig,} & \text{wenn} & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 & < & c_0^2(t - t') \\ \textit{lichtartig,} & \text{wenn} & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 & = & c_0^2(t - t') \\ \textit{ortsartig,} & \text{wenn} & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 & > & c_0^2(t - t') \end{array}$$

ist. Damit kann eine Quelle im Ort $(\mathbf{r}', t')$ die Lösung von (5.71) in $(\mathbf{r}, t)$ nur dann beeinflussen, wenn das Ereignis $(\mathbf{r}, t)$ relativ zu $(\mathbf{r}', t')$ in oder auf der Zukunftshälfte des Lichtkegels liegt. Dies ist nun der korrekte Ausdruck der Kausalität, wie er in Nahwirkungstheorien zu formulieren ist.

Es könnte nun natürlich sein, daß die Greensche Funktion nicht nur für lichtartige Ereignisse, sondern auch für zeitartige Ereignisse von Null verschieden ist. Dies würde bedeuten, daß das Verhalten der Quelle $g(\mathbf{r}', t')$ nicht nur im Zeitpunkt t mit $t - t' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / c_0$ zur Lösung $f(\mathbf{r}, t)$ beiträgt, sondern auch zu späteren Zeiten. Dies würde bedeuten, daß es neben den Wirkungen, welche sich mit c_0 ausbreiten, auch noch "langsamere" Wirkungen gibt. Im Vakuum wird dies aber nicht der Fall sein, und demzufolge wird die Greensche Funktion nur auf dem Lichtkegel von Null verschieden sein. Es gilt also

$$G(\mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r})\delta(t - |\mathbf{r}| / c_0). \tag{5.74}$$

In Materie hingegen tritt *Dispersion* auf, und die Lichtgeschwindigkeit hängt dann von der Frequenz ab; es gibt dann tatsächlich Wirkungen zwischen zeitartigen Ereignissen.

Nach diesen Aussagen über die Zeitabhängigkeit der Greenschen Funktion können wir auch Aussagen über ihre Ortsabhängigkeit machen. Wir nehmen dazu an, daß unsere Quelle explizit zeitunabhängig ist, also gilt $g(\mathbf{r}', t') = g(\mathbf{r}')$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) &= \int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') g(\mathbf{r}) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \delta(t - t' - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)}_{=1} \\ &= f(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

mit dem nunmehr zeitunabhängigen Feld $f(\mathbf{r})$. Damit reduziert sich (5.69) auf

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}),$$

die Poissongleichung (3.24). Damit folgt für die Ortsabhängigkeit der Greenschen Funktion entsprechend Abschnitt 3.3.2:

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Der Faktor ε_0^{-1} entfällt hier natürlich. Wir finden das Endergebnis

$$G(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}|}\delta(t - |\mathbf{r}|/c_0), \tag{5.75}$$

die *kausale Greensche Funktion.* (Der Beweis, daß (5.75) tatsächlich Lösung von (5.70) ist, erfolgt am Besten unter Zuhilfenahme der Fouriertransformation, und ist Gegenstand der Übungen.)

Wir setzen (5.75) in (5.71) ein und erhalten

$$f(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)\, g(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{5.76}$$

Die Zeitintegration ist unmittelbar ausführbar und resultiert in:

$$f(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} g\left(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0\right).$$

Damit ist die Lösung zur Zeit t exakt aus einem Poissonintegral vom Typ (3.27) erhältlich, in welches als Quelle am Ort $\mathbf{r}'$ genau der Quellwert eingeht, welcher dort zu einer um die Laufzeit, nämlich $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0$, früheren Zeit vorlag.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse erhalten wir für die elektromagnetischen Potentiale:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{5.77}$$

Diese Lösungen tragen der Kausalität Rechnung und werden **retardierte Potentiale** genannt, weil sie gegenüber dem Zeitverhalten der Quellen um die Laufzeit der Wirkung verzögert sind.

Es ist abschließend notwendig wiederum darauf hinzuweisen, daß die Wellengleichung in der vorliegenden symmetrischen Form nur unter der Bedingung der Lorentzeichung gültig ist. Es ist daher noch zu überprüfen, ob die Lösungen (5.77) tatsächlich dieser Eichung entsprechen. Wir stellen zunächst fest, daß (5.71) das Faltungsprodukt der Greenschen Funktion mit der jeweiligen Quelle ist. Folglich gilt aufgrund von (5.57):

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}(2\pi)^2\tilde{G}(\mathbf{k},\omega)\,\tilde{\rho}(\mathbf{k},\omega)\\ \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) &= -\mu_0(2\pi)^2\tilde{G}(\mathbf{k},\omega)\,\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},\omega).\end{aligned}$$

Es folgt dann (5.18):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} =\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\nabla\int d^3k \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) +\\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^2}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int d^3k \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega)\\ &= -\int d^3k \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{G}(\mathbf{k},\omega)\left[\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},\omega)\nabla + \tilde{\rho}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial}{\partial t}\right] e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\\ &= -i\int d^3k \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{G}(\mathbf{k},\omega)\left[\mathbf{k}\,\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},\omega) - \omega\tilde{\rho}(\mathbf{k},\omega)\right] e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.\end{aligned} \tag{5.78}$$

Auf der anderen Seite erhalten wir aus der Kontinuitätsgleichung (2.21) durch partielle Integration:

$$0 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{-i(\mathbf{kr}'-\omega t')}\left[\nabla_{\mathbf{r}'}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t') + \frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\nabla_{\mathbf{r}'} + \rho(\mathbf{r}',t')\frac{\partial}{\partial t'}\right] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}'-\omega t')} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')(-i\mathbf{k}) + \rho(\mathbf{r}',t')(i\omega)\right] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}'-\omega t')} \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^2}\Bigg\{\mathbf{k}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}'-\omega t')} \\
&\qquad -\omega \int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \rho(\mathbf{r}',t') e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}'-\omega t')}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Diese Integrale sind die Fouriertransformierten von $\mathbf{j}$ und ρ, also gilt:

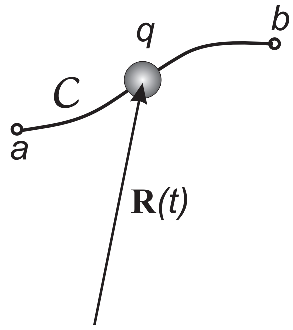
$$
\mathbf{k}\,\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},\omega) - \omega\tilde{\rho}(\mathbf{k},\omega) = 0,
$$

und damit verschwindet der Ausdruck in den eckigen Klammern von (5.78) und die retardierten Potentiale genügen der Lorentzeichung.

Die retardierten Potentiale stellen innerhalb des betrachteten Raumgebietes $\mathbb{B}$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Wellengleichung dar. Die vollständige Lösung findet man durch Addieren einer Lösung der homogenen Wellengleichung. Die resultierenden elektromagnetischen Potentiale müssen dabei natürlich noch den geltenden Randbedingungen genügen.

5.8.2 Bewegte Ladungen

Wir wollen uns nun dem einfachsten Quelltyp zuwenden, dem einer Punktladung, die sich längs einer Bahn $\mathcal{C}$ im Raum bewegt. Diese Bahn ist durch $\mathbf{R}(t)$ gegeben, und es gilt



$$
\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r},t) &= q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)) \\
\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{v}\rho(\mathbf{r},t) = q\,\dot{\mathbf{R}}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)),
\end{aligned}
$$

$\forall \mathbf{R}(t) \in \mathcal{C}$. Die retardierten Potentiale sind für solche Verteilungen ausgesprochen unhandlich und wir gehen daher auf die Formulierung mit Greenschen Funktionen in der Form (5.76) zurück und erhalten:

$$
f(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)\, g(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},
$$

mit

$$
\begin{array}{lll}
g(\mathbf{r},t) & \Longrightarrow & -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}',t') \quad \text{für} \quad \phi(\mathbf{r},t) \\
g(\mathbf{r},t) & \Longrightarrow & -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}',t') \quad \text{für} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t),
\end{array}
$$

und erhalten daraus:

$$
\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} q\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{R}(t'))
$$

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} q\,\dot{\mathbf{R}}(t')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{R}(t')).
$$

Wir führen nun, im Gegensatz zu früher, die Raumintegration zuerst aus, und es folgt etwa für $\phi(\mathbf{r},t)$:

$$
\phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')|/c_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')|}.
$$

Mit $X(t') = |\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')|$, dem Abstand zwischen Ladung und Aufpunkt, sowie $\mathbf{V}(t') = \dot{\mathbf{R}}(t')$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t-t'-X(t')/c_0)}{X(t')} \\
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{\delta(t-t'-X(t')/c_0)\mathbf{V}(t')}{X(t')}.
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

In (5.79) tritt die δ-Funktion in der Form $\delta(h(t'))$ auf, und wir nutzen daher die Transformation

$$
\delta(h(t')) = \sum_\nu \frac{1}{\left|\dot{h}(t'_\nu)\right|}\delta(t'-t'_\nu),
$$

mit $h(t'_\nu) = 0$, und t'_ν den Nullstellen von $h(t')$. Dabei müssen, offensichtlich, die Nullstellen einfach sein, also $\dot{h}(t'_\nu) \neq 0$. Nun gilt aber weiters:

$$
\begin{aligned}
h(t') &= t - t' - X(t')/c_0 \\
h(t') &= 0 \quad \Longrightarrow \quad t - t' - X(t')/c_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

und damit hängt t'_ν von $X(t')$ ab. Wir bestimmen nun

$$
\dot{h}(t') = -1 - \dot{X}(t')/c_0.
$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}
X(t') &= |\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}[r_i - R_i(t')]^2} \\
\dot{X}(t') &= \frac{-2\sum\limits_{i=1}^{3}[r_i - R_i(t')]\dot{R}_i(t')}{2\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}[r_i - R_i(t')]^2}} \\
&= -\frac{[\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')]\mathbf{V}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')|} = -[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{R}}(t')]\mathbf{V}(t'),
\end{aligned}$$

mit $[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{R}}(t')]$ dem Einheitsvektor in Richtung von $\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')$. Wir erhalten dann weiter

$$\dot{h}(t') = -1 + [\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{R}}(t')]\hat{\mathbf{V}}(t')\frac{|\mathbf{V}(t')|}{c_0},$$

mit $\hat{\mathbf{V}}(t')$ dem Einheitsvektor in Richtung von $\mathbf{V}(t')$. Nun ist aber das Skalarprodukt zweier Eiheitsvektoren dem Betrag nach auf Eins beschränkt, und damit gilt die Abschätzung:

$$-1 - \frac{|\mathbf{V}(t')|}{c_0} \le \dot{h}(t') \le -1 + \frac{|\mathbf{V}(t')|}{c_0}.$$

Nehmen wir nun weiter an, daß sich das geladene Teilchen mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, so folgt aus der rechten Ungleichung

$$\dot{h}(t') < 0, \tag{5.81}$$

und somit ist $h(t')$ streng *monoton fallend* und kann folglich stets maximal eine einfache Nullstelle t'_0 haben. Wegen (5.81) ergibt sich weiter

$$\left|\dot{h}(t')\right| = -\dot{h}(t')$$

und

$$\begin{aligned}
\delta(h(t')) &= \frac{1}{1-[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{R}}(t'_0)]\mathbf{V}(t'_0)/c_0}\delta(t'-t'_0) \\
&= \frac{X(t'_0)\delta(t'-t'_0)}{X(t'_0)-[\mathbf{r}-\mathbf{R}(t'_0)]\mathbf{V}(t'_0)/c_0},
\end{aligned}$$

mit $h(t'_0) = 0$. Wir setzen nun in (5.79) ein und erhalten

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t'-t'_0)}{X(t')-[\mathbf{r}-\mathbf{R}(t')]\mathbf{V}(t')/c_0}$$

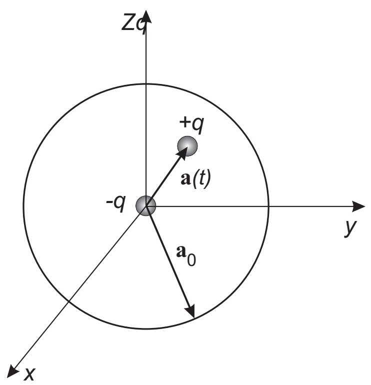
$$
\begin{aligned}
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{X(t_0') - [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t_0')]\mathbf{V}(t_0')/c_0} && (5.82) \\
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\mathbf{V}(t')\delta(t'-t_0')}{X(t') - [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')]\mathbf{V}(t')/c_0} \\
&= \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{V}(t_0')}{X(t_0') - [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t_0')]\mathbf{V}(t_0')/c_0}. && (5.83)
\end{aligned}
$$

Es sind dies die LIÉNARD-WIECHERT**schen Potentiale** einer sich bewegenden Punktladung.

Das Problem bei der Anwendung dieser Potentiale liegt oft in der schwierig auszuwertenden Retardierungsbedingung $h(t_0') = 0$: für gleiche Zeiten t hängt t' nach (5.80) vom Aufpunkt $\mathbf{r}$ ab.

5.8.3 Der Hertzsche Dipol

Wir betrachten die - insgesamt neutrale - Anordnung, welche aus einer im Koordinatenursprung fixierten negativen Ladung $-q$ und einer sich auf der Kurve $\mathbf{a}(t)$ bewegenden positiven Ladung $+q$ zusammensetzt.



Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r},t) &= q\,[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)) - \delta(\mathbf{r})] \\
\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= q\dot{\mathbf{a}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)).
\end{aligned}
$$

Wir nehmen nun an, daß

1. $|\mathbf{a}(t)| < a_0$ für $-\infty < t < \infty$ gilt, und definieren deshalb $\mathbf{a}(t) = a_0\boldsymbol{\eta}(t)$ mit $|\boldsymbol{\eta}(t)| \leq 1$.

2. Weiters setzen wir voraus, daß der Grenzprozess $|\mathbf{a}_0| = a_0 \to 0$, $q \to \infty$ so durchgeführt wird, daß das Produkt qa_0 konstant bleibt. Dies ist jener Grenzprozess, welcher im Abschnitt 3.7 zum elektrischen Punktdipol geführt hat.

Wir definieren also entsprechend (3.56) das elektrische Dipolmoment

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \lim_{a_0 \to 0, q \to \infty} q\,\mathbf{a}(t) \\
&= \lim_{a_0 \to 0, q \to \infty} qa_0\boldsymbol{\eta}(t) \\
&= qa_0\boldsymbol{\eta}(t), && (5.84)
\end{aligned}
$$

mit $qa_0 = konst$. Die Größe des Dipolmoments ist dabei durch $q\,|\mathbf{a}(t)| = qa_0\,|\boldsymbol{\eta}(t)|$ gegeben, und seine Richtung durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{a}}(t) =$

$\mathbf{a}(t)/|\mathbf{a}(t)|$. Es handelt sich also um einen zeitlich veränderlichen Punktdipol, welcher um den Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ konzentriert ist. Eine solche Anordnung wird **Hertzscher Dipol** genannt.

Der Strom $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\dot{\mathbf{a}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t))$, den die zeitliche Veränderung des Dipolmomentes verursacht, ist, falls $|\mathbf{a}(t)|/a_0$ für alle Zeiten endlich bleibt, durch

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \lim_{a_0 \to 0, q \to \infty} q\,\dot{\mathbf{a}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)) \\ &= \lim_{a_0 \to 0, q \to \infty} (qa_0)\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)) \\ &= \dot{\mathbf{p}}(t)\delta(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

also durch die zeitliche Änderung des Dipolmomentes beschrieben. Auch dieser Strom ist auf einen infinitesimalen Bereich um den Ursprung konzentriert.

Wir setzen nun die Ladungs- und Stromverteilungen in (5.82) ein, und erhalten etwa für $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \left\{ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')| - [\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')]\dot{\mathbf{a}}(t')/c_0} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right\}_{t' :\, h(t')=0},$$

mit

$$h(t') = t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)|/c_0,$$

wobei wir das Potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ als Überlagerung der zwei Liénard-Wiechert Potentiale für die Ladungen $+q$ und $-q$ gewonnen haben. Nachdem $-q$ ruht, erhalten wir einfach nur das entsprechende elektrostatische Potential.

Uns interessiert nun das Potential für kleine a_0, also eigentlich der Limes von $\phi(\mathbf{r}, t)$ für $a_0 \to 0$ bei $qa_0 = konst$. Es folgt:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{a_0 \to 0, q \to \infty} \left\{ \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')| - [\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')]\dot{\mathbf{a}}(t')/c_0} - \frac{q}{|\mathbf{r}|} \right\}_{t' :\, h(t')=0}.$$

Zum Vektorpotential liefert nur die bewegte Ladung einen Beitrag, und wir erhalten im uns interessierenden Limes aus (5.83):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \lim_{a_0 \to 0, q \to \infty} \left\{ \frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')| - [\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')]\dot{\mathbf{a}}(t')/c_0} \right\}_{t' :\, h(t')=0}.$$

Wir untersuchen zunächst den Ausdruck in der geschlungenen Klammer:

$$\frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')| - [\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')]\dot{\mathbf{a}}(t')/c_0} = \frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}(t')|} \frac{1}{1 - [\widehat{\mathbf{r} - \mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')\,|\dot{\mathbf{a}}(t')|/c_0}.$$

Nun ist, wie schon früher, $|\dot{\mathbf{a}}(t')|/c_0 \ll 1$ und damit auch

$$[\widehat{\mathbf{r} - \mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')\,|\dot{\mathbf{a}}(t')|/c_0 < 1,$$

und wir können entwickeln $(1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots)$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|}\Bigg\{1 + \frac{|\dot{\mathbf{a}}(t')|}{c_0}[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t') + \\
&\quad \frac{|\dot{\mathbf{a}}(t')|^2}{c_0^2}\left[[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')\right]^2 + \cdots\Bigg\} \\
&= \frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|} + \frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')[(\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t'))\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')]\,|\dot{\mathbf{a}}(t')|}{c_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|} + \\
&\quad \frac{q\dot{\mathbf{a}}(t')[(\mathbf{r}-\mathbf{a}(t'))\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')]^2\,|\dot{\mathbf{a}}(t')|^2}{c_0^2\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|^2} + \cdots
\end{aligned}$$

Wir bilden nun für obigen Ausdruck den Limes $a_0 \to 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{a_0\to 0}\{\cdots\} &= \frac{1}{|\mathbf{r}|}\lim_{a_0\to 0}(qa_0)\dot{\boldsymbol{\eta}}(t') + \\
&\quad \frac{1}{c_0\,|\mathbf{r}|}\lim_{a_0\to 0}\underbrace{(qa_0^2)}_{\to 0}\underbrace{\dot{\boldsymbol{\eta}}(t')}_{\text{endlich}}\underbrace{|\dot{\boldsymbol{\eta}}(t')|}_{\text{endlich}}\underbrace{[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')}_{=1} \\
&= \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{|\mathbf{r}|},
\end{aligned}$$

soferne $|\dot{\mathbf{a}}(t)|/c_0 \ll 1$ bleibt. Für das Vektorpotential erhalten wir somit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{|\mathbf{r}|}\Bigg|_{t':\,h(t')=0}. \tag{5.85}$$

Die Entwicklung der Formel für $\phi(\mathbf{r},t)$ ist etwas aufwendiger:

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')| - [\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')]\dot{\mathbf{a}}(t')/c_0} - \frac{q}{|\mathbf{r}|} = \\
&= \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|}\frac{1}{1-\underbrace{[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')\,|\dot{\mathbf{a}}(t')|/c_0}_{\ll 1}} - \frac{q}{|\mathbf{r}|} \\
&= \text{(wie zuvor)} \\
&= \underbrace{\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|} - \frac{q}{|\mathbf{r}|}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|}[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')\frac{|\dot{\mathbf{a}}(t')|}{c_0}}_{\mathrm{II}} + \\
&\quad \underbrace{\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|}\left[[\widehat{\mathbf{r}-\mathbf{a}}(t')]\hat{\dot{\mathbf{a}}}(t')\right]^2\frac{|\dot{\mathbf{a}}(t')|^2}{c_0^2}}_{\mathrm{III}} + \cdots
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun den Beitrag der einzelnen Terme im Limes $a_0 \to 0$:

$$\text{III}: \quad \lim_{a_0\to 0} \underbrace{(qa_0)}_{konst} a_0 \frac{[\text{endlich}]^2}{\underbrace{\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')}_{\to\,\mathbf{r}}} \underbrace{\frac{1}{c_0^2}\left|\dot{\boldsymbol{\eta}}(t')\right|^2}_{\to 0} \quad\longrightarrow\quad 0,$$

$$\text{II}: \quad \lim_{a_0\to 0}(qa_0)\frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')\right|^2}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t')\frac{1}{c_0} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{c_0},$$

und schließlich

$$\text{I}: \; q\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|}-\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right).$$

Hier entwickeln wir an der Stelle $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ nach $\mathbf{a}$ und finden:

$$q\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|}-\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = q\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{a}(t')}{|\mathbf{r}|^3}+\cdots-\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{a_0\to 0, q\to\infty} q(\cdots) &= \frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\lim_{a_0\to 0, q\to\infty} qa_0\mathbf{r}\boldsymbol{\eta}(t') \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}\lim_{a_0\to 0, q\to\infty} qa_0\boldsymbol{\eta}(t') \\
&= \frac{\mathbf{r}\mathbf{p}(t')}{|\mathbf{r}|^3},
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis für $\phi(\mathbf{r},t)$:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}(t')}{|\mathbf{r}|^2 c_0}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{p}(t')}{|\mathbf{r}|^3}\right]_{t':\,h(t')=0}. \tag{5.86}$$

Abschließend müssen wir noch die Retardierung bestimmen:

$$\begin{aligned}
h(t') &= t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|/c_0 \overset{!}{=} 0 \\
t-t' &= |\mathbf{r}-\mathbf{a}(t')|/c_0 \\
\lim_{a_0\to 0}(t-t') &= \frac{1}{c_0}\lim_{a_0\to 0}|\mathbf{r}-a_0\boldsymbol{\eta}(t')| \\
&= \frac{|\mathbf{r}|}{c_0},
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis:

$$t' = t-\frac{|\mathbf{r}|}{c_0}. \tag{5.87}$$

Damit finden wir die Potentiale des Hertzschen Dipols:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)}{|\mathbf{r}|} \tag{5.88}$$

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}\,\mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0)}{|\mathbf{r}|^3}+\frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)}{|\mathbf{r}|^2 c_0}\right). \tag{5.89}$$

Der Hertzsche Vektor

Wir definieren den **Hertzschen Vektor**:

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0)}{|\mathbf{r}|}. \tag{5.90}$$

Damit folgt unmittelbar

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{5.91}$$

und für $\phi(\mathbf{r},t)$ ergibt sich:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t)}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{\mathbf{r}}{c_0|\mathbf{r}|}\frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right), \tag{5.92}$$

und dies kann in

$$\phi(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) \tag{5.93}$$

umgeformt werden. Beweis:

$$\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\nabla\mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0) + \mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right).$$

Mit

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} p_i\left(t - \sqrt{\sum_j x_j^2}/c_0\right) \\
&= \sum_i \dot{p}_i\left(t - \sqrt{\sum_j x_j^2}/c_0\right)(-1)\frac{1}{2\sqrt{\sum_j x_j^2}}\frac{2x_i}{c_0} \\
&= -\sum_i \dot{p}_i(t-|\mathbf{r}|/c_0)\frac{x_i}{c_0|\mathbf{r}|} \\
&= -\frac{\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\mathbf{r}}{c_0|\mathbf{r}|},
\end{aligned}$$

wobei $\dot{\mathbf{p}}$ die Ableitung von $\mathbf{p}$ zur Zeit $t' = t - |\mathbf{r}|/c_0$ ist, folgt

$$\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)}{c_0|\mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0)}{|\mathbf{r}|^3}\right)$$

wegen $\nabla|\mathbf{r}|^{-1} = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$. Eingesetzt in (5.92) ergibt dies (5.93). Dieser einfache Zusammenhang kann jetzt auch dazu genützt werden, um zu zeigen, daß die so gewonnenen Potentiale der Lorentzeichung (5.18) genügen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) + \mu_0\varepsilon_0 \left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) &= 0 \qquad \mathbf{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

Man kann jetzt aus den Potentialen das **B**- und das **E**-Feld bestimmen:[5]

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \mathrm{rot}\frac{\partial\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0) - \dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0) \times \nabla\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\left[\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right] + \frac{1}{c_0|\mathbf{r}|}\left[\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{5.94}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{grad}\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) - \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\left[3\left(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right]\right. \\
&\quad + \frac{1}{c_0|\mathbf{r}|^2}\left[3\left(\hat{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right)\hat{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{c_0^2|\mathbf{r}|}\left[\left(\hat{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right)\hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Im statischen Fall ist $\dot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ und wir erhalten $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0}$ und für das **E**-Feld Gleichung (3.58), also das **E**-Feld des statischen Punktdipols.

Das wichtige an den Formeln (5.94) und (5.95) ist, daß sie aus Termen bestehen, welche mit zunehmender Entfernung $\mathbf{r}$ von der Quelle unterschiedlich schnell abklingen. Konzentrieren wir uns auf das **Fernfeld**, so erhalten wir nur Terme proportional $|\mathbf{r}|^{-1}$ und wir finden die Lösungen:

$$\mathbf{B}_F(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{c_0|\mathbf{r}|}\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0) \tag{5.96}$$

$$\mathbf{E}_F(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c_0^2|\mathbf{r}|}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{r}|/c_0). \tag{5.97}$$

Wie wir sehen, ist das Fernfeld ausnahmslos proportional zu $\ddot{\mathbf{p}}$, es tritt also nur auf, wenn - und so lange - die Ladungen eine **beschleunigte** Bewegung

[5]Hier werden nur die Ergebnisse angeführt. Die Berechnung ist Aufgabe der Übungen.

ausführen. (Dies gilt ganz allgemein, auch wenn die Quellregion ausgedehnt ist.)

Wir wollen nun das Strahlungsfeld genauer erfassen. Dazu wollen wir einen **linearen** Dipol untersuchen, welcher nach dem Gesetz

$$\mathbf{p}(t) = p(t)\mathbf{e}_z = p_0 \sin\omega t\, \mathbf{e}_z$$

schwingt, ohne dabei die Richtung zu verändern. Es gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{r}(x,y,z) \\
\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}(t) &= \frac{1}{r} z p(t) \\
[\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}(t)]\,\hat{\mathbf{r}} &= \frac{1}{r^2} z p(t)(x,y,z),
\end{aligned}$$

und damit wird nach (5.95):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg\{ & \frac{1}{r^3}\left[3\frac{1}{r^2} z p(t)(x,y,z) - p(t)\mathbf{e}_z\right] \\
& + \frac{1}{c_0 r^2}\left[3\frac{1}{r^2} z \dot{p}(t)(x,y,z) - \dot{p}(t)\mathbf{e}_z\right] \\
& + \frac{1}{c_0^2 r}\left[\frac{1}{r^2} z \ddot{p}(t)(x,y,z) - \ddot{p}(t)\mathbf{e}_z\right]\Bigg\},
\end{aligned}$$

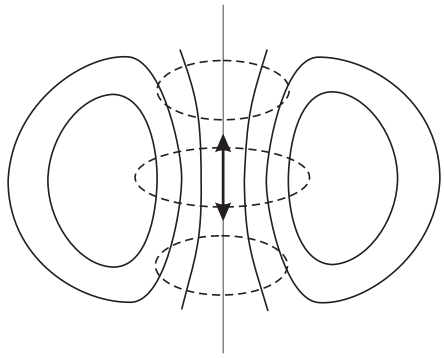
oder

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xz}{r^2}\left(\frac{3}{r^3}p(t) + \frac{3}{c_0 r^2}\dot{p}(t) + \frac{1}{c_0^2 r}\ddot{p}(t)\right) \\
E_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{yz}{r^2}\left(\frac{3}{r^3}p(t) + \frac{3}{c_0 r^2}\dot{p}(t) + \frac{1}{c_0^2 r}\ddot{p}(t)\right) \\
E_z &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)\left(\frac{p(t)}{r^3} + \frac{p(t)}{c_0 r^2}\right) + \frac{r^2 - z^2}{c_0^2 r^3}\ddot{p}(t)\right],
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B_x &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{y}{r}\left(\frac{1}{r^2}\dot{p}(t) + \frac{1}{c_0 r}\ddot{p}(t)\right) \\
B_y &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{x}{r}\left(\frac{1}{r^2}\dot{p}(t) + \frac{1}{c_0 r}\ddot{p}(t)\right) \\
B_z &= 0.
\end{aligned}$$

Das **B**-Feld liegt also in der Ebene normal zum Dipol: die Feldlinien sind



Kreise um die Dipolachse (strichliert). Die Zylindersymmetrie ist auch für das **E**-Feld gewahrt. Seine Feldlinien verlaufen (in Zylinder- oder Kugelkoordinaten) in Halbebenen $\varphi = konst$, und stehen daher überall senkrecht auf das **B**-Feld. Mit zunehmender Zeit wandern diese Feldlinien wegen der Retardierung $t = t' - |\mathbf{r}|/c_0$ mit Lichtgeschwindigkeit nach außen.

Die verschiedenen Beiträge zu den Feldern sind nicht nur durch einen verschieden schnellen Abfall nach außen, sondern auch durch eine unterschiedliche Frequenzabhängigkeit gekennzeichnet. So sind die Anteile des Fernfeldes proportional zu ω^2. Diese Tatsache ist für die Abstrahlung von Antennen besonders bedeutsam.

Ein zweiter Fall ist von besonderem Interesse (Übungen!): es handelt sich um den Sonderfall, daß die sich bewegende Ladung mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn umläuft. Im Gegensatz zum linearen Dipol ist in diesem Fall der Beitrag von $\mathbf{p}(t)$ zeitlich konstant, allerdings ändert $\mathbf{p}(t)$ seine Richtung ständig. Das Feldlinienbild unterscheidet sich in charakteristischer Weise von dem des linearen Dipols, und dies führt, wie in den Übungen zu diskutieren sein wird, zu unterschiedlicher Richtungsabhängigkeit der Energieabstrahlung für beide Modelle.

Ein Elektron, welches - klassisch betrachtet - auf einer Keplerellipse den Atomkern umkreist, stellt natürlich zusammen mit dem Atomkern einen zeitveränderlichen Dipol dar, da $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2\mathbf{p}$, und unsere Formeln sind anwendbar.

5.9 Zeitlich rein periodische elektromagnetische Felder

5.9.1 Grundlegendes

Systeme von Ladungen und Strömen, welche zeitlich variieren, kann man Fourier analysieren, und man kann wegen der Linearität der MAXWELLschen Gleichungen im Vakuum und in linearen Materialien jede Fourierkomponente getrennt behandeln. Wir verlieren daher nichts an Allgemeinheit, wenn wir jetzt Potentiale und Felder studieren, welche von einem lokalisierten System von Ladungen und Strömen

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \rho(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \qquad \rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r})e^{i\varphi_\rho(\mathbf{r})} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r})e^{i\varphi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r})}, \end{aligned} \tag{5.98}$$

hervorgerufen werden, die in der Zeit sinusförmig oszillieren. $\rho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ sind dabei die **komplexen Amplituden** und die **Phase** $P(\mathbf{r},t)$ ist durch

$$P(\mathbf{r},t) = \omega t + \varphi(\mathbf{r}) \tag{5.99}$$

bestimmt. Aus (5.98) folgt unmittelbar der Ansatz

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i\varphi_{\mathbf{E}}(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \\
\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{D}_0(\mathbf{r}) e^{i\varphi_{\mathbf{D}}(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \\
\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{i\varphi_{\mathbf{H}}(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{i\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{r})} e^{i\omega t},
\end{aligned} \tag{5.100}$$

und damit folgt für die MAXWELLschen Gleichungen (5.1) bis (5.4), nun ausgedrückt durch die komplexen Amplituden:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \tag{5.101}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{5.102}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{5.103}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{5.104}$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$i\omega\rho(\mathbf{r}) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{5.105}$$

Nun folgt weiter durch Divergenzbildung aus (5.102) und Anwendung von (5.105):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= -i\omega \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{j} \\
\Longrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

und (5.104) ergibt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\
\Longrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0,
\end{aligned}$$

womit die Gleichungen (5.101) bzw. (5.103) wieder aufgefunden wurden und daher nicht mehr zu postulieren sind. Man kann das Problem der Bestimmung der elektromagnetischen Felder auf die Differentialgleichungen (5.102) und (5.104) reduzieren, den MAXWELLschen Gleichungen für komplexe Amplituden eines zeitlich rein periodisch veränderlichen Ladungszustandes und zeitlich rein periodischer elektromagnetischer Felder. Diese zwei Gleichungen sind natürlich unterbestimmt und müssen im Vakuum durch

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{5.106}$$

ergänzt werden. Damit verschwindet wegen (5.103) und (5.106) die Divergenz des **H**-Feldes, welches nun wieder als Rotation eines Vektorpotentiales $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ geschrieben werden kann.

5.9.2 Der Hertzsche und der Fitzgeraldsche Vektor

Wir verallgemeinern die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes zunächst durch Einführen des **Hertzschen Vektors** in Analogie zu Gleichung (5.91), indem wir für die komplexe Amplitude dieses Vektors

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \tag{5.107}$$

schreiben. Wir führen noch $k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ ein und erhalten dann für (5.104):

$$\mathrm{rot}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})\right] = 0. \tag{5.108}$$

Folglich muß ein komplexes skalares Feld $\phi(\mathbf{r})$ derart existieren, daß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) \tag{5.109}$$

gilt. Wir setzen nun (5.107) und (5.109) in (5.102) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(\mathbf{r}) &= i\omega\varepsilon_0\left[\mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r})\right] \\
&= i\omega\varepsilon_0\left[-\nabla^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r})\right]
\end{aligned}$$

oder

$$-\nabla^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{i\omega\varepsilon_0}.$$

Es besteht nun große Freiheit in der Wahl von $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ und $\phi(\mathbf{r})$. Das $\mathbf{H}$-Feld ist unabhängig von der Divergenz von $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$, und man verwendet insbesonders die Eichung

$$\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}). \tag{5.110}$$

Damit hängen die komplexen Amplituden der elektromagnetischen Felder nur von der komplexen Amplitude $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ des Hertzschen Vektors ab:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= i\omega\varepsilon_0\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + \mathrm{graddiv}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{5.111}$$

und $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ wird aus der Differentialgleichung

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\varepsilon_0}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{5.112}$$

bestimmt.

Will man nun Lösungen für den unendlich ausgedehnten Fall aufsuchen, so führt man die Randbedingung

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

ein, und findet für das Vektorpotential aus (5.77)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{i\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c_0)},$$

oder

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

wobei $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ auf den (begrenzten) Raumbereich $\mathbb{B}$ beschränkt ist. Es folgt dann für die komplexe Amplitude des Hertzschen Vektors

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{5.113}$$

Aus rein formalen Überlegungen ersetzt man die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ durch eine fiktive magnetische Stromdichte $\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t)$, und für diese gelte anstelle von (5.102) und (5.104):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 &(5.114)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{j}^m(\mathbf{r}). &(5.115)\end{aligned}$$

Durch Divergenzbildung folgt aus (5.114):

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,$$

und damit kann man die komplexe Amplitude des $\mathbf{E}$-Feldes als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \operatorname{rot}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \tag{5.116}$$

schreiben, mit $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ der komplexen Amplitude des FITZGERALD**schen Vektors**. Setzt man (5.116) in (5.114) ein, so folgt

$$\operatorname{rot}\Big[\mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})\Big] = 0,$$

mit $k^2 = \omega\varepsilon_0\mu_0$. Es muß somit ein komplexes skalares Feld $\psi(\mathbf{r})$ existieren, sodaß

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad}\psi(\mathbf{r}) \tag{5.117}$$

gilt. Wir verwenden nun (5.116), (5.117) und (5.115) und erhalten:

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}^m(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0\Big[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) - \operatorname{grad}\psi(\mathbf{r})\Big]\\ &= i\omega\mu_0\Big[-\nabla^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) - \operatorname{grad}\psi(\mathbf{r})\Big]\end{aligned}$$

oder

$$-\nabla^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{j}^m(\mathbf{r})}{i\omega\mu_0}.$$

Wie im Fall des Hertzschen Vektors kann man die Freiheit der Wahl von $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ und $\psi(\mathbf{r})$ zur Elimination des skalaren Potentiales $\psi(\mathbf{r})$ benutzen. Durch die Eichung

$$\mathrm{div}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$$

folgt dann das zu (5.111) analoge Ergebnis

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) - \mathrm{graddiv}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

und die komplexe Amplitude $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ wird aus

$$\nabla^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{j}^m(\mathbf{r})}{i\omega\mu_0}$$

bestimmt. Die komplexe Amplitude $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ erfüllt also die strukturell gleiche Differentialgleichung, wie die komplexe Amplitude des Hertzschen Vektors, und damit folgt für $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ schließlich:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi i\omega\mu_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV'\,\frac{\mathbf{j}^m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

In quellfreien Gebieten gilt für $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= \mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) &= \mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

und aus (5.107) und (5.109) folgt:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}).$$

Analog ergibt sich aus (5.116) und (5.117)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0\mathrm{rot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}). \tag{5.118}$$

Somit müssen zwischen $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ die folgenden Realtionen gelten:

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= -\mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \\ \mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{5.119, 5.120}$$

und diese beiden Beziehungen sind sogar einander äquivalent. Um dies zu zeigen bilden wir die Rotation:

$$\begin{aligned} \mathrm{rotrotrot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= \mathrm{rot}\left[\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})\right] \\ &= k^2 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \\ &= i\omega\mu_0 \mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \\ \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0 \mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \\ \Longrightarrow \quad i\omega\varepsilon_0 \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= -\mathrm{rotrot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

und wir haben die erste Gleichung von (5.119) aufgefunden. Die Zweite findet man analog. Schließlich ergeben die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,[i\omega\varepsilon_0\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + \mathrm{rot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})] &= \mathbf{0} \\ \mathrm{rot}\,[\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - i\omega\mu_0\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Klammern ist ausreichend, daß diese Gleichungen identisch erfüllt sind. Daraus folgt der Zusammenhang zwischen den komplexen Amplituden $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ in quellfreien Gebieten:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\mathrm{rot}\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{5.121}$$

5.9.3 Das oszillierende elektrische Stromelement

Wir geben als elektrische Stromquelle ein im Punkt $\mathbf{r}'$ lokalisiertes, zeitlich rein periodisch veränderliches Stromelement $I(\mathbf{r}', t)\, d\mathbf{s}'$ vor (siehe Abb. 5.4). Somit ist $d\mathbf{s}'$ das Linienelement im Punkte $\mathbf{r}'$ und der Strom wird dann durch

$$I(\mathbf{r}', t)d\mathbf{s}' = [Id\mathbf{s}']\, e^{i\omega t}$$

beschrieben, wobei dann $I(\mathbf{r}')ds' = Id\mathbf{s}'$ die komplexe Amplitude des Stromelementes ist. Die Stromdichte im Punkt $\mathbf{r}'$ folgt daraus mit

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = Id\mathbf{s}''\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''),$$

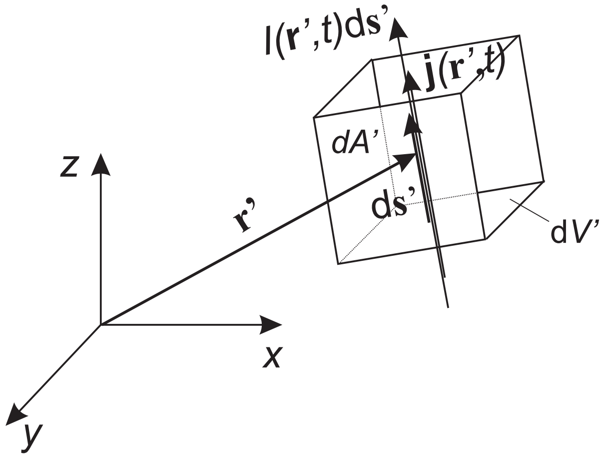


Abbildung 5.4: Zusammenhang von elektrischer Stromdichte und Stromelement.

und damit erhalten wir die komplexe Amplitude des Hertzschen Vektors (5.113):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{B}} dV''(Id\mathbf{s}'')\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \\ &= \frac{Id\mathbf{s}'}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\end{aligned}$$

Nun wird der Strom $I(t)$ durch eine zeitliche Veränderung von Ladung beschrieben:

$$I(t) = \frac{d}{dt}q(t),$$

und mit $q(t) = qe^{i\omega t}$ folgt

$$Ie^{i\omega t} = i\omega q e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad I = i\omega q.$$

Es gilt aber weiters nach (5.84) für das Dipolmoment dieser zeitlich veränderlichen Ladung auf dem Linienelement $d\mathbf{s}'$, welche wir uns durch Ladungstransport zwischen den beiden an den Enden von $d\mathbf{s}'$ angebrachten Ladungen $+q$ und $-q$ vorstellen können:

$$\mathbf{p}(t) = q(t)d\mathbf{s}' = qd\mathbf{s}'e^{i\omega t} = \mathbf{p}e^{i\omega t}.$$

Daraus folgt:

$$Id\mathbf{s}' = i\omega q d\mathbf{s}' = i\omega\mathbf{p},$$

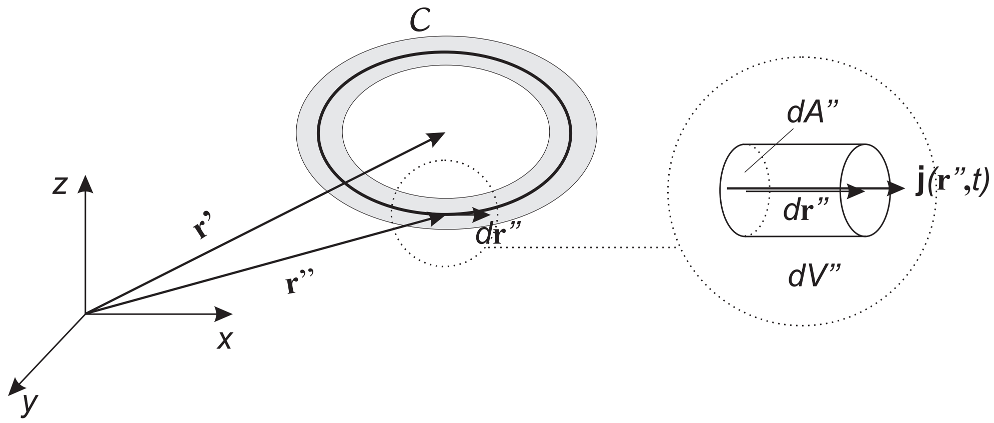


Abbildung 5.5: Der oszillierende Kreisstrom.

mit der komplexen Amplitude des Hertzschen Vektors:

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

des im Punkt $\mathbf{r}'$ lokalisierten oszillierenden elektrischen Dipols.

Damit konnte die Äquivalenz zwischen elektrischem Dipol und einem oszillierenden Stromelement nachgewiesen werden.

5.9.4 Der oszillierende elektrische Kreisstrom

Wir betrachten nun als elektrische Stromquelle einen oszillierenden Kreisstrom, einen zeitlich rein periodischen Strom

$$I(t) = Ie^{i\omega t}.$$

Er fließe entlang einer ebenen geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ mit dem “Mittelpunkt” $\mathbf{r}'$ (siehe Abb. 5.5). Wir können nun, aufbauend auf (2.19), die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}'', t)$ im Punkte $\mathbf{r}'' \in \mathcal{C}$ bestimmen. Zunächst wird der Strom I'' durch dA'' mit Hilfe von

$$I'' = |\mathbf{j}(\mathbf{r}'')|\, dA''$$

beschrieben. Daraus folgt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}'') = \frac{I''}{dA''} \frac{d\mathbf{r}''}{dr''},$$

und weiter, wie bereits mit Gleichung (4.26) gezeigt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}'')dV'' = \frac{I''}{dA''} \frac{d\mathbf{r}''}{dr''} dA'' dr'' = I'' d\mathbf{r}''.$$

Dabei sind $\mathbf{j}(\mathbf{r}'')$ und $I'' = I$ die komplexen Amplituden von Stromdichte und Strom.

Zur Bestimmung der komplexen Amplitude des Hertzschen Vektors nach (5.113) hat man nun alle Quellen im Bereich $\mathbb{B}$ zu berücksichtigen, und diese reduzieren sich auf den Strom entlang der Kurve $\mathcal{C}$. Wir schreiben daher:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 i\omega}\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}''\,\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \\ &= \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 i\omega}\int_{\Delta A} dA''\,\mathbf{n}\times\nabla_{\mathbf{r}''}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}. \qquad (5.122)\end{aligned}$$

Ist nun $\mathbf{r}$ weit vom Kreisstrom entfernt und die Fläche ΔA, welche von der Kurve $\mathcal{C}$ umschlossen wird, klein, also $|\mathbf{r}-\mathbf{r}''| \gg |\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|\,, \mathbf{r}' \in \mathcal{C}$, dann ist der Integrand von (5.122) annähernd konstant, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &\cong \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 i\omega}\mathbf{n}\times\nabla_{\mathbf{r}''}\left.\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\right|_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'}\int_{\Delta A} dA'' \\ &= -\frac{I\Delta A}{4\pi\varepsilon_0 i\omega}\mathbf{n}\times\nabla_{\mathbf{r}}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\end{aligned}$$

Führen wir nun entsprechend (4.32) das magnetische Dipolmoment

$$\mathbf{M} = I\Delta A\mathbf{n}$$

ein, und führen weiters den Limes $\Delta A \to 0$ aus, so erhält man den Hertzschen Vektor für den magnetischen Punktdipol mit

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 i\omega}\mathbf{m}\times\nabla_{\mathbf{r}}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}}\times\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi\varepsilon_0 i\omega}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]. \qquad (5.123)\end{aligned}$$

Uns interessiert das $\mathbf{E}$- und das $\mathbf{H}$-Feld im Punkte $\mathbf{r}$, also im quellfreien Gebiet. In diesem Gebiet gelten die Beziehungen (5.121) zwischen Hertzschem und Fitzgeraldschem Vektor:

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\operatorname{rot}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}),$$

und (5.123) führt dann zu

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

der komplexen Amplitude des Fitzgeraldschen Vektors eines oszillierenden magnetischen Dipols. Wir führen nun

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\
\mathbf{e}_R &= \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
x &= -ikR = -iR\omega/c_0 \\
\Phi(x) &= \frac{e^x}{x} \\
\mathbf{C} &= \frac{ik\mathbf{m}}{4\pi}
\end{aligned}$$

ein, und finden dann:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}\Phi(x).$$

Die komplexen Amplituden der elektromagnetischen Felder folgen dann aus (5.118):

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -k^2 \frac{e^x}{x} \left[\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \mathbf{C} - \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) (\mathbf{C}\mathbf{e}_R)\, \mathbf{e}_R \right] \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\omega\mu_0 k \frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbf{C} \times \mathbf{e}_R.
\end{aligned} \tag{5.124}$$

Dies entspricht dem Ergebnis, welches man aus (5.96) und (5.97) für den zeitlich periodisch oszillierenden elektrischen Dipol erhalten würde, nur sind die **E**- und **H**-Felder vertauscht.

5.10 Elektromagnetische Felder in Materie

5.10.1 Grundsätzliches

Wie in Abschnitt 3.10 ausgeführt wurde, enthält ein idealer Leiter frei bewegliche Ladungen. Bringt man einen solchen Leiter in ein elektrisches Feld, so findet eine Ladungsbewegung statt, und erst im End- bzw. Gleichgewichtszustand ist der ideale Leiter feldfrei, d.h.: in seinem Inneren ist $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Bevor dieser Ausgleich stattgefunden hat, bewegen sich die freien Ladungsträger im Leiterinneren und bilden so einen Strom. Da das Leiterinnere nicht zu jeder Zeit feldfrei sein muß, können auch etwaige gebundene Ladungen eine Reaktion auf das Feld zeigen, sodaß man definiert:

> **Nichtideale** *Leiter sind materielle Gegenstände, die sowohl (fast)* **frei bewegliche** *als auch* **gebundene** *Ladungen besitzen.*

Die Stromdichteverteilung im Leiter, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, als Reaktion auf ein elektrisches Feld wird sich somit aus zwei Beiträgen zusammensetzen:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{r}, t), \tag{5.125}$$

mit der **induzierten Stromdichte** $\mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ als Reaktion auf ein elektrisches Feld und der **eingeprägten Stromdichte** $\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$, welche unabhängig von etwaigen Feldern fest vorgegeben ist.

Im funktionalen Zusammenhang

$$\mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \approx \mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$$

manifestieren sich die speziellen Eigenschaften des Leiters. Die zusätzliche $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ Abhängigkeit ergibt sich daraus, daß das $\mathbf{B}$-Feld eine Kraft auf Ströme ausübt. Dieser Einfluß ist als **Halleffekt** bekannt, soll aber im weiteren vernachlässigt werden. Ist nun $\mathbf{j} \parallel \mathbf{E}$, so folgt vereinfachend

$$\mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{E})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

und ist σ von $\mathbf{E}$ unabhängig, so gewinnen wir daraus das Ohm**sche Gesetz**

$$\mathbf{j}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{5.126}$$

Leiter, in welchen (5.126) erfüllt ist, nennt man **lineare Medien**. σ ist dabei die (spezifische) **elektrische Leitfähigkeit** mit der Dimension $\mathrm{A(Vm)^{-1}}$, wobei für $\mathrm{AV^{-1}}$ die Einheit **Siemens** (S) als Einheit der Leitfähigkeit eingeführt wurde. Man verwendet aber auch sehr häufig die Einheit **Ohm** ($\Omega = \mathrm{VA^{-1}}$) und schreibt dann die Einheit von σ als $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Sehr häufig schreibt man aber (5.126) auch als

$$\rho\,\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

mit ρ als (spezifischen) **elektrischen Widerstand**. ρ hat die Dimension $\mathrm{VA^{-1}m} = \Omega\mathrm{m}$. Ideale Dielektrika besitzen keine frei beweglichen Ladungen und damit wird ihr Verhalten durch $\sigma = 0$ beschrieben. Im Gegensatz dazu wird der ideale Leiter durch $\sigma = \infty$ zu charakterisieren sein.

5.10.2 Die MAXWELLschen Gleichungen

Es gelten natürlich wieder die MAXWELLschen Gleichungen in der Form (2.23) bis (2.26). Weiters gelten auch die materialspezifischen Gleichungen (3.76), (4.55), (5.125) und (5.126). Für lineare Medien folgt daher:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho(\mathbf{r}, t) \tag{5.127}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r},t) + \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &\quad (5.128)\\
\operatorname{div}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= 0 &\quad (5.129)\\
\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mu_0\mu\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= 0. &\quad (5.130)
\end{aligned}
$$

Man schreibt in (5.128) auch sehr häufig

$$\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathbf{j}'(\mathbf{r},t),$$

und führt auf diese Weise die **Verschiebungsstromdichte $\mathbf{j}'(\mathbf{r},t)$** ein.

Wie man aus den Gleichungen (5.128) bis (5.130) ersehen kann, sind die Lösungen dieser Gleichungen auf idente Weise, wie zuvor für das Vakuum abgeleitet, auffindbar. In den Ergebnissen für das Vakuum sind lediglich ε_0 durch $\varepsilon_0\varepsilon$ und μ_0 durch $\mu_0\mu$ zu ersetzen.

5.10.3 Stetigkeitsbedingungen

Auch hier läßt sich die Argumentation von Abschnitt 3.10.4 vollinhaltlich für das **E**- und das **B**-Feld übernehmen:

$$
\begin{aligned}
\left[\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right]\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \eta(\mathbf{r},t)\\
\left[\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right]\times\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Es “springt” also die Normalkomponente des **D**-Feldes, während die Tangentialkomponente des **E**-Feldes unverändert vom Bereich $\boxed{1}$ in den Bereich $\boxed{2}$ übergeht.

Für das **B**- und das **H**-Feld folgen die Ergebnisse von Abschnitt 4.10; nur muß diesmal

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \int_{\Delta A} d\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = I(t)$$

gelten, wobei $I(t)$ der gesamte durch ΔA (siehe Abb. 4.4) fließende Strom ist. Im Limes $h\to 0$ und $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_3$ folgt $d\mathbf{s}^{(1)} = d\mathbf{s}^{(3)}$ und der Beitrag des zweiten Integrales verschwindet wegen $\Delta A\to 0$. Nun ist $\mathbf{t}(\mathbf{r})\times\mathbf{n}(\mathbf{r})$ ein Flächennormalvektor auf ΔA, wenn $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ einer der Tangetialvektoren an ΔA ist. Damit geht $I(t)\to\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t)(\mathbf{t}(\mathbf{r})\times\mathbf{n}(\mathbf{r}))ds$ und wir erhalten zunächst:

$$\left[\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right]\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t)(\mathbf{t}(\mathbf{r})\times\mathbf{n}(\mathbf{r})),$$

für alle Tangentialvektoren $\mathbf{t}(\mathbf{r})\in\Delta A$; $\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t)$ ist dabei die Flächenstromdichte im Punkte $\mathbf{r}$. Wir wählen nun einen speziellen Tangentialvektor $\mathbf{t}(\mathbf{r}) =$

$\mathbf{t}'(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})$, wobei $\mathbf{t}'(\mathbf{r})$ ein anderer Tangentialvektor an die Fläche ΔA im Punkte $\mathbf{r}$ ist. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{t}'(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) \left[\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right] = \\
&= \mathbf{t}'(\mathbf{r}) \left\{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right]\right\} \\
&= \left\{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right]\right\} \mathbf{t}'(\mathbf{r}) \\
&= -\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t) \left[(\mathbf{t}'(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})\right] \\
&= \boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t) \left[(\mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}))\mathbf{t}'(\mathbf{r}) - ((\mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{t}'(\mathbf{r}))\mathbf{n}(\mathbf{r})\right] \\
&= \boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t)\mathbf{t}'(\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right] = \boldsymbol{\iota}(\mathbf{r},t)$$

für die Tangentialkomponenten des $\mathbf{H}$-Feldes. Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ folgt noch für die Normalkomponenten des $\mathbf{B}$-Feldes

$$\left[\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right] \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{B}} dV\, \rho(\mathbf{r},t) + \int_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A}\, \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0$$

folgt unmittelbar

$$\left[\mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{j}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right] \mathbf{n}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \eta(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

und aufgrund von (5.125) und (5.126) ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{j}^{(e,1)}(\mathbf{r},t) - \mathbf{j}^{(e,2)}(\mathbf{r},t)\right] \mathbf{n}(\mathbf{r}) \\
&\quad + \left[\sigma_1 \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t) - \sigma_2 \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},t)\right] \mathbf{n}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \eta(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \qquad (5.131)
\end{aligned}$$

Abschließend soll noch darauf hingewiesen werden, daß all diese Beziehungen auch für zeitlich rein periodische elektromagnetische Felder gültig sind, wenn man anstelle der Feldgrößen die komplexen Amplituden einsetzt. Auf der rechten Seite von (5.131) ist $\partial\eta(\mathbf{r},t)/\partial t$ durch $i\omega\eta(\mathbf{r})$ zu ersetzen, wobei $\eta(\mathbf{r})$ die komplexe Amplitude der Flächenladungsdichte ist.

Wir können nun mehrere Fälle unterscheiden:

(1) Sind beide Medien ideale Dielektrika, so gilt

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.$$

Sind nun keine aufgeprägten Stromdichten vorhanden, verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (5.131), und damit muß auch die komplexe Amplitude der Flächenladung Null sein, $\eta(\mathbf{r}) = 0$. In diesem Sinne müßte auch jede Flächenstromdichte $\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r})$ identisch verschwinden.

Tatsächlich folgt das Verschwinden der Flächenstromdichte aber bereits auch für jede endliche Leitfähigkeit σ - und ganz besonders für $\sigma = 0$ - aus dem Ohmschen Gesetz, da eine nicht verschwindende Flächenstromdichte einer singulären, auf einer Fläche konzentrierten (Volums)Stromdichte entspricht. Das Produkt $\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r})$ wird nur im Falle $\sigma \to \infty$, also im Fall des idealen Leiters, singulär.

Es folgen damit die Stetigkeitsbedingungen für die komplexen Amplituden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right] &= \mathbf{0} \\
\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r})\right] &= \mathbf{0} \\
\left[\varepsilon_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \varepsilon_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= 0 \\
\left[\mu_1\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mu_2\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= 0.
\end{aligned}$$

(2) Beide Medien sind nicht ideale Leiter, dann treten keine Flächenströme auf:

$$\boldsymbol{\iota}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

$\eta(\mathbf{r})$ muß aber nicht mehr notwendig verschwinden. Trifft dies allerdings zu, so folgt aus (5.131):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) \\
\sigma_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \sigma_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

woraus

$$\sigma_1\varepsilon_2 = \sigma_2\varepsilon_1$$

folgt. $\eta(\mathbf{r}) = 0$ ist somit nur mit speziellen linearen Medien realisierbar.

Im allgemeinen wird aber gelten:

$$\begin{aligned}
\left[\varepsilon_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \varepsilon_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\eta(\mathbf{r}) \\
\left[\sigma_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) - \sigma_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= -i\omega\eta(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\left[\sigma_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})-\sigma_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\eta(\mathbf{r}),$$

was schließlich

$$\left(\varepsilon_1-\frac{i\sigma_1}{\omega\varepsilon_0}\right)\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})=\left(\varepsilon_2-\frac{i\sigma_2}{\omega\varepsilon_0}\right)\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})$$

ergibt. Man führt nun die *komplexe Dielektrizitätskonstante*

$$\epsilon=\varepsilon-i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$$

ein, und findet dann:

$$\left[\epsilon_1\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})-\epsilon_2\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r})=0.$$

Der nicht ideale Leiter verhält sich also formal wie ein Dielektrikum mit komplexer Dielektrizitätskonstante ϵ.

(3) Einer der beiden Leiter (etwa $\boxed{2}$) sei ein idealer Leiter:

$$\sigma_2=\infty,\qquad \epsilon_2=-i\infty.$$

Es gilt nun (keine aufgeprägten Stromdichten vorausgesetzt):

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r})-\varepsilon_0\varepsilon i\omega\mathbf{E}(\mathbf{r})-\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}\\
\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r})-\mathbf{E}(\mathbf{r})\left[\varepsilon_0\varepsilon i\omega+\sigma\right] &= \mathbf{0}\\
\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r})-\mathbf{E}(\mathbf{r})i\omega\varepsilon_0\left[\varepsilon+\frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0}\right] &= \mathbf{0}\\
\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r})-\mathbf{E}(\mathbf{r})i\omega\varepsilon_0\epsilon &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhalten wir dann für das **E**- und **H**-Feld

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\epsilon}\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r})\\
\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

und wegen $\epsilon=\epsilon_2=-i\infty$ folgt für alle Punkte $\mathbf{r}$ im idealen Leiter, daß $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r})$ identisch verschwinden.