Kapitel 3

Das Klein-Gordon Feld

3.1 Quantisierung des Klein-Gordon Feldes

Man kann die Klein-Gordon Gleichung auch als Feldgleichung der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_\alpha \phi(x^\mu)\partial^\alpha \phi(x^\mu) - m_0^2 \phi^2(x^\mu)\right] \tag{3.1}$$

auffassen. Dies wollen wir nun beweisen.

Die Feldgleichung für $\mathcal{L}$ folgt aus (2.6):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0$$

mit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m_0^2 \phi^2\right) \\
&= -\frac{1}{2} m_0^2 2\phi = -m_0^2 \phi(x^\mu). \\
\partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}\right) &= \frac{1}{2}\partial_0 \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)}\left(\partial_0 \phi \underbrace{\partial^0 \phi}_{=\partial_0 \phi} + \partial_j \phi \partial^j \phi - m_0^2 \phi\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\partial_0 2\partial_0 \phi = \partial_0 \partial^0 \phi(x^\mu) \\
\partial_1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi)}\right) &= \frac{1}{2}\partial_1 \phi \frac{\partial}{\partial(\partial_1 \phi)} \partial_1 \phi \quad \underbrace{\partial^1 \phi}_{=g^{1\alpha}\partial_\alpha \phi = -\partial_1 \phi} \\
&= -\frac{1}{2}\partial_1 \phi \frac{\partial}{\partial(\partial_1 \phi)} \partial_1 \phi \partial_1 \phi \\
&= -\partial_1 \partial_1 \phi = \partial_1 \partial^1 \phi(x^\mu).
\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2\right) \phi(x^\mu) = 0, \qquad \textbf{w.z.b.w.}$$

Damit konnten die ersten zwei Punkte des "Rezeptes" zur Feldquantisierung, nämlich Definition des klassischen Feldes und Aufsuchen der Lagrangedichte abgeschlossen werden.

Die zu $\phi(x^\mu)$ konjugierten Impulse $\pi(x^\mu)$ findet man aus

$$\begin{aligned} \pi(x^\mu) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \frac{1}{2} \left(\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_j \phi \partial^j \phi - m_0^2 \phi\right). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\partial_0 \phi \partial^0 \phi = \partial_0 \phi \partial_0 \phi = \dot{\phi} \dot{\phi},$$

und damit folgt unmittelbar:

$$\pi(x^\mu) = \partial_0 \phi(x^\mu) = \dot{\phi}(x^\mu). \tag{3.2}$$

Wenn wir nun quantisieren, wird das reelle Feld $\phi(x^\mu)$ zum hermiteschen Feldoperator $\hat{\phi}(x^\mu) = \hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$, welcher mit den konjugierten Impulsoperatoren $\hat{\pi}(x^\mu)$ folgende Gleichzeitigkeitsvertauschungsrelationen ($x^0 = x'^0$) befriedigt:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\pi}(x'^\mu)\right] &= i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\phi}(x'^\mu)\right] &= \left[\hat{\pi}(x^\mu), \hat{\pi}(x'^\mu)\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß durch ein solches quantisiertes Feld Teilchen beschrieben werden, hierzu entwickelt man $\hat{\phi}(x^\mu)$ nach dem vollständigen Satz von Lösungen der Klein-Gordon Gleichung:

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \hat{\phi}^+(x^\mu) + \hat{\phi}^-(x^\mu), \tag{3.4}$$

mit

$$\hat{\phi}^+(x^\mu) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}, \tag{3.5}$$

und

$$\hat{\phi}^-(x^\mu) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}, \tag{3.6}$$

wobei Ω das Volumen eines Grundgebietes ist, welches zur Einführung periodischer Randbedingungen definiert wurde. Der Wellenzahlvektor $\mathbf{k}$ geht über alle Werte, welche durch das periodische Grundgebiet zugelassen werden:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \qquad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wenn L die Kantenlänge des Grundgebietes ist. (Siehe auch Anhang C.) Wir erhalten weiter

$$k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = \left(m_0^2 + \mathbf{k}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Daraus folgt, daß der Vektor

$$k^\mu = (E, \mathbf{k})$$

ein Vierervektor ist, mit

$$E = \omega_{\mathbf{k}} = \left(m_0^2 + \mathbf{k}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

(3.8) ist die Energie eines Teilchens der Ruhemasse m_0 und mit dem Impuls $\mathbf{k}$, wie man aus dem Vergleich mit Gleichung (D.12) unmittelbar ersieht. Schließlich stellt die Tatsache, daß $\hat{a}(\mathbf{k})$ und $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ stets paarweise auftreten, sicher, daß $\hat{\phi}(x^\mu)$ hermitesch ist.

Wollen wir nun die Vertauschungsrelationen für die Operatoren $\hat{a}(\mathbf{k})$ ableiten, so müssen wir zunächst die $\hat{a}(\mathbf{k})$ durch die Operatoren $\hat{\phi}(x^\mu)$ ausdrücken. Dazu ist es nützlich die Zeitableitung von $\hat{\phi}(x^\mu)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\partial_0 \hat{\phi}(x^\mu) &= \partial_0 \hat{\phi}^+(x^\mu) + \partial_0 \hat{\phi}^-(x^\mu) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \partial_0 \left[\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp\{ik_\mu x^\mu\} &= \exp\left\{i\left(k_0 x^0 - \mathbf{kr}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{i\left(\omega_{\mathbf{k}} x^0 - \mathbf{kr}\right)\right\},
\end{aligned}$$

und damit wird

$$\begin{aligned}
\partial_0 e^{ik_\mu x^\mu} &= i\omega_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \\
\partial_0 \hat{\phi}(x^\mu) &= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \left[-i\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + i\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}\right].
\end{aligned}$$

Man findet jetzt unmittelbar

$$\hat{a}(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\Omega\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega d^3r\, e^{ik_\mu x^\mu} \left[i\partial_0 \hat{\phi}(x^\mu) + \omega_{\mathbf{k}} \hat{\phi}(x^\mu)\right], \tag{3.9}$$

und analog

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\Omega\omega_\mathbf{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_\Omega d^3r\, e^{ik_\mu x^\mu} \left[-i\partial_0\hat{\phi}(x^\mu) + \omega_\mathbf{k}\hat{\phi}(x^\mu)\right]. \tag{3.10}$$

Dies erlaubt die Berechnung der Vertauschungsrelation $\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right]$:

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') &= \frac{1}{N_\mathbf{k}N_{\mathbf{k}'}}\int d^3r d^3r'\, e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ik'_\mu x'^\mu} \\
&\quad \times \left[i\partial_0\hat{\phi}(x^\mu) + \omega_\mathbf{k}\hat{\phi}(x^\mu)\right] \left[-i\partial_0\hat{\phi}(x'^\mu) + \omega_{\mathbf{k}'}\hat{\phi}(x'^\mu)\right] \\
\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{a}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{N_\mathbf{k}N_{\mathbf{k}'}}\int d^3r d^3r'\, e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ik'_\mu x'^\mu} \\
&\quad \times \left[-i\partial_0\hat{\phi}(x'^\mu) + \omega_{\mathbf{k}'}\hat{\phi}(x'^\mu)\right] \left[i\partial_0\hat{\phi}(x^\mu) + \omega_\mathbf{k}\hat{\phi}(x^\mu)\right] \\
\hat{a}(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{a}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{N_\mathbf{k}N_{\mathbf{k}'}}\int d^3r d^3r'\, e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ik'_\mu x'^\mu} \\
&\quad \times \left\{i\omega_{\mathbf{k}'}\left[\partial_0\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\phi}(x'^\mu)\right] + i\omega_\mathbf{k}\left[\partial_0\hat{\phi}(x'^\mu), \hat{\phi}(x^\mu)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{N_\mathbf{k}N_{\mathbf{k}'}}\int d^3r d^3r'\, e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ik'_\mu x'^\mu} \\
&\quad \times \left[\omega_{\mathbf{k}'}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \omega_\mathbf{k}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right] \\
&= \frac{1}{N_\mathbf{k}N_{\mathbf{k}'}}\int d^3r e^{i(k_\mu - k'_\mu)x^\mu}\left(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_\mathbf{k}\right) \\
&= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\
\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{k}')\right] &= \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Damit wurden wieder die Vertauschungsrelationen für Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators aufgefunden, was es uns gestattet die Ergebnisse des quantenmechanischen Oszillators (und von Anhang C) zu übernehmen.

Die Operatoren

$$\hat{n}(\mathbf{k}) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})$$

haben als Eigenwerte die *Besetzungszahlen* $n_\mathbf{k} = 0, 1, 2, \ldots$ und man kann die Operatoren $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ und $\hat{a}(\mathbf{k})$ wieder als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren von Teilchen mit dem Impuls $\mathbf{k}$ und der Energie $\omega_\mathbf{k}$ interpretieren.

Der Hamiltonoperator folgt aus (2.46):

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3r\,\mathcal{H} = \int d^3r\left[\hat{\pi}^2(x^\mu) - \mathcal{L}(\hat{\phi}(x^\mu), \partial_\alpha\hat{\phi}(x^\mu))\right] \\ &= \int d^3r\left\{\hat{\pi}^2(x^\mu) - \frac{1}{2}\left[\partial_\alpha\hat{\phi}(x^\mu)\partial^\alpha\hat{\phi}(x^\mu) - m_0^2\hat{\phi}(x^\mu)\right]\right\} \\ &= \int d^3r\frac{1}{2}\left[\hat{\pi}^2(x^\mu) + \nabla^2\hat{\phi}(x^\mu) + m_0^2\hat{\phi}(x^\mu)\right] \qquad (3.12)\end{aligned}$$

und aus (2.47)

$$\hat{P}^j = \int d^3r\,\hat{\pi}(x^\mu)\partial_j\hat{\phi}(x^\mu). \qquad (3.13)$$

Durch Einsetzen von (3.9) und (3.10) folgt schließlich aus (3.12):

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\right] \qquad (3.14)$$

und

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\right]. \qquad (3.15)$$

Aus diesen Ergebnissen folg weiters $\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}\right] = 0$ und $\hat{\mathbf{P}}$ ist somit eine Konstante der Bewegung.

Aus (3.14) ergibt sich, daß der Zustand niedrigster Energie, der Grundzustand, des Klein-Gordon Feldes der Vakuumzustand ist, in welchem es keine Partikel gibt ($n_{\mathbf{k}} = 0, \quad \forall\,\mathbf{k}$). Dieser Zustand ist durch

$$\hat{a}(\mathbf{k})\,|0\rangle = 0, \qquad \forall\,\mathbf{k} \qquad (3.16)$$

oder durch

$$\hat{\phi}^+(x^\mu)\,|0\rangle = 0, \qquad \forall\,(x^\mu) \qquad (3.17)$$

definiert.

Das Vakuum hat die unendliche Energie $\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$, da aber nur Energiedifferenzen beobachtbar sind, ist dies kein Problem, da man alle Energien relativ zur Energie des Vakuumzustandes mißt. Man kann aber das explizite Auftreten solcher unendlicher Konstanten dadurch vermeiden, daß man die *Normalordnung* von Operatoren einführt. Im *Normalprodukt* stehen alle Vernichtungsoperatoren rechts von allen Erzeugungsoperatoren:

$$\mathcal{N}\left[\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_3)\right] \stackrel{!}{=} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_3)\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2) \qquad (3.18)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\left[\hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(y^\nu)\right] &= \mathcal{N}\left\{\left[\hat{\phi}^+(x^\mu)+\hat{\phi}^-(x^\mu)\right]\left[\hat{\phi}^+(y^\nu)+\hat{\phi}^-(y^\nu)\right]\right\} \\
&= \mathcal{N}\left[\hat{\phi}^+(x^\mu)\hat{\phi}^+(y^\nu)\right]+\mathcal{N}\left[\hat{\phi}^+(x^\mu)\hat{\phi}^-(y^\nu)\right] \\
&\quad +\mathcal{N}\left[\hat{\phi}^-(x^\mu)\hat{\phi}^+(y^\nu)\right]+\mathcal{N}\left[\hat{\phi}^-(x^\mu)\hat{\phi}^-(y^\nu)\right] \\
&= \hat{\phi}^+(x^\mu)\hat{\phi}^+(y^\nu)+\hat{\phi}^-(y^\nu)\hat{\phi}^+(x^\mu) \\
&\quad +\hat{\phi}^-(x^\mu)\hat{\phi}^+(y^\nu)+\hat{\phi}^-(x^\mu)\hat{\phi}^-(y^\nu).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Wegen (3.16) verschwindet dann offensichtlich jeder Vakuumerwartungswert eines Normalproduktes. Damit kann man die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und auch die Energie, den Impuls, und den Drehimpuls eines Feldes über Normalprodukte anschreiben. Auf diese Weise kann man (3.14) und (3.15) zu einem Viererimpuls-Operator

$$\hat{P}^\alpha = (\hat{H},\hat{\mathbf{P}}) = \sum_{\mathbf{k}} k^\alpha \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) \tag{3.20}$$

zusammenfassen.

3.2 Das komplexe Klein-Gordon Feld

Für das komplexe Klein-Gordon Feld modifizieren wir die Lagrangedichte (3.1) wie folgt:

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{N}\left[\partial_\alpha\phi^\dagger(x^\mu)\partial^\alpha\phi(x^\mu) - m_0^2\phi^\dagger(x^\mu)\phi(x^\mu)\right]. \tag{3.21}$$

Die zueinader adjungierten Felder $\phi(x^\mu)$ und $\phi^\dagger(x^\mu)$ werden als unabhängige Felder behandelt, welche den Klein-Gordon Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2)\phi(x^\mu) &= 0 \\
(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2)\phi^\dagger(x^\mu) &= 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

genügen. Die konjugierten Felder folgen mit

$$\pi(x^\mu) = \dot{\phi}^\dagger(x^\mu), \quad \pi^\dagger(x^\mu) = \dot{\phi}(x^\mu), \tag{3.23}$$

und daraus folgen die Vertauschungsrelationen für gleiche Zeiten ($x^0 = x'^0$):

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}(x^\mu),\hat{\pi}^\dagger(x'^\mu)\right] &= i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
\left[\hat{\phi}(x^\mu),\hat{\phi}(x'^\mu)\right] &= \left[\hat{\phi}(x^\mu),\hat{\phi}^\dagger(x'^\mu)\right] = \left[\hat{\pi}(x^\mu),\hat{\pi}(x'^\mu)\right] \\
&= \left[\hat{\pi}(x^\mu),\hat{\pi}^\dagger(x'^\mu)\right] = \left[\hat{\phi}(x^\mu),\hat{\pi}(x'^\mu)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Wir erhalten dann für die Fourierentwicklung in Analogie zu (3.5) und (3.6):

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x^\mu) &= \hat{\phi}^+(x^\mu) + \hat{\phi}^-(x^\mu) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{a}(\mathbf{k})e^{-ik_\nu x^\nu} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k})e^{ik_\nu x^\nu}\right], \end{aligned} \tag{3.25}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^\dagger(x^\mu) &= \hat{\phi}^{\dagger(+)}(x^\mu) + \hat{\phi}^{\dagger(-)}(x^\mu) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{b}(\mathbf{k})e^{-ik_\nu x^\nu} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})e^{ik_\nu x^\nu}\right]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Damit findet man die Vertauschungsrelationen:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = \left[\hat{b}(\mathbf{k}), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{3.27}$$

und alle anderen Vertauschungsrelationen sind Null. Damit können die Operatoren $\hat{a}(\mathbf{k})$, $\hat{b}(\mathbf{k})$ bzw. die Operatoren $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$, $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k})$ als Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren von zwei Teilchentypen, den a- und den b-Teilchen angesehen werden. Die

$$\hat{n}_a(\mathbf{k}) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}), \quad \hat{n}_b(\mathbf{k}) = \hat{b}^\dagger(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}) \tag{3.28}$$

sind die zugehörigen Teilchenzahloperatoren. Der Vakuumzustand $|0\rangle$ ist wieder durch

$$\hat{a}(\mathbf{k})\,|0\rangle = \hat{b}(\mathbf{k})\,|0\rangle = 0, \qquad \forall\,\mathbf{k} \tag{3.29}$$

oder

$$\hat{\phi}^+(x^\mu)\,|0\rangle = \hat{\phi}^{\dagger(+)}\,|0\rangle = 0, \qquad \forall\,(x^\mu) \tag{3.30}$$

definiert. Schließlich finden wir für den Viererimpuls-Operator

$$\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}) = \sum_{\mathbf{k}} k^\mu \left[\hat{n}_a(\mathbf{k}) + \hat{n}_b(\mathbf{k})\right]. \tag{3.31}$$

Für die Ladung ergibt sich jetzt aus (2.27)

$$\hat{Q} = -iq \int d^3r\,\mathcal{N}\left[\hat{\pi}^\dagger(x^\mu)\hat{\phi}(x^\mu) - \hat{\pi}(x^\mu)\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right], \tag{3.32}$$

und die entsprechende Ladungs- und Stromdichte ist dann durch

$$\hat{S}^\alpha(x^\mu) = (\hat{\rho}(x^\mu), \hat{\mathbf{j}}(x^\mu)) = -iq\mathcal{N}\left\{\left[\partial^\alpha\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right]\hat{\phi}(x^\mu) - \left[\partial^\alpha\hat{\phi}(x^\mu)\right]\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right\} \tag{3.33}$$

gegeben, welches ganz offensichtlich

$$\partial_\alpha \hat{S}^\alpha = 0 \tag{3.34}$$

erfüllt. Drücken wir schließlich (3.32) mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus, so erhalten wir

$$\hat{Q} = q \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{n}_a(\mathbf{k}) + \hat{n}_b(\mathbf{k})\right], \tag{3.35}$$

was zu $\left[\hat{Q}, \hat{H}\right] = 0$ führt. Die Teilchen der a- und der b-Klasse können nun über die Ladungen q und $-q$ identifiziert werden, wobei diese Teilchen sonst idente Eigenschaften haben. Austausch von $\hat{a}$ und $\hat{b}$ verändert lediglich das Vorzeichen von $\hat{Q}$. Dieses Ergebnis ist nicht auf Spin Null Bosonen beschränkt, es gilt ganz allgemein. Das Auftreten von Antiteilchen im Zusammenhang mit geladenen Teilchen ist eine fundamentale Eigenschaft der relativistischen Quantenfeldtheorie und ist experimentell nachgewiesen.

Ein Beispiel für ein Teilchen - Antiteilchen Paar ist das Paar von geladenen π-Mesonen. Für $q = e$ (> 0) kann man das π^+ und das π^- Meson mit den a- und b-Teilchen des komplexen Klein-Gordon Feldes identifizieren. Für das reelle Feld ist die Ladung Null und ein solches Feld entspricht dann einem neutralen Meson, wie etwa dem π^0 Meson. (Solche Mesonen treten bei der Kern-Kern Streuung auf.)

3.3 Kovariante Vertauschungsrelationen

Die bisher aufgefundenen Vertauschungsrelationen, welche auf gleiche Zeiten beschränkt sind, sind nicht so offensichtlich kovariant, wie die Bewegungsgleichungen für das Feld. Wir konzentrieren uns in diesem Abschnitt auf reelle Klein-Gordon Felder und wollen den Kommutator $\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\phi}(y^\mu)\right]$ für beliebige Raum-Zeitpunkte (x^μ) und (y^μ) bestimmen. Dieser Kommutator ist ein Skalar und er muß daher gleich einer invarianten Funktion sein.

Aus (3.4) folgen die Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{\phi}^+(x^\mu), \hat{\phi}^+(y^\mu)\right] = \left[\hat{\phi}^-(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right] = 0, \tag{3.36}$$

da $\hat{\phi}^+$ $(\hat{\phi}^-)$ nur Vernichtungs (Erzeugungs)-Operatoren enthalten und diese nach (3.11) vertauschen. Somit bleibt:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\phi}(y^\mu)\right] &= \hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(y^\mu) - \hat{\phi}(y^\mu)\hat{\phi}(x^\mu) \\
&= \left[\hat{\phi}^+(x^\mu) + \hat{\phi}^-(x^\mu)\right]\left[\hat{\phi}^+(y^\mu) + \hat{\phi}^-(y^\mu)\right] \\
&\quad - \left[\hat{\phi}^+(y^\mu) + \hat{\phi}^-(y^\mu)\right]\left[\hat{\phi}^+(x^\mu) + \hat{\phi}^-(x^\mu)\right] \\
&= \hat{\phi}^+(x^\mu)\hat{\phi}^+(y^\mu) + \hat{\phi}^+(x^\mu)\hat{\phi}^-(y^\mu) + \hat{\phi}^-(x^\mu)\hat{\phi}^+(y^\mu) \\
&\quad + \hat{\phi}^-(x^\mu)\hat{\phi}^-(y^\mu) - \hat{\phi}^+(y^\mu)\hat{\phi}^+(x^\mu) - \hat{\phi}^+(y^\mu)\hat{\phi}^-(x^\mu) \\
&\quad - \hat{\phi}^-(y^\mu)\hat{\phi}^+(x^\mu) - \hat{\phi}^-(y^\mu)\hat{\phi}^-(x^\mu) \\
&= \underbrace{\left[\hat{\phi}^+(x^\mu), \hat{\phi}^+(y^\mu)\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\hat{\phi}^-(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right]}_{=0} \\
&\quad + \left[\hat{\phi}^+(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right] + \left[\hat{\phi}^-(x^\mu), \hat{\phi}^+(y^\mu)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\phi}(y^\mu)\right] = \left[\hat{\phi^+}(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right] + \left[\hat{\phi}^-(x^\mu), \hat{\phi}^+(y^\mu)\right], \tag{3.37}
$$

und es genügt etwa $\left[\hat{\phi}^+(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right]$ auszurechnen. Wir verwenden (3.11):

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}^+(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right] &= \frac{1}{2\Omega}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}}\underbrace{\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right]}_{=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}} e^{-ik^\mu x_\mu} e^{ik'^\nu y_\nu} \\
&= \frac{1}{2\Omega}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}}\, e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)},
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

wobei wir den Limes $\Omega \to \infty$ ausgeführt haben. $\omega_{\mathbf{k}}$ und k^0 stehen wieder über Gleichung (3.7) in Beziehung. Wir definieren nun

$$
\Delta^+(x^\mu) = -\frac{i}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}}\, e^{-ik^\mu x_\mu}; \quad k^0 = \omega_{\mathbf{k}}, \tag{3.39}
$$

und damit fogt für (3.38):

$$
\left[\hat{\phi^+}(x^\mu), \hat{\phi}^-(y^\mu)\right] = i\Delta^+(x^\mu - y^\mu). \tag{3.40}
$$

Wir finden weiter:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}^-(x^\mu), \hat{\phi}^+(y^\mu)\right] &= \frac{1}{2\Omega}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}}\underbrace{\left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{k}')\right]}_{=-\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}} e^{-ik^\mu x_\mu} e^{ik'^\nu y_\nu} \\
&= -\frac{1}{2\Omega}\sum_\mathbf{k}\frac{1}{\omega_\mathbf{k}} e^{-ik^\mu(y_\mu - x_\mu)} \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_\mathbf{k}}\, e^{-ik^\mu(y_\mu - x_\mu)} \\
&= -i\Delta^+(y^\mu - x^\mu) \stackrel{!}{=} i\Delta^-(x^\mu - y^\mu).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Also erhält man für (3.37):

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\phi}(y^\mu)\right] &= i\left[\Delta^+(x^\mu - y^\mu) + \Delta^-(x^\mu - y^\mu)\right] \\
&\stackrel{!}{=} i\Delta(x^\mu - y^\mu),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta(x^\mu) &= \Delta^+(x^\mu) + \Delta^-(x^\mu) \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \frac{i}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_\mathbf{k}} e^{ik^\mu x_\mu} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_\mathbf{k}}\frac{1}{2}\left(e^{ik^\mu x_\mu} - e^{-ik^\mu x_\mu}\right) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_\mathbf{k}}\sin(k^\mu x_\mu).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Wir sehen, daß $\Delta(x^\mu)$ eine reelle ungerade Funktion ist, so wie es die Vertauschungsrelation (3.42) fordert. Da $\hat{\phi}(x^\mu)$ und $\hat{\phi}(y^\mu)$ Lösungen der Klein-Gordon Gleichungen sind, folgt unmittelbar:

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2\right)\Delta(x^\mu - y^\mu) = 0, \tag{3.44}$$

wobei der Operator $\partial^\mu\partial_\mu$ auf x^μ wirkt. Um eine Lorentz-kovariante Schreibweise zu erhalten, führen wir die Vorzeichenfunktion

$$\epsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1 & k_0 > 0 \\ -1 & k_0 < 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

ein und verwenden (3.7):

$$\Delta(x^\mu) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\delta(k^\mu k_\mu - m_0^2)\epsilon(k_0)e^{-ik^\mu x_\mu}. \tag{3.46}$$

Daß (3.46) tatsächlich eine zu (3.43) idente Form ist, wird aus folgenden Überlegungen ersichtlich: zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\delta(k^\mu k_\mu - m_0^2) &= \delta\left(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2\right) \\
&= \delta\left(k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + m_0^2)\right) = \delta\left(k_0^2 - \omega_\mathbf{k}^2\right) \\
&= \delta\left((k_0 - \omega_\mathbf{k})(k_0 + \omega_\mathbf{k})\right).
\end{aligned}$$

Es ist weiterhin bekannt, daß

$$\delta\left((x - x')(x - x'')\right) = \frac{1}{|x' - x''|}\left[\delta(x - x') + \delta(x - x'')\right]$$

gilt. Wir identifizieren nun x mit k_0, x' mit $\omega_\mathbf{k}$ und x'' mit $-\omega_\mathbf{k}$ und setzen dies in (3.46) ein. Ausintegrieren ergibt dann unmittelbar (3.43).

Man kann nun zeigen, daß $\Delta(x^\mu)$ in der Form (3.46) der Klein-Gordon Gleichung genügt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\left(\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2\right)\Delta(x^\mu) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \delta(k^\mu k_\mu - m_0^2)\epsilon(k_0)(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2)e^{ik^\mu x_\mu} \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \delta(k^\mu k_\mu - m_0^2)\epsilon(k_0)(-k^\mu k_\mu + m_0^2)e^{ik^\mu x_\mu} \\
&= 0 \qquad \textbf{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

Für gleiche Zeiten, was zu $k_0 = k_0'$ führt, gilt weiters

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)\right] = i\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = 0, \tag{3.47}$$

was auch gerne als *Anfangsbedingung* für $\Delta(x^\mu)$ interpretiert wird. Schließlich erhalten wir noch:

$$\begin{aligned}
\partial_0\Delta(x^\mu)|_{x_0=0} &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3k dk_0\, \delta(k^\mu k_\mu - m_0^2)\epsilon(k_0)(-ik_0)e^{-i\mathbf{kr}} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\mathbf{kr}}\int dk_0\epsilon(k_0)\delta(k^\mu k_\mu - m_0^2)k_0.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int dk_0\, k_0\epsilon(k_0)\delta(k^\mu k_\mu - m_0^2) &= \int dk_0\, \frac{k_0^2}{2\,|\omega_\mathbf{k}|\, k_0}\left\{\delta\left(k_0 - \omega_\mathbf{k}\right) + \delta\left(k_0 + \omega_\mathbf{k}\right)\right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$\partial_0\Delta(x^\mu)|_{x_0=0} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\mathbf{kr}} = -\delta(\mathbf{r}). \tag{3.48}$$

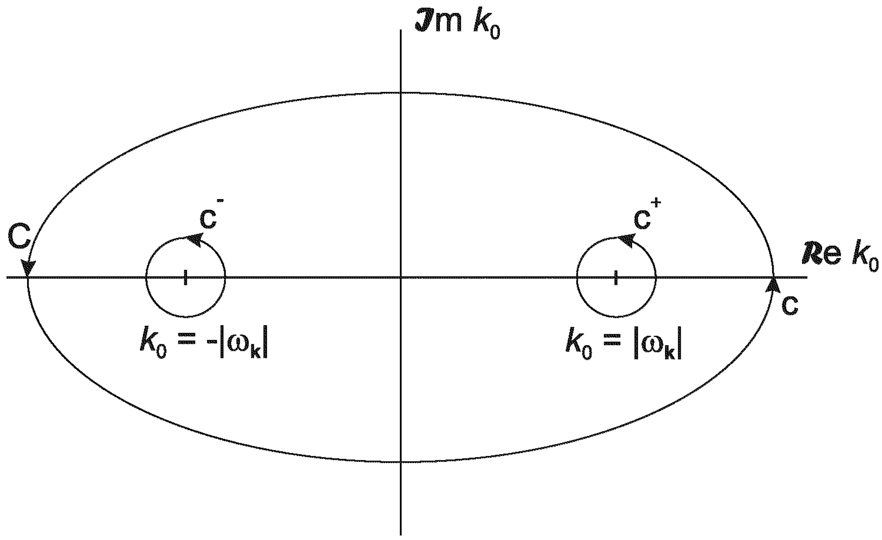


Abbildung 3.1: Zur Kontourintegraldarstellung der Δ-Funktion.

Zusammengefaßt ergibt dies:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2\right) \Delta(x^\mu) = 0 \tag{3.49a}$$

$$\Delta(x^\mu)|_{x_0=0} = 0 \tag{3.49b}$$

$$\partial_0 \Delta(x^\mu)|_{x_0=0} = -\delta(\mathbf{r}). \tag{3.49c}$$

Aus (3.49b) folgt zunächst, daß Felder in zwei beliebigen Punkten (x^μ) und (y^ν), welche nur räumlich getrennt sind, vertauschen. Beschreibt das Feld eine Observable, so bedeutet dies, daß die Feldmessungen an zwei nur räumlich getrennten Punkten nicht miteinander interferrieren dürfen. Dies wird auch als *Mikrokausalität* bezeichnet, da sich für rein räumliche Trennung, so klein sie auch sein mag, das Signal schneller als Licht ausbreiten müßte um Interferenz hervorrufen zu können. Dies ist aber im Gegensatz zur speziellen Relativitätstheorie.

Abschließend wollen wir noch eine Kontourintegral-Darstellung der Δ-Funktion aufsuchen. Wir untersuchen folgendes Integral:

$$I = \int\limits_{\mathbf{k}} \int\limits_{(c)} \frac{d^3k\, dk_0}{k^\mu k_\mu - m_0^2} e^{-ik^\mu x_\mu}; \quad \left[k^\mu k_\mu - m_0^2 = k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2\right].$$

Wir haben also zwei Pole bei $k_0 = \pm\left|\omega_{\mathbf{k}}\right|$. Damit ergibt das Integral über k_0

allein (siehe Abb. 3.1):

$$\begin{aligned}
I_c &= \int\limits_{(c)} \frac{dk_0}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\, e^{-ik^\mu x_\mu} \\
&= \int\limits_{(c)} \frac{dk_0}{(k_0-|\omega_{\mathbf{k}}|)(k_0+|\omega_{\mathbf{k}}|)}\, e^{-ik^\mu x_\mu} \\
&= 2\pi i\, \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{k_0-|\omega_{\mathbf{k}}|}\bigg|_{k_0=-|\omega_{\mathbf{k}}|} - 2\pi i\, \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{k_0+|\omega_{\mathbf{k}}|}\bigg|_{k_0=|\omega_{\mathbf{k}}|} \\
&= \frac{2\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}\left[e^{-i(k_0x^0-\mathbf{kr})}\Big|_{k_0=-|\omega_{\mathbf{k}}|} - e^{-i(k_0x^0-\mathbf{kr})}\Big|_{k_0=|\omega_{\mathbf{k}}|}\right] \\
&= \frac{i\pi}{\omega_{\mathbf{k}}}\left[e^{i(\omega_{\mathbf{k}}x^0+\mathbf{kr})} - e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}x^0-\mathbf{kr})}\right].
\end{aligned}$$

Zum anderen gilt aber

$$\begin{aligned}
\Delta(x^\mu) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}}\left(e^{ik^\mu x_\mu} - e^{-ik^\mu x_\mu}\right) \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}}\left[\underbrace{e^{i(|\omega_{\mathbf{k}}|x^0-\mathbf{kr})}}_{=e^{i(|\omega_{\mathbf{k}}|x^0+\mathbf{kr})}} - e^{-i(|\omega_{\mathbf{k}}|x^0-\mathbf{kr})}\right],
\end{aligned}$$

(wir haben $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ gesetzt) und es folgt (Impulsdarstellung!):

$$\Delta(x^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{(c)} \frac{d^4k}{k^\mu k_\mu - m_0^2} e^{-ik_\mu x^\mu}, \tag{3.50}$$

und weiters

$$\Delta^\pm(x^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{(c^\pm)} \frac{d^4k}{k^\mu k_\mu - m_0^2} e^{-ik_\mu x^\mu}. \tag{3.51}$$

3.4 Der Mesonenpropagator

Wir bilden zunächst den Grundzustandserwartungswert (Vakuumerwartungswert) von (3.40):

$$\begin{aligned}
\left\langle 0 \,\middle|\, \left[\hat\phi^+(x^\mu), \hat\phi^-(y^\nu)\right] \,\middle|\, 0\right\rangle &= \left\langle 0 \,\middle|\, \hat\phi^+(x^\mu)\hat\phi^-(y^\nu) \,\middle|\, 0\right\rangle - \langle 0|\, \hat\phi^-(y^\nu)\, \underbrace{\hat\phi^+(x^\mu)\, |0\rangle}_{=0} \\
&= \left\langle 0 \,\middle|\, \hat\phi^+(x^\mu)\hat\phi^-(y^\nu) \,\middle|\, 0\right\rangle \\
&= \left\langle 0 \,\middle|\, \hat\phi(x^\mu)\hat\phi(y^\nu) \,\middle|\, 0\right\rangle \\
&= \left\langle 0 \,\middle|\, i\Delta^+(x^\mu - y^\mu) \,\middle|\, 0\right\rangle = i\Delta^+(x^\mu - y^\mu)\langle 0\,|\,0\rangle,
\end{aligned}$$

also

$$i\Delta^+(x^\mu - y^\mu) = \left\langle 0 \left| \hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(y^\nu) \right| 0 \right\rangle. \tag{3.52}$$

Wir führen weiters das *zeitgeordnete Produkt* von Operatoren ein:

$$\mathcal{T}\left\{\hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(x'^\mu)\right\} = \begin{cases} \hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(x'^\mu) & x_0 > x'_0 \quad (t > t') \\ \\ \hat{\phi}(x'^\mu)\hat{\phi}(x^\mu) & x_0 < x'_0 \quad (t < t'), \end{cases}$$

oder wir schreiben unter Verwendung der Stufenfunktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

für das zeitgeordnete Produkt:

$$\mathcal{T}\left\{\hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(x'^\mu)\right\} = \theta(t-t')\hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(x'^\mu) + \theta(t'-t)\hat{\phi}(x'^\mu)\hat{\phi}(x^\mu). \tag{3.53}$$

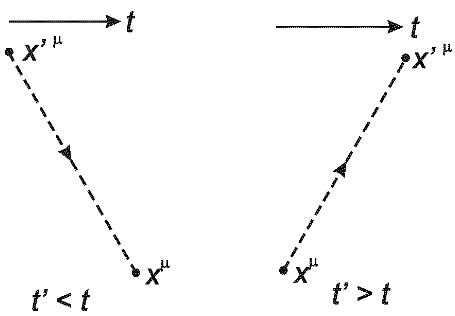
Wir definieren nun die *Feynman* Δ*-Funktion* als den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes zweier Feldoperatoren:

$$i\Delta_F(x^\mu - x'^\mu) = \left\langle 0 \left| \mathcal{T}\left\{\hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(x'^\mu)\right\} \right| 0 \right\rangle, \tag{3.54}$$

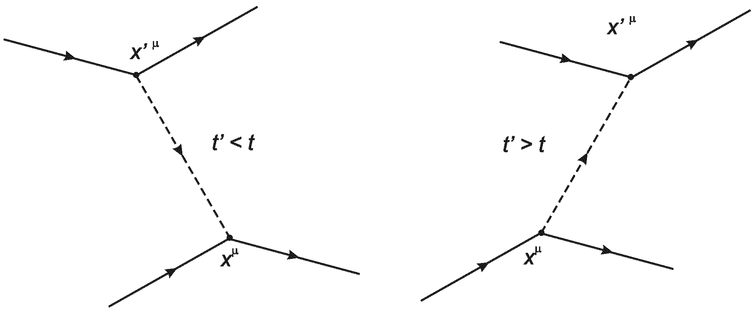
oder

$$\begin{aligned} \Delta_F(x^\mu) &= \theta(t)\Delta^+(x^\mu) - \theta(-t)\Delta^-(x^\mu) \\ &= \begin{cases} \Delta^+(x^\mu) & t > 0 \\ \Delta^-(x^\mu) & t < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Man kann sich die Bedeutung von Δ_F nach (3.53) durchaus vorstellen: für $t > t'$ haben wir den Vakuumerwartungswert $\left\langle 0 \left| \hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(x'^\mu) \right| 0 \right\rangle$ und dies entspricht dem Erwartungswert dafür, daß im Raum-Zeitpunkt (x'^μ) ein Meson erzeugt wird, welches sich dann zum Raum-Zeitpunkt (x^μ) bewegt, wo es vernichtet wird. Für $t < t'$ gilt ähnliches. Somit ist Δ_F ein *Propagator* und er wird, nach Feynman, durch folgende Graphen dargestellt:

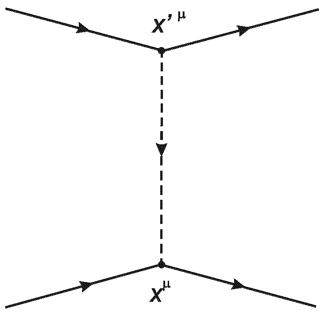


Solche Propagatoren entstehen bei der Untersuchung der Nukleon-Nukleon Streuung. In einem solchen Prozess gibt es im Anfangs- und im Endzustand keine Mesonen, die Streuung der Nukleonen aneinander, also deren Wechselwirkung miteinander, entspricht dann dem Austausch virtueller Mesonen zwischen den Nukleonen, also graphisch dargestellt:



Die vollen Linien entsprechen dabei den Nukleonen und die strichlierten den Mesonen.

Es wichtig festzustellen, daß die zwei Prozesse, welche von $t > t'$ bzw. $t < t'$ abhängig sind, nicht Lorentz-invariant sind, wenn $(x^\mu) - (x'^\mu)$ nur einer räumlichen Trennung entspricht. (Dies entspricht dann einer nicht retardierten Wechselwirkung.) Betrachtet man hingegen beide Prozesse zusammen, so erhält man den kovarianten Feynman Propagator (3.54), welcher durch



dargestellt wird. (Diese hier eingeführten graphischen Darstellungen entsprechen sogenannten *Feynman Graphen*, welche noch zu begründen sein werden.)

Sehr häufig benötigt man eine Darstellung des Mesonenpropagators im Impuls- und nicht im Ortsraum. Dazu verwendet man in Analogie zu (3.51) folgende Impulsdarstellung:

$$\Delta_F(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{(c_F)} d^4k \, \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^\mu k_\mu - m_0^2}, \tag{3.56}$$

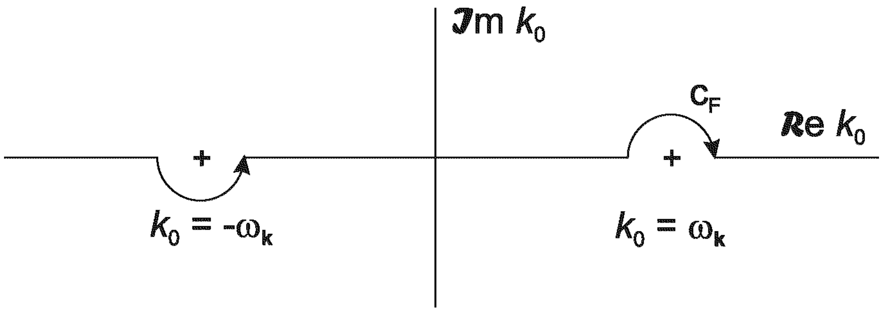


Abbildung 3.2: Integrationsweg in Gleichung (3.56)

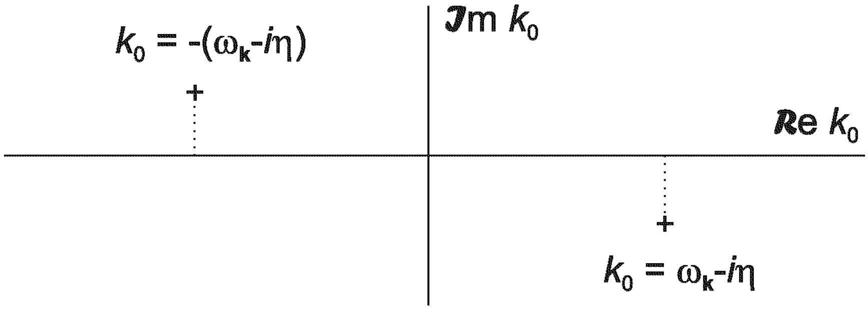


Abbildung 3.3: Integrationsweg in Gleichung (3.57)

mit dem Integrationsweg c_F entsprechend Abbildung 3.2. Man kann aber auch die Pole um einen infinitesimalen Betrag von der reellen Achse weg in die komplexe k_0-Ebene verschieben und dann die k_0-Integration entlang der gesamten reellen Achse ausführen (siehe Abb. 3.3):

$$\begin{aligned} k^\mu k_\mu - m_0^2 &= k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 \\ \Delta_F(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-k^\mu x_\mu}}{k_0^2 - (\omega_{\mathbf{k}} - i\eta)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-k^\mu x_\mu}}{k^\mu k_\mu - m_0^2 + i\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

mit $\varepsilon = 2\eta\omega_{\mathbf{k}}$, einer kleinen positiven Zahl, welche nach der Integration zu Null wird.

Man kann selbstverständlich alle Ergebnisse dieses Abschnittes auf den Fall eines komplexen Skalarfeldes ausdehnen. Der Propagator des geladenen Mesons ist dann durch

$$\left\langle 0 \middle| \mathcal{T} \left\{ \hat{\phi}(x^\mu) \hat{\phi}^\dagger(x'^\mu) \right\} \middle| 0 \right\rangle \tag{3.58}$$

gegeben.