Kapitel 6

Die S-Matrix Entwicklung

Wir können jetzt, nach den einführenden Kapiteln über die freien Felder, auf das viel interessantere Problem wechselwirkender Felder übergehen. In diesen Fällen können Teilchen gestreut, erzeugt oder vernichtet werden. Die Tatsache der Wechselwirkung spiegelt sich in den Feldgleichungen wider, welche nun aber gekoppelt sind. Zum Beispiel wird in der Quantenelektrodynamik die inhomogene Wellengleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu(x^\mu) = -\mu_0 s^\mu(x^\mu)$$

mit der Dirac Stromdichte

$$s^\mu(x^\mu) = (\rho(x^\mu), \mathbf{j}(x^\mu)) = q\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)$$

als Quellterm gekoppelt - ein sehr kompliziertes Problem. Bisher ist es nur gelungen dieses Problem störungstheoretisch zu behandeln: man unterteilt den Hamiltonoperator des Systems in den der freien Felder und einen zusätzlichen Wechselwirkungsterm. Dieser wird dann als Störung behandelt, wenn die Wechselwirkung ausreichend schwach ist. In der Elektrodynamik wird die Kopplung zwischen den Photonen und den Elektronen in Vielfachen der Feinstrukturkonstanten $\alpha = e^2/(4\pi) \sim 1/137$ gemessen und daher war dieser Zugang nicht nur in Störungstheorie niedrigster Ordnung überaus erfolgreich.

In der bisher von uns verwendeten Darstellung - dem Heisenberg Bild - ist diese Aufgabe sehr schwer lösbar. Eine wirklich erfolgreiche Behandlung war erst nach Einführung der Wechselwirkungsdarstellung möglich. In dieser Darstellung werden wir dann eine Störungsentwicklung auffinden, welche als S-Matrix Entwicklung bezeichnet wird. Diese Entwicklung ist von besonderer Bedeutung, da sie die vollständige Information über Wechselwirkungsprozesse in einer Form enthält, welche es erlaubt, die Übergangswahrscheinlichkeit für einen ganz speziellen Prozess in beliebiger Ordnung Störungstheorie zu bestimmen.

6.1 Klassische Elektrodynamik

Wir können erwarten, daß die Hamiltonfunktion eines Systems bewegter Ladungen - etwa eines Atoms im elektromagnetischen Feld - aus drei Anteilen besteht: (a) einem Teil, welcher sich auf die Materie bezieht, (b) einem Teil, welcher sich auf das elektromagnetische Feld bezieht, und (c) einem Teil, welcher die Wechselwirkung zwischen Materie und Feld beschreibt.

Wir betrachten also ein System von Punktmassen $m_i, i = 1, \ldots, N$, mit den Ladungen e_i und den Positionskoordinaten $\mathbf{r}_i$. Wir erhalten dann die Hamiltonfunktion:

$$H_m = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + H_C, \tag{6.1}$$

mit H_C der Coulombwechselwirkung

$$H_C = \frac{1}{2} {\sum_{i,j}}' \frac{e_i \, e_j}{4\pi \, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \tag{6.2}$$

und $\mathbf{p}_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt$.

Das elektromagnetische Feld ist in seiner Wechselwirkung mit Ladungen durch die Maxwellgleichungen beschrieben. Wir verwenden wieder die Coulomb Eichung $\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ und zerlegen das elektromagnetische Feld in longitudinale und transversale Felder:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t),$$

mit

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t).$$

Das magnetische Feld ist durch $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ gegeben. Die Gesamtenergie des elektrischen Feldes

$$\frac{1}{2} \int d^3r \, \left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right)$$

kann dann als

$$\frac{1}{2} \int d^3r \, \left(\mathbf{E}_T^2 + \mathbf{B}^2\right) + \frac{1}{2} \int d^3r \, \mathbf{E}_L^2$$

geschrieben werden. Wir verwenden die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t)$$

und formen um:

$$\frac{1}{2} \int d^3r \, \mathbf{E}_L^2 = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}, t) \, \rho(\mathbf{r}', t)}{4\pi \, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{6.3}$$

Somit ist die Energie, welche zum logitudinalen Feldanteil gehört, die Energie der *instantanen* elektrostatischen Wechselwirkung zwischen den Ladungen. Mit einem Punktladungsansatz

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

erhält man nämlich für (6.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3 r\, \mathbf{E}_L^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{e_i\, e_j}{4\pi\, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} {\sum_{i,j}}' \frac{e_i\, e_j}{4\pi\, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = H_C. \end{aligned} \tag{6.4}$$

In der letzten Zeile haben wir den unendlichen Selbstwechselwirkungsbeitrag vernachlässigt, welcher bei Punktladungen auftritt. Nachdem aber H_C aber schon in (6.1) enthalten ist, kommt der zusätzliche Beitrag zur Gesamtenergie vom transversalen Strahlungsfeld.

Untersuchen wir im weiteren bewegte Ladungen im elektromagnetischen Feld, so müssen wir (6.1) durch

$$H_m' = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_i - e_i \mathbf{A}_i)^2 + H_C \tag{6.5}$$

ersetzen, mit $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$, dem Vektorpotential, welches zur Zeit t an der Position $\mathbf{r}_i$ von der Ladung e_i hervorgerufen wird. Dabei ist $\mathbf{p}_i$ die Impulskoordinate, welche der Teilchenkoordinate $\mathbf{r}_i$ kanonisch adjungiert ist. Sie ist durch

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i + e_i \mathbf{A}_i$$

gegeben. Die Rechtfertigung für (6.5) folgt aus der bekannten Tatsache, daß aus (6.5) die korrekte Bewegungsgleichung

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e_i \left[\mathbf{E}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_i\right] \tag{6.6}$$

folgt. Wir schreiben nun (6.5) wie folgt an

$$H_m' = H_m + H_1,$$

wobei H_1 die Hamiltonfunktion der Wechselwirkung zwischen Materie und Feld ist,

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_i \left\{ -\frac{e_i}{2m_i} (\mathbf{p}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{p}_i) + \frac{e_i^2}{2m_i} \mathbf{A}_i^2 \right\} \\ &= \sum_i \left\{ -\frac{e_i}{m_i} \mathbf{A}_i \mathbf{p}_i + \frac{e_i^2}{2m_i} \mathbf{A}_i^2 \right\} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dieses Ergebnis ist aufgrund der gewählten Coulomb Eichung korrekt. Zusammgefaßt erhalten wir also

$$H = H_m' + H_{rad} = H_m + H_{rad} + H_1. \tag{6.8}$$

Die Quantisierung der Hamiltonfunktion (6.8) erfolgt nun auf die üblich Art, indem man die Teilchenkoordinaten $\mathbf{r}_i$ und die kanonisch adjungierten Impulse den üblichen Vertauschungsrelationen unterwirft. Das longitudinale Feld $\mathbf{E}_L$ trägt nicht zu den Freiheitsgraden bei, da es über die Ladungen durch $\nabla \mathbf{E}_L = \rho$ vollständig bestimmt ist.

H_1 wird als Störung angesehen, welche zu Übergängen zwischen Eigenzuständen des nicht wechselwirkenden Hamiltonoperators

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_m + \hat{H}_{rad} \tag{6.9}$$

führt. Diese Eigenzustände haben die Form

$$|A, \ldots n_r(\mathbf{k}) \ldots\rangle = |A\rangle \, |\ldots n_r(\mathbf{k}) \ldots\rangle \, ,$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{H}_m \, |A\rangle &= E_m \, |A\rangle \\ \hat{H}_{rad} \, |\ldots n_r(\mathbf{k}) \ldots\rangle &= E_r(\mathbf{k}) \, |\ldots n_r(\mathbf{k}) \ldots\rangle \, . \end{aligned}$$

Das Besondere an der Wechselwirkung (6.7) ist der quadratische Term des Vektorpotentiales. Dies führt nach der Quantisierung auf Zwei-Photonen-Prozesse, außerdem enthält der erste Beitrag zu (6.7) magnetische Wechselwirkungen und Effekte höherer Ordnung aufgrund der räumlichen Variation von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

6.2 Die elektromagnetische Wechselwirkung und Eichinvarianz

Wir untersuchen zunächst die Wechselwirkung der relativistischen Elektronen mit dem elektromagnetischen Feld. Letzteres sei durch das skalare Potential $\phi(x^\mu)$ und durch das Vektorpotential $\mathbf{A}(x^\mu)$ beschrieben.

In der nicht relativistischen Quantenmechanik kann dieses Problem leicht durch das Korrespondenzprinzip

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x^\mu) \\ -i\nabla &\rightarrow -i\nabla - q\mathbf{A}(x^\mu) \end{aligned} \tag{6.10}$$

behandelt werden. Dies führt dann zur korrekten Beschreibung eines geladenen Teilchens (mit Ladung q) im elektromagnetischen Feld.

Im relativistischen Fall erhalten wir für das Viererpotential $A^\mu(x^\mu) = (\phi, \mathbf{A})$ folgende, explizit kovariante Form:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \rightarrow \quad D_\mu = [\partial_\mu - iqA_\mu(x^\mu)]\,. \tag{6.11}$$

Wir wollen nun davon ausgehen, daß diese Substitution die elektromagnetische Wechselwirkung korrekt in die Dirac Gleichung einführt. Wir erhalten dann für (E.16) ($q = -e$)

$$(i\,\partial\!\!\!/ - m_0)\,\psi(x^\mu) = 0 \quad \rightarrow \quad [i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu(x^\mu) - m_0]\,\psi(x^\mu) = 0$$

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\,\psi(x^\mu) &= -e\gamma^\mu A_\mu(x^\mu)\psi(x^\mu) \\ (i\,\partial\!\!\!/ - m_0)\,\psi(x^\mu) &= -e\,A\!\!\!/(x^\mu)\psi(x^\mu), \end{aligned} \tag{6.12}$$

und für die Lagrangedichte (E.23)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x^\mu)\,(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\,\psi(x^\mu) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \end{aligned} \tag{6.13}$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x^\mu)\,(\partial\!\!\!/ - m_0)\,\psi(x^\mu) \tag{6.14}$$

und

$$\mathcal{L}_1 = e\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)A_\mu(x^\mu), \tag{6.15}$$

welche offensichtlich an den Strom (E.28)

$$s^\mu = -e\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu) \tag{6.16}$$

ankoppelt. Die vollständige Lagrangedichte für die Elektrodynamik erhält man, indem man zu (6.13) noch die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{rad}$ des Strahlungsfeldes addiert. Dies ist analog zu den Beziehungen (6.7) und (6.8) aufgebaut, wobei $\mathcal{L}_{rad}$ nur von $A_\mu(x^\mu)$ abhängt. Seine Quantisierung wurde bereits in Kapitel 5 behandelt.

Da nur die elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ von physikalischer Bedeutung sind und nicht das Viererpotential $A_\mu(x^\mu)$ muß die Theorie unter den Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) \quad &\rightarrow \quad \phi'(x^\mu) = \phi(x^\mu) + \partial_0 f(x^\mu) \\ \mathbf{A}(x^\mu) \quad &\rightarrow \quad \mathbf{A}'(x^\mu) = \mathbf{A}(x^\mu) - \nabla f(x^\mu) \end{aligned}$$

invariant sein. In kovarianter Form lauten diese

$$A_\mu(x^\mu) \quad \to \quad A'_\mu(x^\mu) = A_\mu(x^\mu) + \partial_\mu f(x^\mu), \tag{6.17}$$

mit einer beliebigen Funktion $f(x^\mu)$. Die Invarianz der Theorie unter den Eichtransformationen folgt aus der Lagrangedichte. $\mathcal{L}_{rad}$ hat diese Eigenschaft, wie wir bereits gesehen haben, wenn für $A_\mu(x^\mu)$ die Lorentzeichung verwendet wird. Setzen wir aber (6.17) in (6.13) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad \to \quad \mathcal{L}' &= \mathcal{L}_0 + e\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)\left(A_\mu(x^\mu) + \partial_\mu f(x^\mu)\right) \\ &= \mathcal{L} + e\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)\partial_\mu f(x^\mu), \end{aligned} \tag{6.18}$$

mit dem Ergebnis, daß $\mathcal{L}$ nicht eichinvariant gegenüber den Transformationen (6.17) ist. Man kann aber die Eichinvarianz wieder herstellen, indem man fordert, daß die Diracfelder wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu) \quad &\to \quad \psi'(x^\mu) = \psi(x^\mu)\exp\{ief(x^\mu)\} \\ \bar{\psi}(x^\mu) \quad &\to \quad \bar{\psi}'(x^\mu) = \bar{\psi}(x^\mu)\exp\{-ief(x^\mu)\}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Unter den gekoppelten Transformationen (6.17) und (6.19) transformiert

$$\mathcal{L}_0 \quad \to \quad \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)\partial_\mu f(x^\mu),$$

und

$$\mathcal{L}_1 \quad \to \quad \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 + e\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)\partial_\mu f(x^\mu),$$

womit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ invariant bleibt.

Die Transformationen (6.19) werden *lokale* Phasentransformationen genannt, da der Phasenfaktor von x^μ abhängt. Der Sonderfall $f(x^\mu) =$ konst reduziert (6.19) zu einer *globalen* Phasentransformation. (Wir haben bereits in Kapitel 2 gesehen, daß Invarianz unter solchen Transformationen zur Ladungserhaltung führt.)

6.3 Die S-Matrix Entwicklung

In der quantenmechanischen Beschreibung, also der Beschreibung von wechselwirkenden Elektronen (Positronen) und elektromagnetischen Feldern, haben wir eine Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \tag{6.20}$$

mit der Lagrangedichte der freien Felder

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{N}\left\{\bar{\psi}(x^\mu)\,(i\,\not{\partial} - m_0)\,\psi(x^\mu) - \frac{1}{2}\left[\partial_\nu A_\mu(x^\mu)\right]\left[\partial^\nu A^\mu(x^\mu)\right]\right\} \tag{6.21}$$

als Kombination von (E.23) und (5.17). Die Lagrangedichte der Wechselwirkung ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I &= \mathcal{N}\left\{-s^\mu A_\mu(x^\mu)\right\} \\ &= \mathcal{N}\left\{e\bar{\psi}(x^\mu)\,\not{A}(x^\mu)\psi(x^\mu)\right\}\end{aligned} \tag{6.22}$$

gegeben. Die Lagrangedichten wurden hier als Normalprodukte angeschrieben um sicherzustellen, daß die Vakuumerwartungswerte aller Observablen für freie Felder verschwinden.

Analog schreiben wir nun für den Hamiltonoperator des quantisierten Systemes

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$$

und wir wählen im weiteren die Wechselwirkungsdarstellung für alle Operatoren. In dieser folgen die Operatoren Gleichungen, welche den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen ähneln, nur daß der Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ bestimmend auftritt, und nicht der Hamiltonoperator des wechselwirkenden Systems.

Enthält ferner die Lagrangedichte $\mathcal{L}_I$ keine Ableitungen (und wir wollen uns auf solche Fälle beschränken), dann sind die Felder, welche den wechselwirkenden Feldern kanonisch konjugiert sind, den freien Feldern ident. (Also in der QED: $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}_r = \partial\mathcal{L}_0/\partial\dot{\psi}_r$.) Nachdem weiters das Heisenbergbild und das Wechselwirkungsbild über eine unitäre Transformation verbunden sind, folgt, daß auch im Wechselwirkungsbild die bekannten Vertauschungsrelationen gelten. Ganz speziell folgt, daß dieselbe Besetzungszahldarstellung und dieselben expliziten Formeln für die Feynmanschen Propagatoren beibehalten werden können.

In der Wechselwirkungsdarstellung wird das System durch den zeitabhängigen Zustand $|\phi(t)\rangle$ beschrieben. Dieser gehorcht der Bewegungsgleichung

$$i\frac{d}{dt}\,|\phi(t)\rangle = \hat{H}_I(t)\,|\phi(t)\rangle \tag{6.23}$$

mit

$$\hat{H}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}H_I^S e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}. \tag{6.24}$$

Es gilt weiters $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^S$ und $\hat{H}_I^S$ ist der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator im Schrödingerbild. $\hat{H}_I(t)$ wird auch einfach dadurch aufgefunden werden, indem in $\hat{H}_I^S$ die Feldoperatoren durch entsprechende zeitabhängige Operatoren der freien Felder ersetzt werden.

Gl. (6.23) ist eine Gleichung, welche der Schrödingergleichung ähnlich ist, nur daß der Hamiltonoperator $\hat{H}_I(t)$ explizite zeitabhängig ist. Ist keine Wechselwirkung vorhanden ($\hat{H}_I(t) = \hat{0}$), so ist der Zustand offensichtlich zeitlich konstant. Ist nun das System zur Zeit t_i in einem bestimmten Zustand $|i\rangle$, also

$$|\phi(t_i)\rangle = |i\rangle \,,$$

so ergibt die Lösung von (6.23) den Zustand $|\phi(t)\rangle$ für alle Zeiten t mit $|i\rangle$ als Anfangsbedingung. Aus der Hermitezität des Wechselwirkungsoperators $\hat{H}_I(t)$ folgt weiter, daß die zeitliche Entwicklung des Zustandes $|\phi(t)\rangle$ nach (6.23) eine unitäre Transformation darstellt. Dadurch wird die Normierbarkeit der Zustände erhalten:

$$\langle\phi(t)\,|\,\phi(t)\rangle = \text{konst.} \tag{6.25}$$

Dieser Formalismus ist ganz offensichtlich nicht für gebundene Zustände geeignet, er ist aber besonders gut für Streuprozesse anwendbar. In einem solchen Prozess wird $|i\rangle$ den Anfangszustand bezeichnen, welcher zu einer Zeit t_i existiert, lange bevor ein Streuprozess stattgefunden hat ($t_i = -\infty$). Dieser Zustand wird durch eine bestimmte Zahl von Teilchen mit bestimmten Eigenschaften charakterisiert sein. Diese Teilchen sind so weit voneinander entfernt, daß sie nicht miteinander wechselwirken können. (In der QED ist dies eine bestimmte Zahl von Elektronen (Positronen) und Photonen mit vorgegebenen Impulsen, Spins und Polarisationen.) Im Verlauf der Zeit werden sich die Teilchen nahe kommen, was dann zu einem Streuprozess führt und danach werden sich die Teilchen wieder auseinanderbewegen. Im Beispiel der QED beschreibt dann Gleichung (6.23) den Zustand $|\phi(\infty)\rangle$, in welchen sich der Ausgangszustand $|\phi(-\infty)\rangle = |i\rangle$ zum Zeitpunkt $t = \infty$ entwickelt, lange nachdem der Streuprozess vorbei ist und alle Teilchen wieder weit voneinander entfernt sind. Die S-Matrix setzt nun die beiden Zustände $|\phi(\infty)\rangle$ und $|\phi(-\infty)\rangle$ miteinander in Beziehung und ist wie folgt definiert:

$$|\phi(\infty)\rangle = \hat{S}\,|\phi(-\infty)\rangle = \hat{S}\,|i\rangle \,. \tag{6.26}$$

Eine Wechselwirkung (Streuprozess) kann zu vielen verschiedenen Endzuständen $|f\rangle$ führen, und all diese Möglichkeiten sind in $|\phi(\infty)\rangle$ enthalten. (Eine Elektron-Positron Streuung kann in elastischer Streuung, in der Emission von Photonen - der Bremsstrahlung, in der Paaranihilation, etc. resultieren.) Jeder dieser möglichen Endzustände $|f\rangle$ wird analog zu $|i\rangle$ spezifiziert sein.

Die Übergangswahrscheinlichkeit, daß nach einer Kollision des System zur Zeit $t = \infty$ im Zustand $|f\rangle$ ist, ist dann durch

$$|\langle f \,|\, \phi(\infty)\rangle|^2 \tag{6.27}$$

gegeben, wenn $|i\rangle$ und $|\phi(\infty)\rangle$ auf 1 normiert sind. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsamplitude ist dann durch

$$\langle f \,|\, \phi(\infty)\rangle = \left\langle f \,\middle|\, \hat{S} \,\middle|\, i \right\rangle \equiv S_{fi} \tag{6.28}$$

gegeben. Wir entwickeln nun $|\phi(\infty)\rangle$ nach möglichen Endzuständen und finden

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f \,|\, \phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle\, S_{fi}, \tag{6.29}$$

und damit folgt für die Unitarität der S-Matrix

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1, \tag{6.30}$$

was letztlich die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit ausdrückt. Dieses Ergebnis ist viel allgemeiner als das entsprechende Gesetz der Erhaltung der Teilchen im nicht relativistischen Fall, als nunmehr auch Teilchen erzeugt oder vernichtet werden können. Es kann auch eine Umwandlung der Teilchen stattfinden.

Wollen wir nun die S-Matrix bestimmen, so müssen wir (6.23) unter Verwendung der Anfangsbedingung auflösen:

$$|\phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1\, \hat{H}_I(t_1)\, |\phi(t_1)\rangle\,. \tag{6.31}$$

Diese Gleichung hat große Ähnlichkeit mit einer Volterraschen Integralgleichung, allerdings ist der Integralkern durch einen Operator bestimmt. Volterrasche Integralgleichungen lassen sich unter sehr weiten Bedingungen unter Verwendung der Methode der 'Iterierten Kerne' lösen und wir wollen annehmen, daß diese Methode auch hier erfolgreich sein wird. Dies resultiert in einer Störungsentwicklung, einer Reihe in Potenzen von $\hat{H}_I(t)$, und diese wird nur dann zu sinnvollen Ergebnissen führen, wenn die Wechselwirkungsenergien klein gegenüber den Einzelenergien sind. Dies trifft für die QED zu; hier ist die Koppelungskonstante, wie bereits eingangs erwähnt, von der Ordnung der Feinstrukturkonstanten $\alpha = 1/137$.

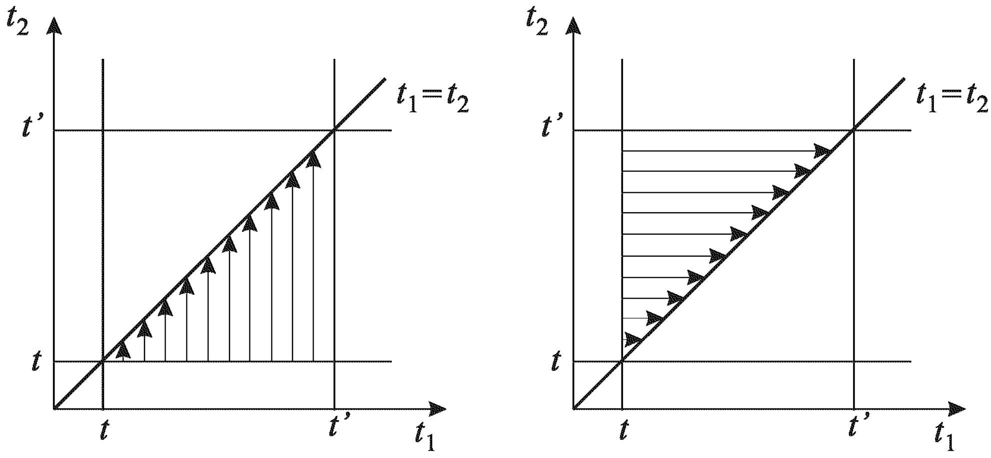

Abbildung 6.1: Zur Integration von Gleichung (6.33)

Die Lösung von (6.31) lautet in iterierter Form

$$
\begin{aligned}
|\phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \hat{H}_I(t_1)\,|i\rangle \\
&\quad +(-i)^2 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\,|\phi(t_2)\rangle + \ldots
\end{aligned}
$$

und so weiter fort, bis man im Limes $t \to \infty$ die S-Matrix durch

$$
\begin{aligned}
\left\langle i \middle| \hat{S} \middle| \phi(\infty) \right\rangle &= \langle i\,|\,i\rangle + (-i)\,\langle i| \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, \hat{H}_I(t_1)\,|i\rangle \\
&\quad +(-i)^2\,\langle i| \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\,|i\rangle + \ldots
\end{aligned}
$$

oder

$$
\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\cdots\hat{H}_I(t_n) \qquad (6.32)
$$

auffindet. In (6.32) haben wir die ganz charakteristische Eigenschaft, daß $t > t_1 > t_2 > \cdots > t_n > \cdots$ ist. Wir untersuchen nun den Beitrag zweiter

Ordnung genauer:

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{(2)} &= (-i)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) \\
&= (-i)^2 \left[\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int\limits_{t_2}^{\infty} dt_1\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) \right] .
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Beide Ausdrücke liefern dasselbe Ergebnis, nur wurde, wie in Abb. 6.1 angedeutet, die Durchlaufreihenfolge bei der Integration verändert. Man kann jetzt im zweiten Term die Integrationsvariablen umschreiben und erhält dann:

$$(-i)^2 \left[\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\infty} dt_2\, \hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_1) \right] .$$

Wir führen nun noch die Sprungfunktion $\theta(t)$ ein und schreiben schließlich:

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{(2)} &= (-i)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) \\
&= (-i)^2 \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 \left[\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\theta(t_1 - t_2) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_1)\theta(t_2 - t_1) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Wir führen nun abschließend den Zeitordnungsoperator als logische Weiterentwicklung von (3.16) ein:

$$\mathcal{T}\left[\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\right] = \begin{cases} \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) & t_1 > t_2 \\ \hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_1) & t_1 < t_2 . \end{cases}$$

Damit folgt für $\hat{S}^{(2)}$ der Ausdruck

$$\hat{S}^{(2)} = (-i)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2\, \mathcal{T}\left[\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\right] ,$$

womit schließlich für (6.32)

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_n\, \mathcal{T}\left[\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\cdots\hat{H}_I(t_n)\right] \tag{6.34}$$

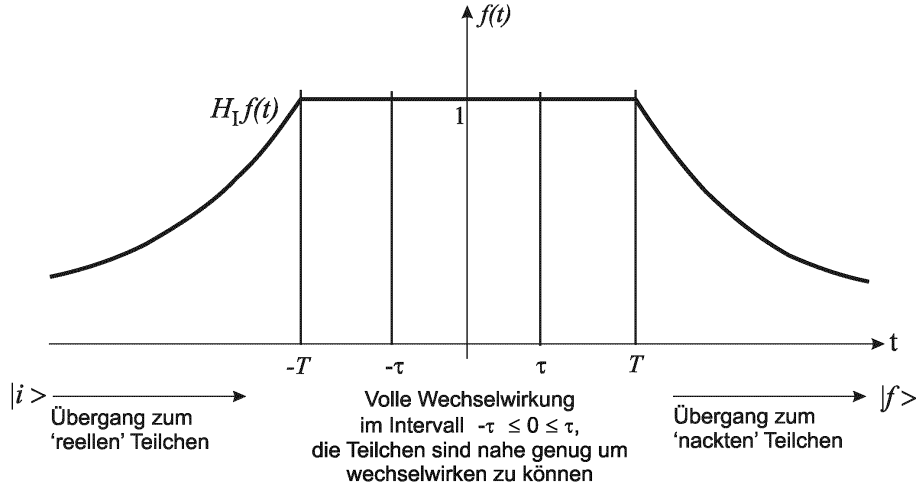

Abbildung 6.2: Der zeitliche Ablauf des Streuprozesses in der S-Matrix Beschreibung.

folgt. Die Äquivalenz von (6.34) mit (6.32) ist aber nur dann gegeben, wenn $\hat{H}_I(t)$ eine gerade Zahl von Fermioperatoren enthält, sodaß Umordnungsprozesse zu keinen zusätzlichen Faktoren (-1) führen. Diese Bedingung ist in der QED stets erfüllt, kann aber in anderen Formulierungen zu Problemen führen. Eine kovariante Form von (6.34) findet man schließlich, indem man auf die Hamiltondichte $\hat{\mathcal{H}}_I(t)$ übergeht:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^4x_1\, d^4x_2 \,\cdots\, d^4x_n\, \mathcal{T}\left[\hat{\mathcal{H}}_I(x_1)\hat{\mathcal{H}}_I(x_2)\cdots\hat{\mathcal{H}}_I(x_n)\right], \quad (6.35)$$

wobei die Integration nunmehr über den gesamten vierdimensionalen Raum erfolgt. Die Beziehung (6.35) wird die *Dyson-Entwicklung* der S-Matrix genannt.

Wir haben gesehen, daß die Amplitude für eine spezifischen Übergang $|i\rangle \to |f\rangle$ durch S_{fi} gegeben ist. Wie man aus (6.35) diese Beiträge auffindet, welche zu diesem Matrixelement beitragen, ist ein komplexes Problem, welches auf den nächsten Seiten behandelt wird.

Im soeben formulierten Störungsformalismus sind $|f\rangle$ und $|i\rangle$ Eigenzustände des ungestörten Hamiltonoperators $\hat{H}_0$ des freien Feldes. Diese Beschreibung ist scheinbar falsch, da wir ja mit *reellen* Teilchen arbeiten wollen, selbst wenn sie weit voneinander entfernt sind. Ein Elektron, etwa, ist stets, selbst wenn es von anderen Elektronen weit entfernt ist, von seinem elektromagnetischen Feld - also seiner Photonenwolke - umgeben; diese Tatsache macht es zu einem *reellen* Teilchen, und nicht zu einem *nackten* Teilchen, welchem sein elektromagnetisches Feld fehlt, welches aber den Zustand des freien Feldes widerspiegelt. Wir müssen also die getroffene Wahl von $|f\rangle$ und $|i\rangle$ rechtfertigen. Üblicherweise bemüht man dazu die *adiabatische Näherung*, in welcher $\hat{H}_I(t)$ durch $f(t)\hat{H}_I(t)$ ersetzt wird (siehe Abb. 6.2), wobei $f(t)$ derart gewählt wird, daß es für ein genügend langes Intervall $-T \leq t \leq T$ gleich Eins ist, und daß $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ monoton nach Null geht. Nunmehr sind tatsächlich Anfangs- und Endzustand durch *nackte* Partikel beschrieben. Im Intervall $-\infty < t \leq T$ wird in (6.23) $\hat{H}_I(t)$ durch $f(t)\hat{H}_I(t)$ ersetzt und es werden die reellen Teilchen aus den nackten erzeugt. Im Intervall $|t| \leq T$ behandeln wir dann die reellen Teilchen und die volle Wechselwirkung $\hat{H}_I(t)$. Im speziellen ist die volle Wechselwirkung im Intervall $-\tau \leq t \leq \tau$ wirksam. Innerhalb dieses Intervalls sind dann die Teilchen nahe genug bei einander. (Damit muß also $T \gg \tau$ sein.) Der wesentliche Punkt bei dieser adiabatischen Näherung besteht nun darin, daß der Streuprozess, welcher im Intervall $|t| \leq \tau$ stattfindet, nicht von der Systembeschreibung lange vor $(t \ll -\tau)$ oder lange nach $(t \gg \tau)$ abhängen darf. Erst ganz zum Schluß des Verfahrens wird der Grenzübergang $T \to \infty$ durchgeführt.

Behandeln wir aber Prozesse nur in niedrigster Ordnung Störungstheorie (der niedrigsten Ordnung, welche von Null verschiedene Beiträge liefert), so wird die Wechselwirkung ausschließlich zur Beschreibung des Streuprozesses verwendet, nicht aber auch noch der Übergang vom nackten zum reellen Teilchen. In diesem Fall kann bereits von Anfang an der Grenzfall $T \to \infty$ untersucht werden.

6.4 Das Wicksche Theorem

Wir müssen nun untersuchen, wie wir aus der S-Matrix Entwicklung (6.35) auf die Übergangsamplitude $\left\langle f \middle| \hat{S} \middle| i \right\rangle$ für einen speziellen Übergang $|i\rangle \to |f\rangle$ in einer gegebenen Ordnung Störungstheorie kommen. Die Hamiltondichte $\hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu)$ enthält miteinander wechselwirkende Felder, von denen jedes in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren linear ist. Somit wird (6.35) eine große Zahl von verschiedenen Prozessen beschreiben, aber nur bestimmte Terme der S-Matrix werden zum speziellen Übergang $|i\rangle \to |f\rangle$ beitragen. Diese Terme müssen gerade die richtigen Vernichtungsoperatoren enthalten, um die Teilchen zu zerstören, welche im Zustand $|i\rangle$ enthalten sind. Sie müssen aber auch die richtigen Erzeugungsoperatoren enthalten, um die Teilchen zu erzeugen, welche im Zustand $|f\rangle$ vorhanden sein werden. Es können auch noch zusätzliche Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren vorhanden sein, welche Teilchen erzeugen, welche dann wieder vernichtet werden. Diese Teilchen beschreiben *Zwischenzustände* und werden *virtuelle* Teilchen genannt.

Die Rechnungen können stark vereinfacht werden, wenn man auf die explizite Einführung solcher virtuellen Teilchen verzichtet. Dies erreicht man, indem man die S-Matrix als Summe von Normalprodukten anschreibt, da bei diesen *alle* Vernichtungsoperatoren rechts von allen Erzeugungsoperatoren stehen. Ein solches Normalprodukt absorbiert zunächst eine bestimmte Zahl von Teilchen und emittiert dann einige. Es erlaubt aber nicht die Emission mit nachfolgender Vernichtung von Zwischenzustandsteilchen. Jedes dieser Normalprodukte wird dann einen bestimmten Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ beschreiben.

Wir haben schon den Wechselwirkungsterm der QED

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu) = -\mathcal{L}_I(x^\mu) = -e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)\,\hat{A\!\!\!/}(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu)\right] \tag{6.36}$$

kennengelernt. Die negativen (positiven) Frequenzanteile $\hat{A}^{(-)}$, $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}$ und $\hat{\psi}^{(-)}$ ($\hat{A}^{(+)}$, $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}$ und $\hat{\psi}^{(+)}$) sind linear in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Betrachten wir etwa die Comptonstreuung ($e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$) so muß das einzige Normalprodukt, welches zur Comptonstreuung beitragen kann, proportional zu $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\hat{A}^{(-)}\hat{\psi}^{(+)}\hat{A}^{(+)}$ sein (ein Elektron und ein Photon wird vernichtet, ein Elektron und ein Photon wird erzeugt). Daraus ist zu ersehen, daß die wesentliche Aufgabe darin zu suchen ist, die Entwicklung der S-Matrix in solche Normalprodukte abzuleiten.

Es seien nun $\hat{Q}$, $\hat{R}$, $\ldots$, $\hat{W}$ Operatoren vom Typ $\hat{A}^{(\pm)}$, $\hat{\bar{\psi}}^{(\pm)}$ und $\hat{\psi}^{(\pm)}$, wobei jeder linear entweder in einem Erzeugungs- oder in einem Vernichtungsoperator ist. Es gilt dann

$$\mathcal{N}\left[\hat{Q}\hat{R}\cdots\hat{W}\right] = (-1)^P\left(\hat{Q}'\hat{R}'\cdots\hat{W}'\right), \tag{6.37}$$

wobei die Operatoren $\hat{Q}'$, $\hat{R}'$, $\ldots$, $\hat{W}'$ die ursprünglichen Operatoren $\hat{Q}$, $\hat{R}$, $\ldots$, $\hat{W}$ sind, aber derart umgeordnet, daß alle Vernichtungsoperatoren (also die positiven Frequenzanteile) rechts von allen Erzeugungsoperatoren stehen. Der Exponent P entspricht der Zahl von Vertauschungen benachbarter Fermioperatoren, welche notwendig waren um die geforderte Ordnung herzustellen. Wir verallgemeinern noch die Definition in (6.37) indem wir fordern, daß das Normalprodukt dem distributiven Gesetz gehorcht (wir unterdrücken nunmehr das '^' Zeichen zur Kennzeichnung von Operatoren, da im folgenden stets Operatoren gemeint sind):

$$\mathcal{N}[RS\cdots + VW\cdots] = \mathcal{N}[RS\cdots] + \mathcal{N}[VW\cdots]\,. \tag{6.38}$$

Das Ergebnis (6.35) verlangt nun, daß wir die Entwicklung des zeitgeordneten Produktes in solche Normalprodukte zu untersuchen haben. Aus der

Definition des Normalproduktes für zwei Feldoperatoren folgt (zunächst für Bosonen)

$$\begin{aligned}
AB - \mathcal{N}[AB] &= \left(A^{(+)} + A^{(-)}\right)\left(B^{(+)} + B^{(-)}\right) \\
&\quad - A^{(+)}B^{(+)} - B^{(-)}A^{(+)} - A^{(-)}B^{(+)} - A^{(-)}B^{(-)} \\
&= A^{(+)}B^{(+)} + A^{(+)}B^{(-)} + A^{(-)}B^{(+)} + A^{(-)}B^{(-)} \\
&\quad - A^{(+)}B^{(+)} - B^{(-)}A^{(+)} - A^{(-)}B^{(+)} - A^{(-)}B^{(-)} \\
&= A^{(+)}B^{(-)} - B^{(-)}A^{(+)} \\
&\quad [\text{ oder allgemein }] \\
&= \begin{cases} \left[A^{(+)}, B^{(-)}\right] & \text{für Boson Felder,} \\ \left\{A^{(+)}, B^{(-)}\right\} & \text{für Fermion Felder,} \end{cases} \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

wobei wir das Ergebnis (3.19) verwendet haben. Die Kommutatoren (Antikommutatoren) sind c-Zahlen und enthalten daher keine Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mehr. Damit ist die rechte Seite von (6.39) stets eine c-Zahl, welche durch $\langle 0 \,|\, AB \,|\, 0 \rangle$ gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\langle 0 \,|\, AB \,|\, 0 \rangle &= \langle 0|\, A^{(+)} \underbrace{B^{(+)}\,|0\rangle}_{=0} + \langle 0|\, A^{(+)} B^{(-)}\,|0\rangle \\
&\quad + \langle 0|\, A^{(-)} \underbrace{B^{(+)}\,|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|\, A^{(-)}}_{=0} A^{(-)}\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\, A^{(+)} B^{(-)}\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\, B^{(-)} \underbrace{A^{(+)}\,|0\rangle}_{=0} + \langle 0|\left[A^{(+)}, B^{(-)}\right]|0\rangle \\
&= \left[A^{(+)}, B^{(-)}\right]\langle 0 \,|\, 0\rangle = \left[A^{(+)}, B^{(-)}\right].
\end{aligned}$$

Analoges folgt für Fermioperatoren. Wir schreiben daher für (6.39):

$$AB = \mathcal{N}[AB] + \langle 0 \,|\, AB \,|\, 0 \rangle. \qquad (6.40)$$

Nun ist weiters

$$\mathcal{N}[AB] = \pm \mathcal{N}[BA],$$

mit dem negativen Vorzeichen für Fermioperatoren. Somit folgt aus (6.40) für $x_1^0 \neq x_2^0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}[A(x_1)B(x_2)] &= \mathcal{N}[A(x_1)B(x_2)] + \langle 0 \,|\, \mathcal{T}[A(x_1)B(x_2)] \,|\, 0 \rangle \\
&= \mathcal{N}[A(x_1)B(x_2)] + \overbrace{A(x_1)\,B}(x_2)\,. \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

Hier wurde mit $\overbrace{A(x_1)\,B}(x_2)$ für den Vakuumerwartungswert des Zeitgeordneten Produktes die *Kontraktion* der beiden Operatoren $A(x_1)$ und $B(x_2)$ eingeführt. Diese Kontraktion wird verschwinden, außer die Feldoperatoren

$A(x_1)$ oder $B(x_2)$ erzeugen ein Partikel, welche der jeweils andere vernichtet. Die nicht verschwindenden Kontraktionen sind dann aber gerade die Feynman Propagatoren (3.54), (3.58), (4.36) und (5.32):

$$\overbracket{\phi(x_1)\,\phi}(x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2) \tag{6.42a}$$

$$\overbracket{\phi(x_1)\,\phi}^{+}(x_2) = \overbracket{\phi^{+}(x_2)\,\phi}(x_1) = i\Delta_F(x_1 - x_2) \tag{6.42b}$$

$$\underbracket{\psi_\alpha(x_1)\,\overline{\psi}}_\beta(x_2) = -\underbracket{\overline{\psi}_\beta(x_2)\,\psi}_\alpha(x_1) = iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \tag{6.42c}$$

$$\underbracket{A^\mu(x_1)\,A}^\nu(x_2) = iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2). \tag{6.42d}$$

In Verallgemeinerung von (6.41) wollen wir nun das Normalprodukt verschiedener Operatoren $A \equiv A(x_1), \ldots, M \equiv M(x_m), \ldots$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{N}\,(\overbracket{A\underbracket{BC}DE\underbracket{F\cdots\cdots JK}}L M\cdots) =$$

$$(-1)^P \overbracket{AK}\underbracket{BC}\underbracket{EL}\cdots\mathcal{N}\,(DF\cdots JM\cdots)\,, \tag{6.43}$$

wobei P wieder die Zahl der Vertauschungen benachbarter Fermionenoperatoren ist, um die gewünschte Ordnung herzustellen. So gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\,[\psi_\alpha(x_1)\,\underbracket{\psi_\beta(x_2)\,A^\mu(x_3)\,\overline{\psi}_\gamma(x_4)\,\overline{\psi}}_\delta(x_5)\,] &= -\mathcal{N}\,[\underbracket{\psi_\beta(x_2)\,\psi_\alpha(x_1)\,A^\mu(x_3)\,\overline{\psi}_\gamma(x_4)\,\overline{\psi}}_\delta(x_5)\,] \\
&= \mathcal{N}\,[\underbracket{\psi_\beta(x_2)\,\psi_\alpha(x_1)\,A^\mu(x_3)\,\overline{\psi}}_\delta(x_5)\,\overline{\psi}_\gamma(x_4)\,] \\
&= -\mathcal{N}\,[\underbracket{\psi_\beta(x_2)\,\overline{\psi}}_\delta(x_5)\,\psi_\alpha(x_1)\,A^\mu(x_3)\,\overline{\psi}_\gamma(x_4)\,] \\
&= \underbracket{\psi_\beta(x_2)\,\overline{\psi}}_\delta(x_5)\,\mathcal{N}\left[\psi_\alpha(x_1)A^\mu(x_3)\bar{\psi}_\gamma(x_4)\right].
\end{aligned}$$

Für ungleiche Zeiten ($x_i^0 \neq x_j^0, \quad i \neq j$) gilt dann das *Wicksche Theorem*:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(ABCD\cdots WXYZ) &= \mathcal{N}(ABCD\cdots WXYZ) + \mathcal{N}\,(\wick{\c1 A \c1 B} C \cdots\cdots YZ) \\
&\quad + \mathcal{N}\,(\wick{\c1 A B \c1 C} \cdots\cdots YZ) + \ldots \\
&\quad + \mathcal{N}\,(\wick{\c1 A \c1 B \c2 C \c2 D} \cdots\cdots YZ) + \ldots \\
&\quad + \mathcal{N}\,(\wick{\c1 A \c2 B \c3 C \cdots\cdots \c3 X \c2 Y \c1 Z}) \\
&= \mathcal{N}\,(ABC\cdots XYZ) + \text{Summe über alle} \\
&\quad\ \text{Normalprodukte mit allen möglichen} \\
&\quad\ \text{Kontraktionspaaren.} \qquad (6.44)
\end{aligned}
$$

Die grundlegende Idee ist die folgende: für eine gegebene Zeitordnung beginnen wir die Erzeugungsoperatoren innerhalb des Produktes von Operatoren nach links zu verschieben. Dies erzeugt einen Zusatzterm, welcher gerade die Kontraktion ist, wann immer der Erzeugungsoperator nicht mit einem anderen Operator kommutiert oder antikommutiert. Man darf *alle* möglichen Kontraktionen inkludieren, da Kontraktionen gleich Null sind, wenn der Erzeuger bereits links von einem Vernichter steht. Somit zählt offensichtlich das Theorem alle zusätzlichen Terme, welche auftreten, wenn man ein zeitgeordnetes Produkt in ein Normalprodukt umordnet.

Der Beweis des Wickschen Theorems erfolgt durch Induktion und benötigt zwei Schritte. Im ersten Schritt wird das folgende, grundlegende Lemma bewiesen:

Lemma 6.1 *Ist $\mathcal{N}(UV\cdots XY)$ ein Normalprodukt und Z ein Operator, welcher früher als alle anderen Operatoren wirkt. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(UV\cdots XY)Z &= \mathcal{N}\,(UV\cdots\cdots X\wick{\c1 Y \c1 Z}) + \mathcal{N}\,(UV\cdots\cdots \wick{\c1 X Y \c1 Z}) + \ldots \\
&\quad + \mathcal{N}\,(\wick{\c1 U V \cdots\cdots XY \c1 Z}) + \mathcal{N}(UV\cdots XYZ). \qquad (6.45)
\end{aligned}
$$

Wird also ein Normalprodukt von rechts mit irgendeinem Operator, welcher früher als alle anderen wirkt, multipliziert, so erhalten wir eine Summe von Normalprodukten, die den zusätzlichen Operator enthalten, welcher der Reihe nach mit allen anderen Operatoren des ursprünglichen Normalproduktes kontrahiert ist. Zusätzlich tritt noch ein Normalprodukt auf, welches den neuen Operator inkludiert.

Beweis:

a) Z ist ein Vernichtungsoperator. Damit verschwinden alle Kontraktionen, da stets $\mathcal{T}(UZ) = \mathcal{N}(UZ)$ gilt. Es trägt dann nur der letzte Term zum Gesamtausdruck bei, und das Lemma ist bewiesen.

b) Wir haben angenommen, daß das Operatorprodukt $UV \cdots XY$ bereits normal geordnet ist. Wäre dies nicht der Fall, so müßte auf beiden Seiten von (6.45) aber eine Umordnung stattfinden. Diese bewirkt auf beiden Seiten das Auftreten identer Terme, welche sich dann wegkürzen.

c) Z sei ein Erzeugungsoperator und alle anderen Operatoren sind Vernichtungsoperatoren. Kann das Lemma für diesen Fall bewiesen werden, so kann man Erzeugungsoperatoren auch durch Multiplikation von links inkludieren; die zusätzlichen Kontraktionen, welche so eingeführt werden, verschwinden ident und können daher zur rechten Seite hinzuaddiert werden ohne das Ergebnis (6.45) zu verändern.

Man muß daher (6.45) nur für Z als Erzeugungsoperator und die A, B, $\ldots X$ und Y als Vernichtungsoperatoren beweisen. Der Beweis erfolgt durch Induktion: für zwei solche Operatoren ist (6.45) sicherlich wegen (6.41)

$$YZ = \mathcal{T}(YZ) = \mathcal{N}(YZ) + \overline{YZ}$$

erfüllt. Wir nehmen nun an, daß (6.45) auch für n Operatoren gültig ist und beweisen daraus die Richtigkeit für $n+1$ Operatoren. Wir multiplizieren dazu (6.45) von links mit einem Vernichtungsoperator D, welcher später als Z wirkt:

$$\begin{aligned} D\mathcal{N}(UV \cdots XY)Z &= \mathcal{N}(DUV \cdots XY)Z \\ &= \mathcal{N}(DUV \cdots\cdots X\overline{YZ}) + \mathcal{N}(DUV \cdots\cdots \overline{XYZ}) + \cdots \\ &\quad + \mathcal{N}(D\overline{UV \cdots\cdots XYZ}) + D\mathcal{N}(UV \cdots XYZ). \end{aligned}$$

Da alle $U, V, \ldots, X$ und Y Vernichtungsoperatoren sind und die Kontraktion von Z mit jedem Vernichtungsoperator eine c-Zahl ist, konnte D überall in das Normalprodukt einbezogen werden, nur nicht in den letzten Term, in welchem Z nicht kontrahiert, also als Operator, auftritt. Dieser letzte Term ist noch weiter zu behandeln:

$$
\begin{aligned}
D\mathcal{N}(UV\cdots XYZ) &= (-1)^P DZUV\cdots XY \\
&= (-1)^P \mathcal{T}(DZ)UV\cdots XY \\
&= (-1)^P \overline{DZ}UV\cdots XY \\
&\quad +(-1)^{P+Q}\mathcal{N}(ZD)UV\cdots XY \\
&= \left[(-1)^P\right]^2 \overline{DUV\cdots\cdots XYZ} \\
&\quad + \left[(-1)^{P+Q}\right]^2 \mathcal{N}(DUV\cdots XYZ) \\
&= \mathcal{N}\left(\overline{DUV\cdots\cdots XYZ}\right) + \mathcal{N}(DUV\cdots XYZ).
\end{aligned}
$$

Der Faktor $(-1)^P$ tritt auf der rechten Seite der ersten Zeile auf, weil Z innerhalb des normalgeordneten Produktes nach links verschoben wird, wobei es zu P Vertauschungen mit Fermioperatoren kommen kann, wenn Z selbst ein Fermioperator ist. Sonst ist P gleich Null. Dies ergibt Normalordnung und man kann das Symbol hiefür weglassen. D und Z sind bereits zeitlich korrekt geordnet, weshalb anstelle von DZ in der zweiten Zeile auch $\mathcal{T}[DZ]$ geschrieben werden kann. Die dritte und vierte Zeile folgt aus der Definition des zeitgeordneten Produktes als Summe von Kontraktion und Normalprodukt, wobei der Faktor $(-1)^Q$ aus der Vertauschung von D und Z ensteht, unter der Voraussetzung, daß beide Fermioperatoren sind. Der Term in der vierten Zeile ist bereits normalgeordnet, da U, $\ldots Y$ nach Voraussetzung Vernichtungsoperatoren sind. Die Wiederherstellung der ursprünglichen Ordnung führt dann zu den zusätzlichen Faktoren $(-1)^P$ bzw. $(-1)^{P+Q}$. Damit ist das grundsätzliche Lemma (6.45) bewiesen.

Dieses Ergebnis kann auf Normalprodukte erweitert werden, welche bereits Kontraktionen enthalten. Wir multiplizieren (6.45) mit der Kontraktion von zwei zusätzlichen Operatoren $\overline{VX}$ und vertauschen dann die Operatoren *auf beiden Seiten*. Dies gestattet es das grundlegende Lemma (6.45) wie folgt zu schreiben:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}\left(U\overline{V\cdots\cdots X}Y\right)Z &= \mathcal{N}\left(U\overline{V\cdots\cdots X}\,\overline{YZ}\right) + \ldots + \mathcal{N}\left(\underline{U\overline{V\cdots\cdots X}YZ}\right) \\
&\quad + \mathcal{N}\left(U\overline{V\cdots\cdots X}YZ\right).
\end{aligned}
$$

Wir können nun im zweiten Schritt das Wicksche Theorem beweisen, wobei seine Gültigkeit aus Gleichung (6.41) für zwei Operatoren evident ist:

$$
\mathcal{T}(UV) = \mathcal{N}(UV) + \overline{UV}.
$$

Wir gehen nun wieder davon aus, daß das Wicksche Theorem für n Operatoren gültig ist und beweisen daraus seine Gültigkeit für $n{+}1$ Operatoren. Dazu multiplizieren wir ein zeitgeordnetes Produkt von rechts mit einem Operator Ω, welcher früher als alle anderen Operatoren wirkt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(UVW\cdots XYZ)\,\Omega &= \mathcal{T}(UVW\cdots XYZ\Omega) \\
&= \mathcal{N}(UVW\cdots XYZ)\,\Omega + \mathcal{N}(\overline{UV}W\cdots XYZ)\,\Omega + \ldots \\
&= \mathcal{N}(UVW\cdots XYZ\Omega) + \text{Normalprodukte, welche} \\
&\ \ \text{alle möglichen Kontraktionspaare enthalten.}
\end{aligned}$$

Der Operator Ω kann in das zeitgeordnete Produkt einbezogen werden, da er früher als alle anderen Operatoren wirkt. Lemma (6.45) wird nun benutzt um Ω in das Normalprodukt einzubauen. Man kann nun die Einschränkung bezüglich der zeitlichen Wirkung von Ω fallen lassen, indem man die Operatoren auf beiden Seiten simultan umordnet. Die Vorzeichenkonventionen führen dann auf beiden Seiten zu denselben Vorzeichen und die Beziehung bleibt unverändert. Damit ist (6.44) bewiesen.

Es ist abschließend festzuhalten, daß das Wicksche Theorem eine *Operatoridentität* ist, welche für beliebige Matrixelemente gültig ist. Seine tatsächliche Anwendung findet es bei der Berechnung von Grundzustandserwartungswerten, wo die Beiträge der nicht kontrahierten Normalprodukte verschwinden.

Die Hamiltondichte $\mathcal{H}_I(x^\mu)$, welche in der S-Matrixentwicklung (6.35) auftritt, wird nun analog zu (6.36) die folgende allgemeine Form haben:

$$\mathcal{H}_I(x^\mu) = \mathcal{N}\left[A(x^\mu)B(x^\mu)\cdots\right]$$

und damit werden zeitgeordnete Produkte mit gemischten Operatoren in der Form

$$\mathcal{T}\left[\mathcal{H}_I(x_1)\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\right] = \mathcal{T}\left[\mathcal{N}(AB\cdots)_{x_1}\cdots\mathcal{N}(AB\cdots)_{x_n}\right]$$

auftreten. Wick hat nun sein Theorem (6.42b) erweitert, um auch solche gemischt zeitgeordnete Produkte behandeln zu können. In jedem Faktor $\mathcal{N}(AB\cdots)_{x_r}$ wird $x_r = (x_r^0, \mathbf{r}_r)$ durch $\xi_r = (x_r^0 \pm \varepsilon, \mathbf{r}_r)$ ersetzt, mit $\varepsilon > 0$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob die Substitution bei einem Erzeugungs- oder bei einem Vernichtungsoperator durchgeführt wird. Damit schreiben wir:

$$\mathcal{T}\left[\mathcal{N}(AB\cdots)_{x_1}\cdots\mathcal{N}(AB\cdots)_{x_n}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{T}\left[\mathcal{N}(AB\cdots)_{\xi_1}\cdots\mathcal{N}(AB\cdots)_{\xi_n}\right],$$

wobei nunmehr in jeder Gruppe $(AB\cdots)_{\xi_r}$ die Normal- und Zeitordnung dieselbe ist, dank der $\pm\varepsilon$ in den ξ_r^0. Wir entwickeln nun die rechte Seite entsprechend dem Wickschen Theorem *bevor* der Grenzübergang ausgeführt wird. Kontraktionen innerhalb einer Gruppe (also über gleichzeitige Operatoren) verschwinden, da jede Gruppe für sich ja bereits normalgeordnet ist. Somit können wir also auch ein gemischt zeitgeordnetes Produkt analog zu (6.44) entwickeln - Kontraktionen über gleichzeitige Operatoren treten aber nicht auf.

Wir haben das gesuchte Ergebnis erhalten: wir können jede Form der S-Matrixentwicklung in eine Summe verallgemeinerter Normalprodukte expandieren. Jedes einzelne dieser Normalprodukte entspricht einem ganz bestimmten Prozess, welcher durch die nicht kontrahierten Operatoren charakterisiert ist; diese vernichten bzw. erzeugen Teilchen, welche in den Anfangs- und Endzuständen auftreten. Die nicht verschwindenden Kontraktionen sind dann Feynman Propagatoren, welche virtuellen Teilchen entsprechen, die in Zwischenzuständen erzeugt und vernichtet werden.