Kapitel 2

Lagrange Feldtheorie

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Feld in jedem Raumpunkt als dynamische Variable und diese soll dann direkt quantisiert werden. Dieser Zugang zur Quantenfeldtheorie verallgemeinert die klassische Mechanik und ihre Quantisierung auf ein kontinuierliches System, also ein Feld. Hiezu wird eine Lagrangefunktion eingeführt, aus welcher durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips Feldgleichungen folgen. Wir führen im weiteren die zu den Feldern konjugierten Impulse ein und prägen diesen kanonische Vertauschungsrelationen auf. Auf diese Weise ist eine systematische Quantisierungsprozedur gegeben.

2.1 Klassische Lagrange Feldtheorie

Wir untersuchen ein System, welches zu seiner Bestimmung mehrere Felder $\phi_r(x^\mu), r = 1, \ldots, N$ benötigt, $x^\mu = (t, \mathbf{r})$. Der Index r kann auch dazu verwendet werden Komponenten desselben Feldes, etwa eines Vektorpotentiales $\mathbf{A}(x^\mu)$ zu beschreiben. Wir beschränken uns dabei auf eine Theorie, welche unter Verwendung eines Variationsprinzipes aus einem Wirkungsintegral über eine Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r) \tag{2.1}$$

abgeleitet werden kann. Hier bedeutet

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Gleichung (2.1) beschreibt natürlich nicht den allgemeinst möglichen Fall, aber ein Großteil der hier interessierenden physikalischen Probleme wird durch (2.1) abgedeckt.

Wir definieren nun das Wirkungsintegral $S(\mathbb{B})$ für eine beliebige Region $\mathbb{B}$ des vierdimensionalen Raum-Zeitkontinuums durch

$$S(\mathbb{B}) = \int\limits_{\mathbb{B}} d^4x\, \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r). \tag{2.2}$$

Wir postulieren nun, daß die Bewegungsgleichungen – also die Feldgleichungen – aus einem Variationsprinzip gewonnen werden, welches analog zum Hamiltonprinzip ist. Wir betrachten daher in der Region $\mathbb{B}$ Variationen der Felder

$$\phi_r(x^\mu) \quad \to \quad \phi_r(x^\mu) + \delta\phi_r(x^\mu), \tag{2.3}$$

welche an der Randfläche $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$, die $\mathbb{B}$ begrenzt, verschwinden:

$$\delta\phi_r(x^\mu) \stackrel{!}{=} 0, \qquad \forall \quad x^\mu \in \mathcal{S}_{\mathbb{B}}. \tag{2.4}$$

Die Felder $\phi_r(x^\mu)$ können dabei auch komplexwertig sein. In einem solchen Fall deutet man dann die Felder $\phi_r(x^\mu)$ und $\phi_r^\star(x^\mu)$ als unabhängige Felder.

Wir fordern nun, daß im Bereich $\mathbb{B}$ das Wirkungsintegral (2.2) unter Variationen (2.3) stationär bleibt:

$$\delta S(\mathbb{B}) \stackrel{!}{=} 0, \tag{2.5}$$

oder

$$\begin{aligned}
\delta S(\mathbb{B}) &= \int\limits_{\mathbb{B}} d^4x\, \delta\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r) \\
&= \int\limits_{\mathbb{B}} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta(\partial_\mu\phi_r) \right\} \\
&\quad [\text{ partielle Integration }] \\
&= \int\limits_{\mathbb{B}} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) \right\} \delta\phi_r + \int\limits_{\mathbb{B}} d^4x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r \right).
\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{B}} d^4x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r \right) &= \oint\limits_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}} d^3s \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) \delta\phi_r\, \mathbf{n} \\
&\stackrel{(2.4)}{=} 0,
\end{aligned}$$

und somit ist die Forderung $S(\mathbb{B}) \stackrel{!}{=} 0$ durch die *Euler-Lagrange Gleichungen*

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) = 0, \quad r = 1, \ldots, N \tag{2.6}$$

erfüllt. Sie sind auch die gesuchten Feldgleichungen.

Diese klassische Theorie soll nunmehr quantisiert werden. Dazu müssen konjugierte Orts- und Impulsvariable eingeführt werden. Das hier studierte System hat eine kontinuierlich unendliche Zahl von Freiheitsgraden, welche den Feldwerten der Felder $\phi_r(x^\mu)$ entsprechen. Diese Feldwerte sind in jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ Funktionen der Zeit t. Zur Einführung konjugierter Variabler gehen wir vereinfachend auf ein System von abzählbar vielen Freiheitsgraden über und führen am Ende wieder den Übergang zum Kontinuum durch.

Wir betrachten dazu unser System zu einem festen Zeitpunkt t und zerlegen den dreidimensionalen Raum, also die ebene Raumoberfläche $t = konst.$ in kleine Zellen $\delta\mathbf{r}_i$ von gleichem Volumen. Innerhalb dieser Zellen nähern wir die Feldwerte durch ihren Wert im Zentrum der Zelle $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ an. Damit ist das System durch einen diskreten Satz verallgemeinerter Koordinaten

$$q_{r,i}(t) = \phi_r(i,t) \equiv \phi_r(t, \mathbf{r}_i), \quad r = 1, \ldots, N; \quad i = 1, 2, \ldots$$

beschrieben, welche den Feldwerten an den diskreten Gitterpunkten $\mathbf{r}_i$ entsprechen. Ersetzen wir nun die Raumableitungen der Felder durch Differenzkoeffizienten zwischen benachbarten Gitterplätzen, so kann man die Lagrangefunktion des diskretisierten Systemes durch

$$L(t) = \sum_i \delta\mathbf{r}_i \mathcal{L}_i(\phi_r(i,t), \phi_r(i',t), \dot{\phi}_r(i,t))$$

beschreiben, $\dot{\phi}_r(i,t) = \partial_0\phi_r(i,t)$. Die Lagrangedichte in der i-ten Zelle, $\mathcal{L}_i$, hängt vom Feld in den benachbarten Gitterzellen i' ab, da wir die Ortsableitung durch eine entsprechende Differenzbildung ersetzt haben. Wir definieren nun die zu $q_{r,i}$ konjugierten Impulse in üblicher Weise:

$$p_{r,i}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{r,i}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_r(i,t)} \equiv \pi_r(i,t)\delta\mathbf{r}_i, \tag{2.7}$$

mit

$$\pi_r(i,t) = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\phi}_r(i,t)}. \tag{2.8}$$

Die Hamiltonfunktion des Systems ist dann durch

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_{r,i}\dot{q}_{r,i} - L \\ &= \sum_i \delta\mathbf{r}_i \left[\pi_r(i,t)\dot{\phi}_r(i,t) - \mathcal{L}_i\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

gegeben. Wenn wir nun den Limes $\delta\mathbf{r}_i \to 0$ bilden definieren wir die Felder $\pi_r(x^\mu)$, welche den Feldern $\phi_r(x^\mu)$ konjugiert sind, über

$$\pi_r(x^\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_r(x^\mu)},$$

und wir erhalten für die Lagrangefunktion

$$L(t) = \int d^3r\,\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r), \tag{2.10}$$

und für die Hamiltonfunktion

$$H(t) = \int d^3r\,\mathcal{H}(x^\mu), \tag{2.11}$$

mit der *Hamiltondichte*

$$\mathcal{H}(x^\mu) = \pi_r(x^\mu)\,\dot{\phi}_r(x^\mu) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r). \tag{2.12}$$

2.2 Quantisierte Lagrange Feldtheorie

2.2.1 Vertauschungsrelationen

Der Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik ist nunmehr leicht zu vollziehen: wir interpretieren die konjugierten Koordinaten und Impulse des diskreten Gitters als Heisenbergoperatoren und unterwerfen sie den kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_r(j,t), \hat{\pi}_s(j',t)\right] &= i\frac{\delta_{r,s}\delta_{j,j'}}{\delta\mathbf{r}_j} \\ \left[\hat{\phi}_r(j,t), \hat{\phi}_s(j',t)\right] &= \left[\hat{\pi}_r(j,t), \hat{\pi}_s(j',t)\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Geht nun $\delta\mathbf{r}_j$ gegen Null, so gilt

$$\lim_{\delta\mathbf{r}_j\to 0}\frac{\delta_{j,j'}}{\delta\mathbf{r}_j} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

für $\mathbf{r}$ in Zelle j und $\mathbf{r}'$ in Zelle j'. Daraus folgt für die Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_r(\mathbf{r},t), \hat{\pi}_s(\mathbf{r}',t)\right] &= i\delta_{r,s}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ \left[\hat{\phi}_r(\mathbf{r},t), \hat{\phi}_s(\mathbf{r}',t)\right] &= \left[\hat{\pi}_r(\mathbf{r},t), \hat{\pi}_s(\mathbf{r}',t)\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Es muß hier besonders betont werden, daß die Kommutatoren (2.14) die Felder zur selben Zeit enthalten. Es wird noch die Aufgabe späterer Überlegungen sein, die Vertauschungsrelationen für unterschiedliche Zeitpunkte zu untersuchen.

2.2.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Noether Theorem

Aus der Heisenbergschen Bewegungsgleichung für den Operator $\hat{O}(t)$

$$i\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \left[\hat{O}(t), \hat{H}\right]$$

folgt, daß $\hat{O}(t)$ eine Konstante der Bewegung ist, wenn

$$\left[\hat{O}(t), \hat{H}\right] = 0$$

erfüllt ist. Konstante der Bewegung entspringen Invarianzeigenschaften von Systemen unter der Wirkung von Elementen aus Transformationsgruppen. (So führt etwa die Translationsinvarianz zur Erhaltung des linearen Impulses und die Drehinvarianz - also Invarianz unter Operationen der Drehgruppe - zur Erhaltung des Drehimpulses.) Solche Transformationen erlauben auch äquivalente Systembeschreibungen; etwa zwei Referenzsysteme, welche über die Lorentztransformation in Beziehung stehen. In der Quantenmechanik müssen zwei solche Systembeschreibungen über eine unitäre Transformation $\hat{U}$ gekoppelt sein, welche Zustände und Operatoren wie folgt transformiert:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \quad &\rightarrow \quad |\psi'\rangle = \hat{U}\,|\psi\rangle \\ \hat{O} \quad &\rightarrow \quad \hat{O}' = \hat{U}\hat{O}\hat{U}^{\dagger}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

(Siehe auch Appendix B.1, in welchem Schrödingerbild, Heisenbergbild und Wechselwirkungsbild als äquivalente Systembeschreibungen diskutiert werden.) Durch die Unitarität der Transformation wird sichergestellt, daß

(a) die Operatorgleichungen kovariant sind; sie haben also dieselbe Form unabhängig davon, ob sie in den ursprünglichen oder in den transformierten Operatoren angeschrieben wurden. Dies gilt insbesonders für die Vertauschungsrelationen und für die Bewegungsgleichungen. (So sind etwa die Maxwellgleichungen kovariant bezüglich der Lorentztransformation.)

(b) die Amplituden der Zustände und damit die Erwartungswerte für die Observablen invariant sind.

Im Fall von kontinuierlichen Transformationen kann $\hat{U}$ als

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{T}}, \quad \hat{T} = \hat{T}^{\dagger}, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \tag{2.16}$$

geschrieben werden. Daraus ergibt sich die infinitesimale Transformation

$$\hat{U} \approx \hat{1} + i\delta\alpha\hat{T}, \tag{2.17}$$

und wir erhalten für (2.15):

$$\begin{aligned} \hat{O}' &= \hat{O} + \delta\hat{O} \\ &= \left(\hat{1} + i\delta\alpha\hat{T}\right)\hat{O}\left(\hat{1} - i\delta\alpha\hat{T}\right) \\ \delta\hat{O} &= i\delta\alpha\left[\hat{T},\hat{O}\right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ist die Theorie unter solchen Transformationen invariant, so ist der Hamiltonoperator invariant, also $\delta\hat{H} = 0$, und damit $\left[\hat{T},\hat{H}\right] = 0$ und $\hat{T}$ ist eine Konstante der Bewegung.

Für eine Feldtheorie, deren Feldgleichungen aus einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ abgeleitet wurden, kann man Erhaltungsgrößen konstruieren, indem man die Symmetrietransformationen von $\mathcal{L}$ untersucht. Wir betrachten zunächst Transformationen der Art:

$$\phi_r(x^\mu) \quad \rightarrow \quad \phi_r'(x^\mu) = \phi_r(x^\mu) + \delta\phi_r(x^\mu). \tag{2.19}$$

Dies induziert in $\mathcal{L}$ eine Änderung $\delta\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right) = 0} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta(\partial_\mu\phi_r) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right)\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta(\partial_\mu\phi_r) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r\right). \end{aligned}$$

Ist nun $\mathcal{L}$ invariant unter den Transformationen (2.19), also $\delta\mathcal{L} = 0$, so folgt mit:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r\right) = \partial_\mu f^\mu(x^\mu) = 0, \tag{2.20}$$

unmittelbar eine *Kontinuitätsgleichung*. Wir definieren

$$F^\mu(t) = \int d^3r\, f^\mu(t, \mathbf{r}), \tag{2.21}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^\mu(t) &= \int d^3r\, \partial_\mu f^\mu(t, \mathbf{r}) = 0 \\ &= \int d^3r\, \partial_0 f^0(t, \mathbf{r}) + \int d^3r\, \partial_j f^j(t, \mathbf{r}) = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d}{dx^0} F^0(x^0) + \int d^3r\, \partial_j f^j(x^\mu) = 0. \tag{2.22}$$

Daraus folgt, daß

$$F^0(x^0) = \int d^3r\, f^0(x^\mu) \tag{2.23}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Setzt man also $\hat{T} = F^0$, so ist der zugehörige unitäre Operator durch (2.16) gegeben.

f^μ ist ein Vierervektor mit f^0 einer Volumensdichte und f^j einer Stromdichte der Erhaltungsgröße F^0. Wird (2.22) auf ein endliches dreidimensionales Volumen Ω, welches von einer Oberfläche $\mathcal{S}$ abgeschlossen ist, angewendet, so besagt diese Beziehung, daß die Abnahme von F^0 innerhalb von Ω gleich dem Strom von F^0 durch die Oberfläche $\mathcal{S}$ ist. Man nennt daher den Vierervektor f^μ, welcher (2.20) genügt, einen *Erhaltungsstrom*. (Genauer: eine Erhaltungs-Viererstromdichte.)

Theorem 2.1 (Noether Theorem) *Die Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ unter kontinuierlichen, einparametrigen Transformationen impliziert eine Erhaltungsgröße.*

Aus (2.20) folgt weiter:

$$\begin{aligned} f^0(x^\mu) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_r)} \delta\phi_r(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r(x^\mu)} \delta\phi_r(x^\mu) \\ &\overset{(2.7)}{=} \pi_r(x^\mu)\delta\phi_r(x^\mu), \end{aligned}$$

und somit erhalten wir:

$$F^0(x^0) = \int d^3r\, \pi_r(x^\mu)\delta\phi_r(x^\mu). \tag{2.24}$$

Komplexwertige Felder, Ladung

Bisher haben wir uns mit reelwertigen Feldern $\phi_r(x^\mu)$ auseinandergesetzt, $\phi_r(x^\mu)$ kann aber auch komplexwertig sein. In der quantisierten Theorie entsprechen diese dann nicht hermiteschen Operatoren. Es werden dann ϕ_r und ϕ_r^* als unabhängige Felder behandelt. Ist nun $\mathcal{L}$ invariant unter den Transformationen

$$\begin{aligned} \phi_r &\to \phi_r' = e^{i\varepsilon}\phi_r \approx (1+i\varepsilon)\,\phi_r \\ \phi_r^* &\to (\phi_r')^* = e^{-i\varepsilon}\phi_r^* \approx (1-i\varepsilon)\,\phi_r^*, \end{aligned} \tag{2.25}$$

und mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\delta\phi_r = i\varepsilon\phi_r; \qquad \delta\phi_r^* = -i\varepsilon\phi_r^*.$$

Damit folgt für (2.24):

$$F^0(x^0) = i\varepsilon \int d^3x\, \left[\pi_r(x^\mu)\phi_r(x^\mu) - \pi_r^*(x^\mu)\phi_r^*(x^\mu)\right]. \tag{2.26}$$

Da F^0 multipliziert mit einer beliebigen Konstanten ebenso erhalten bleibt, betrachtet man

$$Q = -iq \int d^3x\, \left[\pi_r(x^\mu)\phi_r(x^\mu) - \pi_r^*(x^\mu)\phi_r^*(x^\mu)\right] \tag{2.27}$$

als Erhaltungsgröße, wobei q eine noch zu bestimmende Konstante ist.

Wir quantisieren nun das System im Sinne von Abschnitt 2.2.1 und untersuchen die Vertauschungsrelation $\left[\hat{Q}, \hat{\phi}_r(x^\mu)\right]$ und finden für gleiche Zeiten ($(x')^0 = x^0$)

$$\begin{aligned} \left[\hat{Q}, \hat{\phi}_r(x^\mu)\right] &= -iq \int d^3r' \, \Big\{ \left[\hat{\pi}_s(x'^\nu)\hat{\phi}_s(x'^\nu), \hat{\phi}_r(x^\mu)\right] \\ &\qquad - \left[\hat{\pi}_s^\dagger(x'^\nu)\hat{\phi}_s^\dagger(x'^\nu), \hat{\phi}_r(x^\mu)\right] \Big\} \\ &= -iq \int d^3r' \, \underbrace{\left[\hat{\pi}_s(x'^\nu), \hat{\phi}_r(x^\mu)\right]}_{=-i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta_{r,s}} \hat{\phi}_s(x'^\nu) \\ &= -q\hat{\phi}_r(x^\mu). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Wir nehmen nun an, daß der Operator $\hat{Q}$ Eigenzustände $|Q'\rangle$ zum Eigenwert Q' besitzt, und bestimmen die Wirkung $\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{Q}\,|Q'\rangle &= Q'\,|Q'\rangle \\ \hat{\phi}_r(x^\mu)\hat{Q}\,|Q'\rangle &= Q'\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle \\ q\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle + \hat{Q}\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle &= Q'\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle \\ \hat{Q}\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle &= (Q'-q)\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Damit ist $\hat{\phi}_r(x^\mu)\,|Q'\rangle$ ein Eigenzustand der Erhaltungsgröße $\hat{Q}$ zum Eigenwert $Q'-q$ und wir können daher den Operator $\hat{\phi}_r(x^\mu)$ als *Vernichtungsoperator* bezeichnen.

Wir bestimmen weiters:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{Q},\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\right] &= -iq\int d^3r'\,\Big\{\left[\hat{\pi}_s(x'^\nu)\hat{\phi}_s(x'^\nu),\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\right] \\
&\quad -\left[\hat{\pi}_s^\dagger(x'^\nu)\hat{\phi}_s^\dagger(x'^\nu),\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\right]\Big\} \\
&= q\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

und finden:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\hat{Q}\,|Q'\rangle &= Q'\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle \\
-q\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle+\hat{Q}\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle &= Q'\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle \\
\hat{Q}\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle &= (Q'+q)\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Daraus ist ersichtlich, daß der Zustand $\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)\,|Q'\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{Q}$ zum Eigenwert $Q'+q$ ist. Damit kann der Operator $\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)$ als ein *Erzeugungsoperator* bezeichnet werden. Der Eigenwert Q' der Observablen $\hat{Q}$ ändert sich um $\pm q$.

Es wird sich später noch herausstellen, daß $\pm q$ die elektrische Ladung jener Teilchen ist, welche durch die komplexwertigen Felder $\phi_r(x^\mu)$ beschrieben werden. Damit wird dann $\hat{\phi}_r(x^\mu)$ ein Operator, welcher Teilchen mit der Ladung $+q$ vernichtet, oder Teilchen mit der Ladung $-q$ erzeugt. Für den Operator $\hat{\phi}_r^\dagger(x^\mu)$ gilt umgekehrtes. Also interpretieren wir den Operator $\hat{Q}$ als den *Ladungsoperator*. Somit ist die Ladung eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrangedichte gegenüber Transformationen vom Typ (2.25) invariant ist. Eine solche Transformation wird auch als *globale Phasentransformation* bezeichnet, da die Phase ε in (2.25) von x^μ unabhängig ist. Man bezeichnet dies auch als *Eichtransformation erster Art.* Es folgt weiters aus (2.27), daß komplexe Felder, also nicht hermitesche Feldoperatoren, notwendig sind um im Rahmen einer Feldtheorie geladene Teilchen zu beschreiben. Hermitesche Feldoperatoren beschreiben hingegen ungeladene Teilchen.

Zur Eindeutigkeit des Verfahrens ist es noch notwendig den *Vakuumzustand* $|0\rangle$ geladener Teilchen zu definieren:

$$\hat{Q}\,|0\rangle = 0. \tag{2.32}$$

Die Transformation (2.25) kann man auch als

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{Q}}$$

schreiben, was zu

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}'_r &= e^{i\alpha\hat{Q}}\hat{\phi}_r e^{-i\alpha\hat{Q}} \\
&\approx (1+i\alpha\hat{Q})\hat{\phi}_r(1-i\alpha\hat{Q}) \\
&= (\hat{\phi}_r + i\alpha\hat{Q}\hat{\phi}_r)(1-i\alpha\hat{Q}) \\
&\approx \hat{\phi}_r - i\alpha\hat{\phi}_r\hat{Q} + i\alpha\hat{Q}\hat{\phi}_r \\
&= \hat{\phi}_r + i\alpha\left[\hat{Q},\hat{\phi}_r\right] \\
&= (1-i\alpha q)\hat{\phi}_r
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

führt. Dies ist ident zu (2.25) für $\varepsilon = -\alpha q$.

Wir haben hier von elektrischer Ladung gesprochen, die hier diskutierte Analyse gilt aber uneingeschränkt für alle anderen Formen von Ladung.

Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung

Die Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung folgt aus der Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ gegenüber Translationen und Rotationen. Diese Transformationen formen eine kontinuierliche Gruppe und es ist somit ausreichend infinitesimale Transformationen zu betrachten, da jede Transformation durch eine Folge infinitesimaler Transformationen realisiert werden kann.

Die Transformation ist ganz allgemein durch

$$
\begin{aligned}
x_\alpha \quad \rightarrow \quad {x'}_\alpha &= x_\alpha + \delta x_\alpha \\
&= x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}x^\beta + \delta_\alpha
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

gegeben. δ_α ist dabei eine infinitesimale Verschiebung und die $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sind Elemente eines infinitesimalen, antisymmetrischen Tensors, $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$, welcher die Invarianz des Skalarproduktes $x_\alpha x^\alpha$ unter homogenen Lorentztransformationen ($\delta_\alpha = 0$) sicherstellt.

Die Transformation (2.34) resultiert in einer Feldtransformation, welche von folgender Form sein soll:

$$
\phi_r \quad \rightarrow \quad \phi'_r(x'^\mu) = \phi_r(x^\mu) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\sum_s S^{\alpha\beta}_{rs}\phi_s(x^\mu). \tag{2.35}
$$

x und x' bezeichnen dabei *denselben* Punkt in den beiden unterschiedlichen Referenzsystemen und ϕ_r bzw. ϕ'_r sind dann die Feldkomponenten in den beiden Systemen.

Die Invarianz unter den Transformationen (2.34) und (2.35) bedeutet, daß die Lagrangedichte, ausgedrückt in den neuen Koordinaten, dieselbe funktionale Form hat wie in den alten Koordinaten, also

$$\mathcal{L}\left(\phi_r(x^\mu), \partial_\alpha \phi_r(x^\mu)\right) = \mathcal{L}\left(\phi'_r(x'^\mu), \partial'_\alpha \phi'_r(x'^\mu)\right). \tag{2.36}$$

Aus (2.36) folgt dann die Kovarianz der Feldgleichungen und alles weitere. Erhaltungssätze folgen wenn man die rechte Seite von (2.36) unter Verwendung der ursprünglichen Koordinaten und Felder mit Hilfe von (2.34) und (2.35) ausdrückt.

Die Änderung von $\phi_r(x^\mu)$ mit unverändertem Argument wurde bereits in (2.19) angegeben:

$$\delta\phi_r(x^\mu) = \phi'_r(x^\mu) - \phi_r(x^\mu) \tag{2.37a}$$

und wir führen noch die weitere Variation

$$\delta_T\phi_r(x^\mu) = \phi'_r(x'^\mu) - \phi_r(x^\mu) \tag{2.37b}$$

ein. Wir können weiter schreiben:

$$\begin{aligned} \delta_T\phi_r(x^\mu) &= \left[\phi'_r(x'^\mu) - \phi_r(x'^\mu)\right] + \left[\phi_r(x'^\mu) - \phi_r(x^\mu)\right] \\ &= \delta\phi_r(x'^\mu) + \partial_\beta\phi_r(x^\mu)\delta x_\beta, \end{aligned} \tag{2.38}$$

mit δx_β aus (2.34). In erster Ordnung kleiner Größen kann man (2.38) auch als

$$\delta_T\phi_r(x^\mu) = \delta\phi_r(x^\mu) + \partial_\beta\phi_r(x^\mu)\delta x_\beta$$

schreiben und dann ergibt Gleichung (2.36)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}\left(\phi'_r(x'^\mu), \partial'_\alpha\phi'_r(x'^\mu)\right) - \mathcal{L}\left(\phi_r(x^\mu), \partial_\alpha\phi_r(x^\mu)\right) \\ &= \delta\mathcal{L} + \partial_\alpha\mathcal{L}\delta x^\alpha. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Es folgt, wie schon früher:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\delta\phi_r\right] \\ &= \partial_\alpha\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\left[\delta_T\phi_r - \partial_\beta\phi_r\delta x_\beta\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Wir fassen (2.39) und (2.40) zusammen und finden

$$\partial_\alpha\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\left[\delta_T\phi_r - \partial_\beta\phi_r\delta x_\beta\right] + \mathcal{L}\delta x^\alpha\right\} = 0,$$

oder

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0,$$

mit

$$
\begin{aligned}
f^{\alpha} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\delta_T\phi_r - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\partial_\beta\phi_r\delta x_\beta + \mathcal{L}\delta x^\alpha \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\delta_T\phi_r - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\partial_\beta\phi_r\delta x_\beta + \mathcal{L}g^{\alpha\beta}\delta x_\beta \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\delta_T\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Der Tensor $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ ist durch

$$
\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\partial_\beta\phi_r - \mathcal{L}g^{\alpha\beta} \qquad (2.42)
$$

gegeben.

Wir betrachten nun reine Translationen: für diese ist $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ und $\delta x_\alpha = \delta_\alpha$. Damit ist $\delta_T\phi_r = 0$ und wir erhalten

$$
f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta, \qquad (2.43)
$$

und da die vier Verschiebungen δ_α voneinander unabhängig sind, folgen die vier Kontinuitätsgleichungen

$$
\partial_\alpha\mathcal{T}^{\alpha\beta} = 0, \qquad \alpha = 0,1,2,3. \qquad (2.44)
$$

Damit erhalten wir in Analogie zu (2.21) die vier Erhaltungsgrößen

$$
\begin{aligned}
P^\alpha &= \int d^3r\,\mathcal{T}^{0\alpha} \\
&\overset{(2.8)}{=} \int d^3r\,\left[\pi_r(x^\mu)\partial^\alpha\phi_r(x^\mu) - \mathcal{L}g^{0\alpha}\right]. \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten weiter:

$$
\begin{aligned}
P^0 &= \int d^3r\,\left[\pi_r(x^\mu)\partial^0\phi_r(x^\mu) - \mathcal{L}\right] \\
&\overset{2.12}{=} \int d^3r\,\mathcal{H} = H, \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

und schließlich

$$
P^j = \int d^3x\,\pi_r(x^\mu)\partial^j\phi_r(x^\mu). \qquad (2.47)
$$

Damit kann P^α als der Energie-Impuls Vierervektor identifiziert werden, mit P^0 der Energiekomponente und P^j den drei Impulskomponenten des Feldes. Dem entsprechend nennt man den Tensor $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ den *Energie-Impulstensor* des

Feldes. Gleichung (2.44) beschreibt somit die Energie-Impuls Erhaltung unter Translationstransformationen.

Im nächsten Schritt untersuchen wir reine Drehungen, also $\delta_\alpha = 0$. In diesem Fall folgt für f^α:

$$f^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \tag{2.48}$$

mit

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\sum_s S_{rs}^{\beta\gamma}\phi_s(x^\mu) + \left[x^\beta\mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma\mathcal{T}^{\alpha\beta}\right]. \tag{2.49}$$

Die $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sind voneinander linear unabhängig und damit folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\alpha\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{2.50}$$

Wir haben als Erhaltungsgrößen (wegen $\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta}$):

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \int d^3x\,\mathcal{M}^{0\alpha\beta} \\ &= \int d^3x \left\{\left[x^\alpha\mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta\mathcal{T}^{0\alpha}\right] + \pi_r(x^\mu)\sum_s S_{rs}^{\alpha\beta}\phi_s(x^\mu)\right\}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Für die Raumindizes ($i, j = 1, 2, 3$) ist M^{ij} der Drehimpuls(operator) des Feldes. (So ist M^{12} die z-Komponente des Drehimpulses.) Man kann dabei den Anteil in den eckigen Klammern von (2.51) als den Bahndrehimpuls interpretieren. Der letzte Term wird dann als inner Spindrehimpuls des Feldes interpretiert.

“Rezept” zur Feldquantisierung

1. Definition des klassischen Feldes $\phi_r(x^\mu)$. (Dies erfolgt zumeist durch Angabe der Feldgleichungen.)

2. Aufsuchen der Lagrangedichte.

3. Bestimmen der konjungierten Impulse $\pi_r(x^\mu)$.

4. Quantisierung. Die Feldfunktionen $\phi_r(x^\mu)$ werden zu Feldoperatoren $\hat{\phi}_r(x^\mu)$ und die konjungierten Impulse $\pi_r(x^\mu)$ zu Operatoren $\hat{\pi}_r(x^\mu)$. Einführung von Vertauschungsrelationen zwischen diesen beiden Operatoren.

5. Entwicklen der Feldoperatoren nach Lösungen der klassischen Feldgleichungen. Dies führt zu neuen Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. (Anhang C)

6. Ableitung der Vertauschungsrelationen dieser neuen Operatoren und Bestimmung ihrer Eigenschaften. Von besonderem Interesse ist hier noch der Operator $\hat{a}^\dagger \hat{a}$.

7. Darstellung des Hamiltonoperators und anderer Erhaltungsgrößen unter Verwendung der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$.