Kapitel 7

Feynman Diagramme und die Regeln der QED

Im vorhergehenden Kapitel haben wir das erforderliche Handwerkszeug erarbeitet, welches zur Behandlung der S-Matrix Entwicklung erforderlich ist. Nunmehr ist es notwendig das Matrixelement $\left\langle f \middle| \hat{S} \middle| i \right\rangle$ für eine gegebene Ordnung Störungstheorie zu berechnen. Wir konzentrieren uns dabei auf die Quantenelektrodynamik (QED). Ähnlich geartete Berechnungsvorschriften lassen sich grundsätzlich für alle kovarianten Feldtheorien entwickeln.

7.1 Feynman Diagramme im Ortsraum

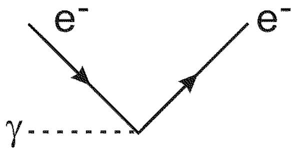
Die Prozesse, zu welchen einzelne Terme der S-Matrix Entwicklung (6.35)

$$
\begin{aligned}
\hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, \mathcal{T}\left[\hat{\mathcal{H}}_I(x_1)\hat{\mathcal{H}}_I(x_2)\cdots\hat{\mathcal{H}}_I(x_n)\right],
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

beitragen sind natürlich durch die Natur der untersuchten Wechselwirkung bestimmt. Für die QED ist dies durch die Wechselwirkungshamiltondichte (6.22)

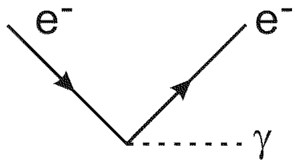
$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu) &= -e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)\,\hat{\not{A}}(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu)\right] \\
&= -e\mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}^{(-)}\right)\left(\hat{\not{A}}^{(+)} + \hat{\not{A}}^{(-)}\right)\left(\hat{\psi}^{(+)} + \hat{\psi}^{(-)}\right)\right]_{x^\mu}
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

gegeben. Diese Wechselwirkung gliedert sich in acht Grundprozesse:



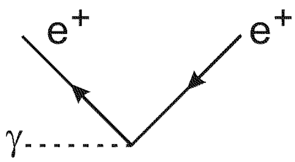
$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\;\hat{\not{A}}^{(+)}\hat{\psi}^{(-)}\right]_{x^\mu}$$

e^--Streuung mit Adsorption eines Photons (γ).



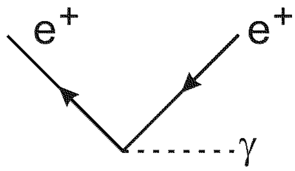
$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\;\hat{\not{A}}^{(-)}\hat{\psi}^{(-)}\right]_{x^\mu}$$

e^--Streuung mit Emission eines Photons (γ).



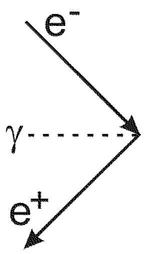
$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\;\hat{\not{A}}^{(+)}\hat{\psi}^{(+)}\right]_{x^\mu}$$

e^+-Streuung mit Adsorption eines Photons (γ).



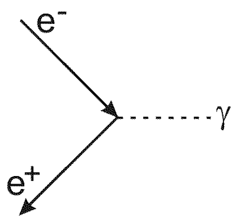
$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\;\hat{\not{A}}^{(-)}\hat{\psi}^{(+)}\right]_{x^\mu}$$

e^+-Streuung mit Emission eines Photons (γ).



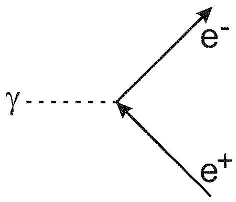
$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\;\hat{\not{A}}^{(+)}\hat{\psi}^{(+)}\right]_{x^\mu}$$

e^+-e^- Vernichtung unter Adsorption eines Photons (γ), “Paarvernichtung”.



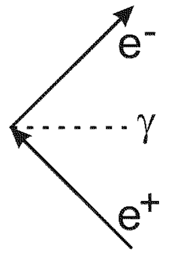
$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\;\hat{\not{A}}^{(-)}\hat{\psi}^{(+)}\right]_{x^\mu}$$

e^+-e^- Vernichtung unter Emission eines Photons (γ), “Paarvernichtung”.



$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\;\hat{\not{A}}^{(+)}\hat{\psi}^{(-)}\right]_{x^\mu}$$

e^+-e^- Erzeugung unter Adsorption eines Photons (γ), “Paarerzeugung”.



$$-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\,\hat{A\!\!\!/}^{(-)}\hat{\psi}^{(-)}\right]_{x^\mu}$$

e^+-e^- Erzeugung unter Emission eines Photons (γ), "Paarerzeugung".

Wir haben dabei hier bereits die Darstellung der einzelnen Normalprodukte unter Verwendung von Feynman Diagrammen vorweggenommen. Diese Grundprozesse werden auch *Grundvertices* genannt. Alle weiteren in der QED auftretenden Diagramme (Prozesse) sind aus diesen Grundelementen aufgebaut. Typisch für die Vertices der QED ist, daß stets zwei Fermionen- und eine Photonenlinie in einem Vertex zusammentreffen.

Die Grundvertices entsprechen jenen Beiträgen, welche aus den Termen erster Ordnung, $\hat{S}^{(1)}$ entstehen:

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{(1)} &= \frac{(-i)^1}{1!}\int d^4x\,\mathcal{T}\left[\hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu)\right] \\
&= -i\int d^4x\,\mathcal{T}\left\{-e\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right]_{x^\mu}\right\}.
\end{aligned}$$

Dies sind aber keine physikalischen Prozesse, da in keinem Energie und Impuls für reelle Partikel erhalten werden kann, wie wir noch später sehen werden. (Wir müssen ja $k^\mu k_\mu = 0$, (5.24), für die Photonen und $p^\mu p_\mu = m_0^2$ für die Fermionen fordern.) Somit muß

$$\left\langle f \left| \hat{S}^{(1)} \right| i \right\rangle = 0, \qquad |f\rangle \neq |i\rangle \tag{7.3}$$

gelten. Ganz allgemein muß sich für alle unphysikalischen Prozesse

$$\left\langle f \left| \hat{S} \right| i \right\rangle = 0, \qquad |f\rangle \neq |i\rangle$$

ergeben.

Um physikalisch sinnvolle Prozesse zu erhalten muß man zumindest zur Ordnung $\hat{S}^{(2)}$ übergehen:

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{(-i)^2e^2}{2!}\int d^4x_1 d^4x_2\,\mathcal{T}\left\{\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right]_{x_1}\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right]_{x_2}\right\}.$$

Es ist nun das Wicksche Theorem anzuwenden, um die möglichen Beiträge der Ordnung $\hat{S}^{(2)}$ bestimmen zu können:

$$\hat{S}^{(2)} = \sum_{i=A}^{F}\hat{S}_i^{(2)},$$

$$\hat{S}_A^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right)_{x_2}\right] \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_B^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 \Big\{&\mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\underbrace{\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}\right)_{x_2}\right] \\ &+\mathcal{N}\left[\left(\underbrace{\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}}\right)_{x_2}\right]\Big\}\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\hat{S}_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\alpha\,\underbrace{\hat{A}_\alpha\,\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\beta\hat{A}_\beta}\,\hat{\psi}\right)_{x_2}\right] \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_D^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 \Big\{&\mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\alpha\,\overbrace{\hat{A}_\alpha\,\underbrace{\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}}\,\gamma^\beta\hat{A}_\beta}\,\hat{\psi}\right)_{x_2}\right] \\ &+\mathcal{N}\left[\left(\underbrace{\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\alpha\,\overbrace{\hat{A}_\alpha\,\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\beta\hat{A}_\beta}\,\hat{\psi}}\right)_{x_2}\right]\Big\}\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\hat{S}_E^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\underbrace{\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\alpha\hat{A}_\alpha\,\overbrace{\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}}\,\gamma^\beta\hat{A}_\beta\,\hat{\psi}}\right)_{x_2}\right] \tag{7.8}$$

$$\hat{S}_F^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\, \left[\left(\underbrace{\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^\alpha\,\underbrace{\hat{A}_\alpha\,\overbrace{\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}}\,\gamma^\beta\hat{A}_\beta}\,\hat{\psi}}\right)_{x_2}\right]. \tag{7.9}$$

Der erste Term, $\hat{S}_A^{(2)}$, Gleichung (7.4), ist weniger interessant. Er entspricht zwei völlig unabhängigen Grundvertices und er beschreibt daher keinen echten Übergang.

Die zwei Beiträge von $\hat{S}_B^{(2)}$, (7.5) sind einander äquivalent, was man durch vertauschen der Operatoren erkennen kann. Dies erfordert eine geradzahlige Vertauschung der Fermioperatoren. (Innerhalb eines Normalproduktes zählen ja nur Vertauschungen!) Damit wird:

$$\mathcal{N}\left[\left(\underbrace{\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}}\right)_{x_2}\right] = \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\underbrace{\hat{\psi}\right)_{x_2}\left(\hat{\bar{\psi}}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}\right)_{x_1}\right].$$

Wir vertauschen nun im zweiten Term von (7.5) die Integrationsvariablen und erkennen unmittelbar, daß der Beitrag dieses zweiten Terms ident zu dem des ersten Terms ist, und wir erhalten:

$$\hat{S}_B^{(2)} = -e^2\int d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\underbrace{\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}}\,\hat{A\!\!\!/}\,\hat{\psi}\right)_{x_2}\right]. \tag{7.10}$$

Wir finden hier eine Fermionenkontraktion, welche durch (6.42c) bereits angegeben wurde. Sie ist eine c-Zahl und entspricht einem virtuellen Zwischenfermion. Für $t_2 < t_1$ etwa, können wir uns ein virtuelles Elektron vorstellen, welches von x_2 nach x_1 geht. Zunächst gilt ja

$$-\underbrace{\hat{\bar{\psi}}_\beta(x_2)\,\hat{\psi}_\alpha(x_1)} = iS_F(x_1 - x_2),$$

mit

$$\begin{aligned} iS_F(x_1-x_2) &= -\left\langle 0 \left| \mathcal{T}\left[\hat{\bar{\psi}}(x_2)\hat{\psi}(x_1)\right]\right| 0\right\rangle \\ &= i\theta(t_1-t_2)S_F^{(+)}(x_1-x_2)+i\theta(t_2-t_1)S_F^{(-)}(x_1-x_2). \end{aligned}$$

Somit folgt für $t_2 < t_1$:

$$\begin{aligned} S_F(x_1-x_2) &= S_F^{(+)}(x_1-x_2) \\ &= -\left\langle 0 \left| \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_2)\hat{\psi}^{(+)}(x_1) \right| 0\right\rangle = \left\langle 0 \left| \hat{\psi}^{(+)}(x_1)\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_2) \right| 0\right\rangle. \end{aligned}$$

Damit wird tatsächlich ein Elektron beschrieben, welches in x_2 erzeugt und in x_1 vernichtet wird. Umgekehrt finden wir für $t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned} S_F(x_1-x_2) &= S_F^{(-)}(x_1-x_2) \\ &= \left\langle 0 \left| \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x_2)\hat{\psi}^{(-)}(x_1) \right| 0\right\rangle. \end{aligned}$$

Dies entspricht dann einem virtuellen Positron, welches sich vom Punkt x_1 nach x_2 bewegt. Die Zuordnung ist hier unwesentlich, da ja über alle *inneren Punkte* x_1 und x_2 integriert wird. Man kann daher die beiden Fälle zusammenfassen, indem man von einem *virtuellen Fermion* spricht, welches sich von x_2 (in Verbindung mit $\hat{\bar{\psi}}$) nach x_1 (in Verbindung mit $\hat{\psi}$) bewegt.

Zusätzlich zu diesem Propagator enthält (7.10) zwei nicht kontrahierte Fermionen- und zwei nicht kontrahierte Photonenoperatoren. Diese vernichten oder erzeugen Teilchen, welche am Anfang oder am Ende vorhanden sind, die sogenannten *externen Teilchen*.

Der Operator $\hat{S}_B^{(2)}$ trägt zu vielen reellen Prozessen (Übergängen) bei, welche, um Energie und Impuls erhalten zu können, im Anfangs- und im Endzustand zwei Teilchen enthalten müssen. Da die Feldoperatoren in $\hat{S}_B^{(2)}$ in Normalordnung sind, kann man leicht die Beiträge zu vorgebenen Prozessen herausgreifen, wie jetzt demonstriert werden soll.

Ein möglicher Prozess ist die *Compton - Streuung*:

$$\gamma + e^- \quad \rightarrow \quad \gamma + e^- .$$

Für diesen Prozess wird $\hat{\psi}^{(+)}(x_2)$ aus $\hat{\psi}(x_2)$ gewählt um das Elektron aus seinem Anfangszustand zu vernichten und $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_1)$ aus $\hat{\bar{\psi}}(x_1)$, um das Elektron in seinem Endzustand zu erzeugen. Es kann nun entweder $\hat{\not{A}}^{(+)}(x_1)$ oder $\hat{\not{A}}^{(+)}(x_2)$ das Anfangsphoton vernichten und daher erzeugt dann $\hat{\not{A}}^{(-)}(x_2)$ oder $\hat{\not{A}}^{(-)}(x_1)$ das Endphoton. Wir erhalten somit für die Compton-Streuung:

$$\hat{S}^{(2)}(\gamma\, e^- \rightarrow \gamma\, e^-) = \hat{S}_a + \hat{S}_b,$$

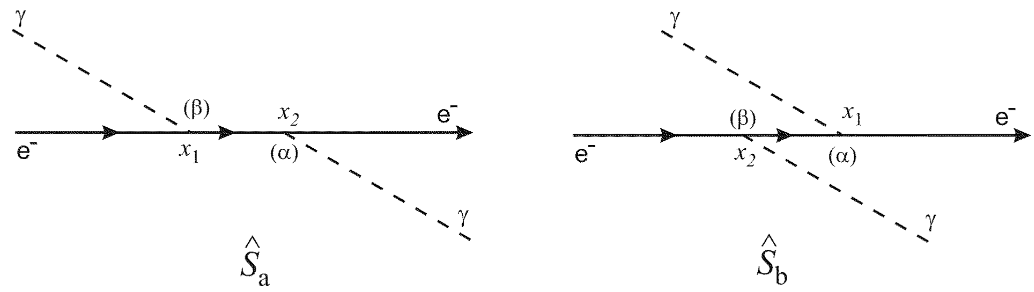


Abbildung 7.1: Feynman Diagramme zur Compton Streuung.

mit

$$\hat{S}_a = -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \,\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_1)\gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta \hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1)\hat{A}_\beta^{(+)}(x_2)\hat{\psi}^{(+)}(x_2), \tag{7.11}$$

und

$$\hat{S}_b = -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \,\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_1)\gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta \hat{A}_\beta^{(-)}(x_2)\hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1)\hat{\psi}^{(+)}(x_2), \tag{7.12}$$

wobei hier wieder die Normalordnung hergestellt wurde. Die zugehörigen Feynman Diagramme sind in Abb. 7.1 dargestellt.

Wir finden aber noch weitere Prozesse, welche durch (7.10) beschrieben werden: zunächst natürlich die Compton-Streuung von Positronen, welche durch idente Graphen wie in Abb. 7.1 beschrieben werden, nur daß die Pfeilrichtungen umgedreht werden.

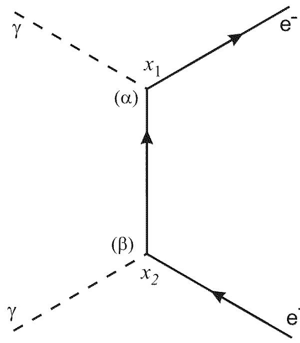
Zwei weitere wichtige Prozesse sind die Paarerzeugung durch Vernichtung zweier Photonen:

$$\gamma + \gamma \quad \rightarrow \quad e^+ + e^-$$

oder

$$\hat{S}^{(2)}(2\gamma \rightarrow e^+ e^-) = -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \,\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_1)\gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta \times \hat{\psi}^{(-)}(x_2)\hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1)\hat{A}_\beta^{(+)}(x_2)$$

$$=$$



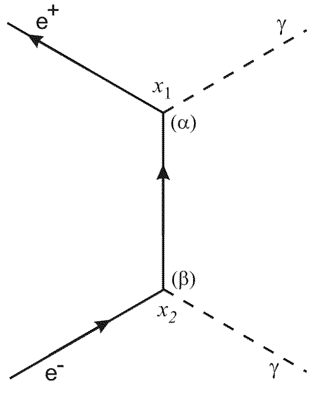
und die Paarvernichtung durch Erzeugung zweier Photonen

$$e^+ + e^- \quad \rightarrow \quad \gamma + \gamma$$

oder

$$\hat{S}^{(2)}(e^+ e^- \rightarrow 2\gamma) = -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \,\gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta \hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1) \times \hat{A}_\beta^{(-)}(x_2)\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x_1)\hat{\psi}^{(+)}(x_2)$$

$$=$$



Damit wurden alle Prozesse behandelt, welche dem Term (7.10) entspringen können.

Wir gehen nun auf den Beitrag $\hat{S}_C^{(2)}$ nach Gleichung (7.6) über, welcher vier nicht kontrahierte Fermionenoperatoren enthält. Er entspricht somit der Streuung zweier Fermionen aneinander, also die $e^- \rightarrow e^-$, $e^+ \rightarrow e^+$ oder

$e^- \rightarrow e^+$ Streuung, je nachdem, welche Beiträge positiver und negativer Frequenz aus den Fermionenoperatoren herausgegriffen werden. Die Photonenkontraktion in (7.6) beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Ladungen als den Austausch von transversalen, longitudinalen und skalaren Photonen. Damit erscheint dieser Photonenpropagator mit zwei Operatoren konservierter Ströme (nach (E.28) $s^\mu(x^\mu) = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_x$) verknüpft.

Betrachten wir zunächst die Elektron - Elektron Streuung

$$e^- + e^- \quad \rightarrow \quad e^- + e^-,$$

also die sogenannte *Møller Streuung*. Aus (7.6) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) &= -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\gamma^\alpha\hat{\psi}^{(+)}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\gamma^\beta\hat{\psi}^{(+)}\right)_{x_2}\right] \\
&\quad \times iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\
&= -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\, \hat{s}_1^\alpha(x_1) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)\hat{s}_2^\beta(x_2), \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

wobei wir (6.42d) verwendet haben.

Dies führt nun auf die noch nicht vollständig abgeschlossene Behandlung des Photon-Propagators. Wir hatten angegeben, daß

$$D_F^{\mu\nu}(k^\alpha) = {}_TD_F^{\mu\nu}(k^\alpha) + {}_CD_F^{\mu\nu}(k^\alpha) + {}_RD_F^{\mu\nu}(k^\alpha)$$

gilt, wobei ${}_TD_F^{\mu\nu}(k^\alpha)$ als der Austausch transversaler Photonen identifiziert wurde. Ferner konnte ${}_CD_F^{\mu\nu}(k^\alpha)$ in Gleichung (5.53) als die Wechselwirkung mit dem nicht retardierten Coulombpotential zwischen zwei Ladungen interpretiert werden. Bleibt noch

$${}_RD_F^{\mu\nu}(k^\alpha) = \frac{1}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon}\left[\frac{k^\mu k^\nu - (k_\rho n^\rho)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(k_\rho n^\rho)^2 + k_\rho k^\rho}\right].$$

In unserer klassischen Behandlung der Wechselwirkung zwischen Ladungen haben wir sie vollständig durch die Wechselwirkung mit dem transversalen Ladungsfeld und den instantanen Coulombfeldern beschrieben. Dies entspricht unseren Beiträgen ${}_TD_F$ und ${}_CD_F$, und wenn die beiden Formalismen einander äquivalent sein sollen, so muß ${}_RD_F$ für alle beobachtbaren Prozesse verschwinden. Dies ist tatsächlich der Fall und der Grund ist darin zu suchen, daß das elektromagnetische Feld nur mit der Stromdichte der konservierten Ladung $s^\mu(x^\mu)$ wechselwirkt, wie Gleichungen (5.7) und (5.15) zeigen. Wir können dies nun anhand von (7.13) genauer darlegen: in diesem Ausdruck sind $\hat{s}_1^\mu(x_1)$ und $\hat{s}_2^\nu(x_2)$ die zwei wechselwirkenden Ladungsstromdichten.

Anhand von (5.53) wird offensichtlich, daß der Beitrag von ${}_C D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$ zu (7.13) der instantanen Coulombwechselwirkung zwischen den Ladunsgdichten

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1(x^0, \mathbf{r}) &= \hat{s}_1^0(x^0, \mathbf{r}) \\ \hat{\rho}_2(x^0, \mathbf{r}) &= \hat{s}_2^0(x^0, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

entspricht. Ganz ähnlich beschreibt ${}_T D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$ die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Stromdichten

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}_1(x^0, \mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{s}}_1(x^0, \mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{j}}_2(x^0, \mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{s}}_2(x^0, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Man kann nun leicht zeigen, daß der Beitrag ${}_R D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$ zu (7.13) aufgrund der Stromerhaltung verschwindet. Wir transformieren (7.13) in den Impulsraum, wobei wir analog zu (5.47) noch

$$\hat{s}_r^\mu(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \hat{s}_r^\mu(k^\mu) \, e^{-ik^\mu x_\mu}, \qquad r = 1, 2$$

einführen. Dann erhalten wir für (7.13)

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \hat{s}_1^\mu(-k^\mu) \, {}_R D_{F\mu\nu}(k^\mu) \hat{s}_2^\nu(k^\mu), \tag{7.14}$$

wobei auf die spezifische k-Indizierung noch einzugehen sein wird. Der Erhaltungssatz

$$\partial_\mu \hat{s}^\mu(x^\mu) = \hat{0}$$

ergibt dann im Impulsraum

$$k_\mu \hat{s}_r^\mu(k^\mu) = \hat{0}, \qquad r = 1, 2.$$

Aus der expliziten Form von ${}_R D_{F\alpha\beta}(k^\mu)$ folgt aber, daß es entweder proportional k^μ, k^ν, oder proportional zu beiden ist, womit der Beitrag (7.14) tatsächlich verschwindet. Dies kann für alle Beiträge zur S-Matrix ähnlicher Form gezeigt werden. Fernerhin konnte im speziellen gezeigt werden, daß die zwei Beschreibungen tatsächlich einander äquivalent sind.

Wir kehren nun zur weiteren Behandlung von (7.13) zurück. Dazu bezeichnen wir die elektronischen Anfangs- und Endzustände mit 1,2 und $1'$, $2'$, also:

$$|i\rangle = \hat{c}^\dagger(2)\hat{c}^\dagger(1) \, |0\rangle \, , \qquad |f\rangle = \hat{c}^\dagger(2')\hat{c}^\dagger(1') \, |0\rangle \, . \tag{7.15}$$

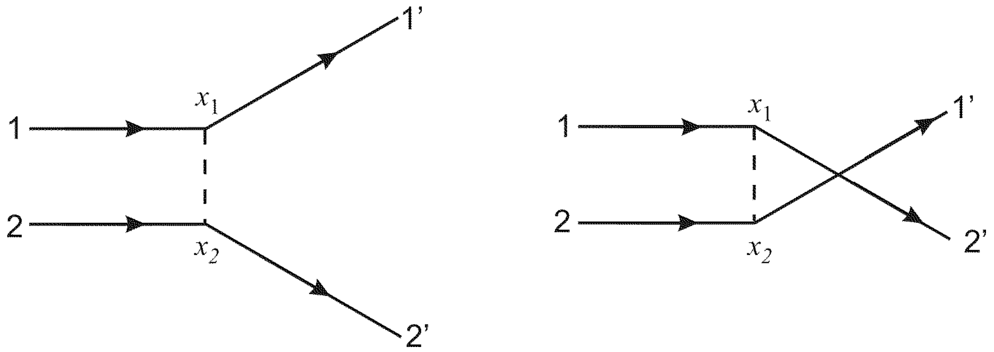


Abbildung 7.2: Feynman Diagramme zur Møller Streuung.

Der Ausdruck

$$\hat{S}^{(2)}(2e^- \to 2e^-) = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\gamma^\alpha\hat{\psi}^{(+)}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\gamma^\beta\hat{\psi}^{(+)}\right)_{x_2}\right] \times iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

erlaubt nun vier Beiträge zur Realisation von (7.15), da jedes der beiden Elektronen von jedem $\hat{\psi}^{(+)}$ Operator vernichtet werden kann, während jedes Elektron des Endzustandes von jedem $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}$ Operator erzeugt werden kann. Diese vier Terme unterscheiden sich nur durch einen Austausch der Integrationsvariablen $x_1 \leftrightarrow x_2$. Es ist somit nur notwendig je einen Ausdruck dieser Paare zu untersuchen und das Ergebnis mit zwei zu multiplizieren. Wir erhalten dann die in Abb. 7.2 dargestellten Feynman Diagramme.

Wir hatten schon einen anderen Fall von zwei identen Beiträgen, welche auf einen Austausch der Integrationsvariablen zurückzuführen war: die Beiträge zu (7.5). Dies ist ein allgemeines Ergebnis: der Term n-ter Ordnung, $\hat{S}^{(n)}$, der S-Matrix Entwicklung enthält einen Faktor $1/n!$ und n Integrationsvariable $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diese Integrationsvariablen können den n Vertices eines Graphen in $n!$ Permutationen zugeordnet werden. Somit kürzt sich der Faktor $n!$ mit dem Faktor $1/n!$, wenn man sich auf *topologisch* verschiedene Diagramme einschränkt. Dies sind jene Diagramme, welche sich *nicht nur* durch die Indizierung der Vertices voneinander unterscheiden.

Wir wollen nun für beide Beiträge den expliziten Ausdruck bestimmen. Dazu benötigen wir für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die bereits bekannten Beziehungen

$$\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x^\mu) = \sum_{r,\mathbf{p}}\left(\frac{m}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})e^{ip^\mu x_\mu}$$

und

$$\hat{\psi}^{(+)}(x^\mu) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{c}_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}.$$

Wir schreiben vereinfachend:

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\psi}}_j^{(-)}(x^\mu) &= \hat{c}^\dagger(j) g_j(x^\mu) \\ \hat{\psi}_j^{(+)}(x^\mu) &= \hat{c}(j) f_j(x^\mu). \end{aligned} \tag{7.16}$$

j nimmt hier die Werte 1, 2, $1'$ und $2'$ an und steht für die Kombination aus Spinindex r und Wellenzahl $\mathbf{p}$.

Wir erhalten dann für den Übergang

$$\hat{S}^{(2)}\left[e^-(1) + e^-(2) \to e^-(1') + e^-(2')\right] = \hat{S}_a + \hat{S}_b$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{S}_a &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}_{1'}^{(-)} \gamma^\alpha \hat{\psi}_1^{(+)}\right)_{x_1} \left(\hat{\bar{\psi}}_{2'}^{(-)} \gamma^\beta \hat{\psi}_2^{(+)}\right)_{x_2}\right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ \hat{S}_b &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}_{2'}^{(-)} \gamma^\alpha \hat{\psi}_1^{(+)}\right)_{x_1} \left(\hat{\bar{\psi}}_{1'}^{(-)} \gamma^\beta \hat{\psi}_2^{(+)}\right)_{x_2}\right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Das Normalprodukt verlangt nun, daß die Operatoren in beiden Ausdrücken in derselben Reihenfolge aufzuscheinen haben, also etwa in $\hat{c}^\dagger(1')\hat{c}^\dagger(2')\hat{c}(1)\hat{c}(2)$. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} &-\hat{\bar{\psi}}_{1'}^{(-)}(x_1)\hat{\bar{\psi}}_{2'}^{(-)}(x_2)\hat{\psi}_1^{(+)}(x_1)\hat{\psi}_2^{(+)}(x_2) \quad \text{und} \\ &\quad +\hat{\bar{\psi}}_{1'}^{(-)}(x_2)\hat{\bar{\psi}}_{2'}^{(-)}(x_1)\hat{\psi}_1^{(+)}(x_1)\hat{\psi}_2^{(+)}(x_2). \end{aligned}$$

Die beiden Beiträge unterscheiden sich also durch ein Minuszeichen. Wir setzen nun (7.15) und (7.16) in (7.17) ein um das Matrixelement zu berechnen:

$$\begin{aligned} &\left\langle f \left| \hat{S}^{(2)}(2e^- \to 2e^-) \right| i \right\rangle = \\ &= \left\{ -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \left\langle f \left| \hat{\bar{\psi}}_{1'}^{(-)}(x_1)\hat{\bar{\psi}}_{2'}^{(-)}(x_2)\gamma^\alpha \hat{\psi}_1^{(+)}(x_1)\gamma^\beta\hat{\psi}_2^{(+)}(x_2) \right| i \right\rangle \right. \\ &\quad \left. \times iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \right\} - \{1' \leftrightarrow 2'\}. \end{aligned}$$

Hier entspricht $\{1' \leftrightarrow 2'\}$ dem ersten Term mit $1'$ und $2'$ für die Endzustände vertauscht. Es folgt

$$\left\langle f \left| \hat{\bar{\psi}}_{1'}^{(-)}(x_1)\hat{\bar{\psi}}_{2'}^{(-)}(x_2)\gamma^\alpha \hat{\psi}_1^{(+)}(x_1)\gamma^\beta \hat{\psi}_2^{(+)}(x_2) \right| i \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\langle 0|\,\hat{c}(1')\hat{c}(2')\hat{c}^\dagger(1')\hat{c}^\dagger(2')}_{} \qquad \times g_{1'}(x_1)\gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2)\gamma^\beta f_2(x_2) \\
&\quad \left[\begin{array}{l} = -\langle 0|\,\hat{c}(1')\hat{c}^\dagger(1')\hat{c}(2')\hat{c}(2') \\ = \langle 0|\left[1-\hat{c}^\dagger(1')\hat{c}(1')\right]\left[1-\hat{c}^\dagger(2')\hat{c}(2')\right] \\ = -\langle 0| \end{array}\right] \\
&\quad \times \underbrace{\hat{c}(1)\hat{c}(2)\hat{c}^\dagger(2)\hat{c}^\dagger(1)\,|0\rangle}_{} \\
&\quad \left[\begin{array}{l} = \hat{c}(1)\hat{c}^\dagger(1)\hat{c}(2)\hat{c}(2)\,|0\rangle \\ = \left[1-\hat{c}^\dagger(1)\hat{c}(1)\right]\left[1-\hat{c}^\dagger(2)\hat{c}(2)\right]|0\rangle \\ = |0\rangle \end{array}\right] \\
&= -\left\langle 0 \left| g_{1'}(x_1)\gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2)\gamma^\beta f_2(x_2) \right| 0 \right\rangle \\
&= -g_{1'}(x_1)\gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2)\gamma^\beta f_2(x_2),
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
&\left\langle f \left| \hat{S}^{(2)}(2e^- \to 2e^-) \right| i \right\rangle = \\
&= \left\{ -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2\, g_{1'}(x_1)\gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2)\gamma^\beta f_2(x_2)\, iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2) \right\} \\
&\quad - \{1' \leftrightarrow 2'\} \qquad (7.18)
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Ausdrücke für die “direkte” und die “Austausch”-Amplitude gefunden, wobei die zwei Amplituden durch Austausch der Endzustände ineinander übergeführt werden können.

Ein identes Ergebnis folgt in der nicht relativistischen Quantenmechanik aus der Antisymmetrie der Fermionenwellenfunktionen aufgrund des Pauliprinzips. (Beispiel: Hartree-Fock Potential in der Festkörperphysik.) In der feldtheoretischen Behandlung ist die Antikommutativität der Fermifeldoperatoren ausschlaggebend.

Auch dieses Ergebnis kann wiederum verallgemeinert werden. Immer wenn der Endzustand mehrere idente Fermionen enthält, erhält man eine völlig antisymmetrische Übergangsamplitude. Enthält nun etwa $|i\rangle$ s Positronen in den Zuständen 1, 2, …, s, so wird der entsprechende S-Matrix Beitrag s nicht kontrahierte Operatoren $\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\cdots\hat{\bar{\psi}}(x_s)\right]$ enthalten. Jeder dieser Operatoren kann ein Positron im Zustand 1 (durch den $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}$ Anteil)

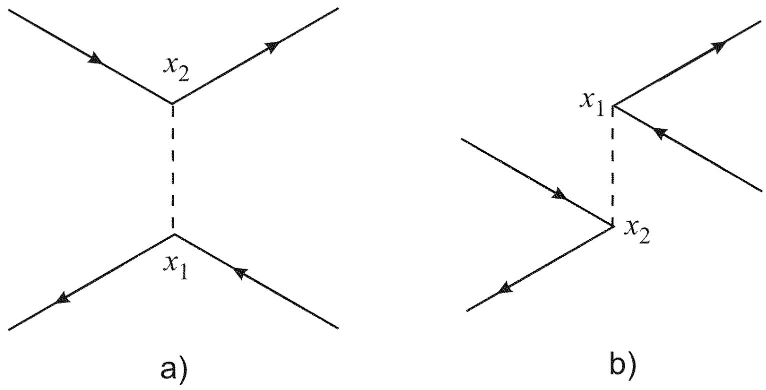


Abbildung 7.3: Die Feynman-Graphen zur Bhabha Streuung.

vernichten, usw. Dies gibt $s!$ Terme, welche in den Indizes $1, 2, \ldots$ völlig antisymmetrisch sind. Es folgt aber noch weitergehend, daß die Übergangsamplituden aufgrund der Eigenschaften des ψ-Operators antisymmetrisch in Bezug auf Elektronen-Anfangs- und Positronen-Endzustände (und umgekehrt) sein müssen.

Ein Beispiel hiefür ist die Elektron-Positron Streuung

$$e^+ + e^- \quad \to \quad e^+ + e^-,$$

welche auch *Bhabha - Streuung* genannt wird. Aus (7.6) folgt

$$\hat{S}^{(2)}(e^+e^- \to e^+e^-) = \hat{S}_a + \hat{S}_b$$

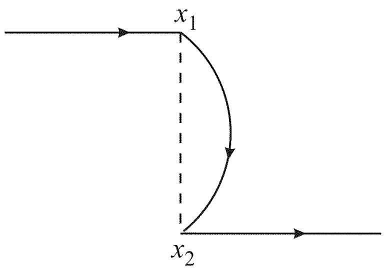
mit

$$\begin{aligned} \hat{S}_a &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\gamma^\alpha\hat{\psi}^{(+)}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\gamma^\beta\hat{\psi}^{(-)}\right)_{x_2}\right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ \hat{S}_b &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\gamma^\alpha\hat{\psi}^{(-)}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\gamma^\beta\hat{\psi}^{(+)}\right)_{x_2}\right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Die entsprechenden Graphen sind in Abb. 7.3 dargestellt. Der Graph a) stellt dabei die Streuung durch Photon-Austausch dar. In Graph b) hingegen wird das Anfangs-Elektron-Positron-Paar im Punkt x_2 zerstört und das End-Elektron-Positron-Paar im Punkt x_1 erzeugt.

Der Beitrag $\hat{S}_D^{(2)}$ nach Gleichung (7.7) besteht aus zwei nicht kontrahierten Fermionenfeldern und resultiert in zwei Prozessen, welche davon abhängen, ob das anfänglich vorhandene Fermion ein Elektron oder ein Positron ist. Für ein Elektron erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}^{(2)}(e^- \to e^-) = \\
&= \; -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_1)\gamma^\alpha \, iS_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta \hat{\psi}^{(+)}(x_2) \, iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\
&=
\end{aligned}
$$

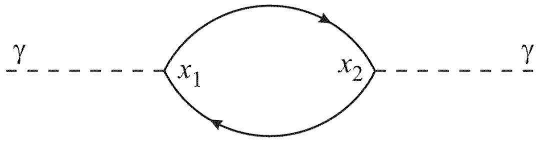


(7.20)

Dieses Diagramm stellt eine Modifikation der Eigenschaften des “nackten” Elektrons aufgrund seiner Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld dar. Es ist der erste Schritt in die Richtung einer Beschreibung eines reellen, geladenen Teilchens. Diese Wechselwirkung verändert die Energie des Systems - also die Masse des physikalischen Elektrons im Vergleich zu der des nackten Elektrons. Man bezeichnet dies daher auch als *Selbstenergie*. Das Integral (7.20) führt zu divergenten Beiträgen, welche man aber eliminieren kann, indem man die Eigenschaften des reellen Elektrons in die Theorie einbaut. Dieser Prozess wird *Renormalisierung* genannt.

Der Beitrag $\hat{S}_E^{(2)}$ nach Gleichung (7.8) hat zwei nicht kontrahierte Photonenfelder; wir schreiben:

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}^{(2)}(\gamma \to \gamma) = \\
&= \; -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}\, \hat{\not{A}}^{(-)} \hat{\psi}\right)_{x_1} \left(\hat{\bar{\psi}}\, \hat{\not{A}}^{(+)} \hat{\psi}\right)_{x_2}\right] \\
&=
\end{aligned}
$$



(7.21)

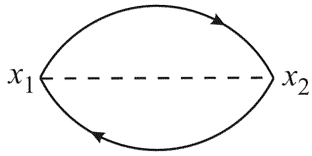
Externe elektromagnetische Felder können die Verteilung dieser virtuellen Elektron-Positron-Paare verändern, was in seiner Auswirkung ähnlich der Polarisation eines Dielektrikums ist. Man nennt daher diese Photon-Selbstenergiediagramme auch *Vakuumpolarisations-Graphen*.

Wir schreiben nun das Normalprodukt in (7.21) explizite an:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}_\lambda \hat{A\!\!\!/}^{(-)}_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}_\sigma \hat{A\!\!\!/}^{(+)}_{\sigma\tau}\hat{\psi}_\tau\right)_{x_2}\right] &= \\
&= (-1)\, \hat{\psi}_\tau(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\lambda(x_1)\, A\!\!\!/^{(-)}_{\lambda\mu}(x_1)\, \hat{\psi}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\sigma(x_2)\, A\!\!\!/^{(+)}_{\sigma\tau}(x_2) \\
&= (-1)\mathrm{Tr}\left[iS_F(x_2 - x_1)\, A\!\!\!/^{(-)}(x_1) iS_F(x_1 - x_2)\, A\!\!\!/^{(+)}(x_2)\right], \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

mit $A\!\!\!/^{(-)}_{\lambda\mu}(x^\mu) = \gamma^\alpha_{\lambda\mu} A^{(-)}_\alpha(x^\mu)$, etc. Das Auftreten des Faktors (-1) in (7.22) ist typisch für *geschlossene Fermion-Schleifen.* Diese verlangen stets die Verschiebung eines Fermionoperators von einem Ende des Ausdrucks zum anderen, was stets mit einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen verbunden ist. Der Zusammenhang zwischen Spinsummen und Spur ist noch zu behandeln.

Schließlich haben wir noch den Beitrag $S_F^{(2)}$ nach (7.9). Er wird durch den Graph



dargestellt, welcher keine äußeren Linien zeigt. Er verursacht daher auch keine Übergänge und man kann zeigen, daß diese *Vakuumdiagramme* stets vernachläßigt werden können.

Dies vervollständigt unsere anfängliche Analyse der verschiedenen Beiträge, welche bei der Zerlegung von $\hat{S}^{(2)}$ in Normalprodukte auftreten. Wir haben dabei gesehen, daß diese Beiträge speziellen physikalischen Prozessen entsprechen, und daß die ohne Beweis eingeführten Feynman Graphen bei der Interpretation sehr hilfreich sein können.

Terme höherer Ordnung in der S-Matrix Entwicklung führen zu keinen neuen Phänomenen und somit wurden die Grundzüge der Feynmanschen Diagrammtechnik in der S-Matrix Entwicklung ausreichend behandelt.

7.2 Feynman Diagramme im Impulsraum

Wir haben im letzten Abschnitt die Technik entwickelt, wie man den S-Matrix Operator ableitet, welcher einen speziellen Übergang $|i\rangle \to |f\rangle$ in einer vorgebenen Ordnung beschreibt. Die Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ sind dabei durch Teilchen mit bekanntem Impuls, Spin und Polarisationseigenschaften definiert. Die explizite Berechnung der Matrixelemente führt dann zu einer Neuinterpretation der Feynman Graphen im Impulsraum, welche hier diskutiert werden soll. Wir werden dabei sehen, daß diese Graphen in enger Beziehung zu den mathematischen Ausdrücken stehen, welche sie repräsentieren. Wir werden schließlich einen Regelsatz angeben, welcher es gestatten wird die Übergangsmatrixelemente direkt aus dem Graph 'abzuleiten', ohne daß detailierte Berechnungen erforderlich sind.

Die Berechnung der Matrixelemente mit $|i\rangle$ und $|f\rangle$ als Impuls-Eigenzustände spezifiziert, entspricht im wesentlichen einer Fouriertransformation der Felder in den Impulsraum, damit die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren herausgegriffen werden können. Für die Propagatoren gilt

$$\underbrace{\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}}(x_2) = iS_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, iS_F(p^\mu)e^{-ip^\mu(x_1-x_2)_\mu} \tag{7.23}$$

nach (4.32) mit

$$S_F(p^\mu) = \frac{\not{p} + m_0}{p^\mu p_\mu - m_0^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon}, \tag{7.24}$$

sowie

$$\underbrace{\hat{A}^\alpha(x_1)\hat{A}}^\beta(x_2) = iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, iD_F^{\alpha\beta}(k^\mu)e^{-ik^\mu(x_1-x_2)_\mu} \tag{7.25}$$

entsprechend (5.47) mit

$$D_F^{\alpha\beta} = -\frac{g^{\alpha\beta}}{k^\mu k_\mu + i\varepsilon}. \tag{7.26}$$

Schließlich benötigen wir noch die Fourierentwicklung der nicht kontrahierten Felder $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$ und $\hat{A}_\alpha$, welche durch

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(x^\mu) &= \hat{\psi}^{(+)}(x^\mu) + \hat{\psi}^{(-)}(x^\mu) \\
&= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{c}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ip_\mu x^\mu}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{\psi}}(x^\mu) &= \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x^\mu) + \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x^\mu) \\
&= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{d}_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})e^{ip_\mu x^\mu}\right],
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{A}_\alpha(x^\mu) &= \hat{A}_\alpha^{(+)}(x^\mu) + \hat{A}_\alpha^{(-)}(x^\mu) \\ &= \sum_{r,\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_\mathbf{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\varepsilon_{\alpha r}(\mathbf{k})\hat{a}_r(\mathbf{k})e^{-ik^\mu x_\mu} + \varepsilon_{\alpha r}(\mathbf{k})\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})e^{ik^\mu x_\mu}\right].\end{aligned}$$

gegeben sind. Die Wirkung der nicht kontrahierten Operatoren $\hat{\psi}^{(+)}$, $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}$ und $\hat{A}_\alpha^{(+)}$, wie sie in der S-Matrix Entwicklung auftreten, in ihrer Wirkung auf $|i\rangle$ besteht darin, den Vakuumzustand $|0\rangle$ wiederherzustellen:

(i) $|i\rangle$ ist durch ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}$ und Spin r gegeben:

$$|i\rangle = \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle = \left|e^-\,\mathbf{p}, r\right\rangle, \quad r = 1, 2.$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^{(+)}(x^\mu)\,|i\rangle &= \hat{\psi}^{(+)}(x^\mu)\left|e^-\,\mathbf{p}, r\right\rangle = \hat{\psi}^{(+)}(x^\mu)\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle \\ &= \sum_{r',\mathbf{p}'}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}'}}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')u_{r'}(\mathbf{p}')e^{-ip'_\mu x^\mu}\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle \\ &= \sum_{r',\mathbf{p}'}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}'}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{r'}(\mathbf{p}')e^{-ip'_\mu x^\mu}\left[\delta_{r,r'}\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} - \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\right]|0\rangle,\end{aligned}$$

also

$$\hat{\psi}^{(+)}(x^\mu)\left|e^-\,\mathbf{p}, r\right\rangle = \left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} u_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}\,|0\rangle, \quad r = 1, 2. \tag{7.27}$$

(ii) $|i\rangle$ ist durch ein Positron mit Impuls $\mathbf{p}$ und Spin r gegeben:

$$|i\rangle = \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle = \left|e^+\,\mathbf{p}, r\right\rangle, \quad r = 1, 2.$$

Es folgt nach analoger Rechnung:

$$\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x^\mu)\left|e^+\,\mathbf{p}, r\right\rangle = \left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}\,|0\rangle, \quad r = 1, 2. \tag{7.28}$$

(iii) $|i\rangle$ ist durch ein Photon mit Impuls $\mathbf{k}$ und Polarisation r gegeben:

$$|i\rangle = \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle = |\gamma\,\mathbf{k}, r\rangle.$$

Dann ergibt sich:

$$\hat{A}_\alpha^{(+)}(x^\mu)\,|\gamma\,\mathbf{k}, r\rangle = \left(\frac{1}{2\Omega\omega_\mathbf{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\alpha r}e^{-ik^\mu x_\mu}\,|0\rangle, \quad r = 1, \ldots, 4. \tag{7.29}$$

Analog finden wir für die Wirkung der nicht kontrahierten Operatoren $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}$, $\hat{\psi}^{(-)}$ und $\hat{A}_\alpha^{(-)}$ auf den Vakuumzustand $|0\rangle$, daß der Endzustand $|f\rangle$ hergestellt wird:

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x^\mu)\,|0\rangle &= \sum_{r,\mathbf{p}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})e^{ip^\mu x_\mu}\,|0\rangle \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}_r(\mathbf{p})e^{ip^\mu x_\mu}\,\left|e^-\,\mathbf{p},r\right\rangle \qquad (7.30)\\ \hat{\psi}^{(-)}(x^\mu)\,|0\rangle &= \sum_{r,\mathbf{p}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}}v_r(\mathbf{p})e^{ip^\mu x_\mu}\,\left|e^+\,\mathbf{p},r\right\rangle \qquad (7.31)\\ \hat{A}_\alpha^{(-)}(x^\mu)\,|0\rangle &= \sum_{r,\mathbf{k}}\left(\frac{1}{2\Omega\omega_\mathbf{k}}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\alpha r}e^{ik^\mu x_\mu}\,|\gamma\,\mathbf{k},r\rangle\,. \qquad (7.32)\end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen können auch unmittelbar die Ausdrücke für Zustände abgeleitet werden, welche mehrere Teilchen enthalten.

7.2.1 Beiträge erster Ordnung zu $\hat{S}$

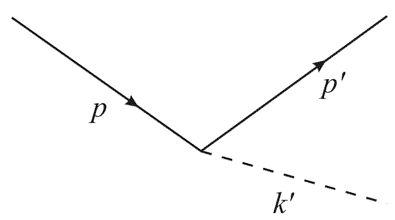
Wir wollen nun, als Beispiel, einen Beitrag, welcher aus

$$\hat{S}^{(1)} = ie\int d^4x\,\mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}\,\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right]_x$$

resultiert, berechnen. Wir bestimmen dazu das Matrixelement $\left\langle f\left|\hat{S}_a^{(1)}\right|i\right\rangle$ für Elektronenstreuung unter Emission eines Photons, um die Methode zu demonstrieren. Wir haben also den folgenden Übergang:

$$\begin{aligned}|i\rangle &= \left|e^-\,\mathbf{p}\right\rangle = \hat{c}^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle \qquad (7.33a)\\ |f\rangle &= \left|e^-\,\mathbf{p}';\gamma\,\mathbf{k}'\right\rangle = \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}')\,\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\,|0\rangle\,, \qquad (7.33b)\end{aligned}$$

was auch graphisch durch



dargestellt werden kann. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
\left\langle f \left| \hat{S}_a^{(1)} \right| i \right\rangle &= \left\langle e^- \, \mathbf{p}'; \gamma \, \mathbf{k}' \left| ie \int d^4x \, \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x^\mu) \gamma^\alpha \hat{A}_\alpha^{(-)}(x^\mu) \hat{\psi}^{(+)}(x^\mu) \right| e^- \, \mathbf{p} \right\rangle \\
&= \langle 0 | \, \hat{c}(\mathbf{p}') \hat{a}(\mathbf{k}') \, ie \int d^4x \sum_{\mathbf{p}''} \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}'') \bar{u}(\mathbf{p}'') e^{ip''^\mu x_\mu} N_{\mathbf{p}''} \gamma^\alpha \\
&\quad \times \sum_{\mathbf{k}''} N_{\mathbf{k}''} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}'') \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}'') e^{ik''^\mu x_\mu} \\
&\quad \times \sum_{\mathbf{p}'''} N_{\mathbf{p}'''} \hat{c}(\mathbf{p}''') u(\mathbf{p}''') e^{-ip'''^\mu x_\mu} \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}) \, |0\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}'', \mathbf{p}'', \mathbf{p}'''} N_{\mathbf{k}''} N_{\mathbf{p}''} N_{\mathbf{p}'''} \, \langle 0 | \, \hat{c}(\mathbf{p}') \hat{a}(\mathbf{k}') \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}'') \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}'') \\
&\quad \times ie \int d^4x \, \bar{u}(\mathbf{p}'') e^{ip''^\mu x_\mu} \gamma^\alpha \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}'') e^{ik''^\mu x_\mu} u(\mathbf{p}''') e^{-ip'''^\mu x_\mu} \\
&\quad \times \hat{c}(\mathbf{p}''') \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}) \, |0\rangle \, .
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \, \hat{c}(\mathbf{p}') \hat{a}(\mathbf{k}') \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}'') \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}'') &= \langle 0 | \left[\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}''} - \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}'') \hat{c}(\mathbf{p}') \right] \left[\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}'') \hat{a}(\mathbf{k}') \right] \\
&= \langle 0 | \, \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}''} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \, , \\
\hat{c}(\mathbf{p}''') \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}) \, |0\rangle &= \left[\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'''} - \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{c}(\mathbf{p}''') \right] |0\rangle \\
&= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'''} \, |0\rangle \, ,
\end{aligned}$$

wobei der Elektronenspin erhalten bleibt und deshalb nicht gesondert angeschrieben wurde. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}
\left\langle f \left| \hat{S}_a^{(1)} \right| i \right\rangle &= ie \int d^4x \, \left[N_{\mathbf{p}'} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip'^\mu x_\mu} \right] \gamma^\alpha \left[N_{\mathbf{k}'} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') e^{ik'^\mu x_\mu} \right] \\
&\quad \times \left[N_{\mathbf{p}} u(\mathbf{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \right] . \qquad (7.34)
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck sind nur mehr die Exponentialfunktionen von x^μ abhängig, und wir schreiben:

$$\int d^4x \, \exp \left\{ i \left(p'^\mu + ik'^\mu - ip^\mu \right) x_\mu \right\} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p' + k' - p \right) . \qquad (7.35)$$

(Hier wurde angenommen, daß wir zum Limes $\Omega \to \infty$ übergehen und ein unendlich langes Zeitintervall beobachten, innerhalb welchem der Übergang stattfindet.) Zusammengefaßt ergibt dies schließlich

$$\left\langle f \left| \hat{S}_a^{(1)} \right| i \right\rangle = \mathcal{M} \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p' + k' - p \right) \left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\Omega \omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] , \qquad (7.36)$$

mit der *Feynman Amplitude*

$$\mathcal{M} = ie\bar{u}(\mathbf{p}')\, \not\epsilon(\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}')u(\mathbf{p}). \tag{7.37}$$

Die Deltadistribution (7.35) stellt die Viererimpulserhaltung $p = p' + k'$ sicher, was dazu geführt hat, daß wir in (7.37) $\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ gesetzt haben. In komplexeren Feynman Diagrammen wird dann eine solche δ-Distribution für jeden Vertex auftreten, was dann auch Viererimpulserhaltung für den Gesamtprozess bedeutet.

Für reelle Teilchen gilt nun

$$p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu = m_0^2; \qquad k'^\mu k'_\mu = 0,$$

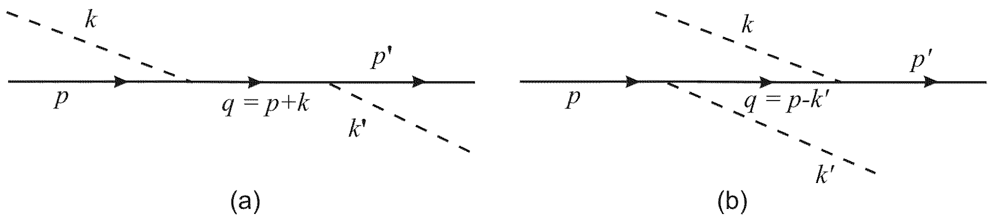
und dies wird nach (7.35) nur für $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ eingehalten. Es ist also der Endzustand gleich dem Anfangszustand. Für alle anderen Prozesse ist die Amplitude $\left\langle f \middle| \hat{S}_a^{(1)} \middle| i \right\rangle$ gleich Null. Gleiches kann man für alle anderen Beiträge zu $\hat{S}^{(1)}$ zeigen.

7.2.2 Die Comptonstreuung

Der zugehörige S-Matrixausdruck wurde bereits mit (7.10) angegeben. Es ist der folgende Übergang zu behandeln

$$|i\rangle = \hat{c}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle \quad \rightarrow \quad |f\rangle = \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}')\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\,|0\rangle \tag{7.38}$$

oder, folgend Abb. 7.1:



Wir beginnen mit dem Ausdruck $\hat{S}_a$ nach (7.11) und verwenden die bisher abgeleiteten Ergebnisse:

$$\begin{aligned}\left\langle f \middle| \hat{S}_a \middle| i \right\rangle &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \left[N_{\mathbf{p}'}\bar{u}(\mathbf{p}')e^{ip'x_1}\right] \left[N_{\mathbf{k}'}\ \not\epsilon(\mathbf{k}')e^{ik'x_1}\right] \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q\, iS_F(q^\mu)e^{-iq(x_1-x_2)} \\ &\quad \times \left[N_{\mathbf{k}}\ \not\epsilon(\mathbf{k})e^{-ikx_2}\right] \left[N_{\mathbf{p}}u(\mathbf{p})e^{-ipx_2}\right]. \end{aligned} \tag{7.39}$$

(Hier sind u und $\bar{u}$ vierkomponentige Spinoren, S_F und $\not{\epsilon}$ 4×4 Matrizen. Die Spinindizes sind zwar unterdrückt, man muß aber auf die korrekte Reihenfolge der Beiträge im Sinne der Matrizenalgebra achten.)

Die Integration über x_1 und x_2 ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x_1 \, \exp\{ix_1(p' + k' - q)\} \int d^4x_2 \, \exp\{ix_2(q - k - p)\} = \\
&= \; (2\pi)^4\delta^{(4)}(p' + k' - q)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(q - k - p) \\
&= \; (2\pi)^4\delta^{(4)}(p' + k' - p - k)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(q - p - k)\,.
\end{aligned}
\tag{7.40}
$$

Viererimpulserhaltung führt also zu einer Bedingung für den Viererimpuls des virtuellen Zwischenzustandes:

$$
q = k + p = p' + k'. \tag{7.41}
$$

Wenn wir (7.40) in (7.39) einsetzen, so erhalten wir zunächst:

$$
\begin{aligned}
\left\langle f \left| \hat{S}_a \right| i \right\rangle \;=\; & -e^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(p' + k' - p - k)\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}'}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\frac{1}{\Omega\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\Omega\omega_{\mathbf{k}'}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}')\,\not{\epsilon}(\mathbf{k}')\,\not{\epsilon}(\mathbf{k})u(\mathbf{p}) \\
& \times \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^4}\int d^4q\, iS_F(q^\mu)\delta^{(4)}(q - k - p).
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von

$$
\int d^4q\, iS_F(q^\mu)\delta^{(4)}(q - k - p) = iS_F(k + q)
$$

finden wir

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f \left| \hat{S}_a \right| i \right\rangle = \\
&= \; \mathcal{M}_a \left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p' + k' - p - k)\,\frac{m_0}{\Omega}\left(\frac{1}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}\right)^{\frac{1}{2}}\right],
\end{aligned}
\tag{7.42}
$$

mit

$$
\mathcal{M}_a = -e^2\bar{u}(\mathbf{p}')\,\not{\epsilon}(\mathbf{k}')iS_F(q = k + p)\,\not{\epsilon}(\mathbf{k})u(\mathbf{p}). \tag{7.43}
$$

Auf analoge Weise erhalten wir aus (7.12) einen Ausdruck der Form (7.42), in welchem aber $\mathcal{M}_a$ durch

$$
\mathcal{M}_b = -e^2\bar{u}(\mathbf{p}')\,\not{\epsilon}(\mathbf{k})iS_F(q = p - k')\,\not{\epsilon}(\mathbf{k}')u(\mathbf{p}). \tag{7.44}
$$

ersetzt wird.

Wir können einige allgemeine Eigenschaften sehen:

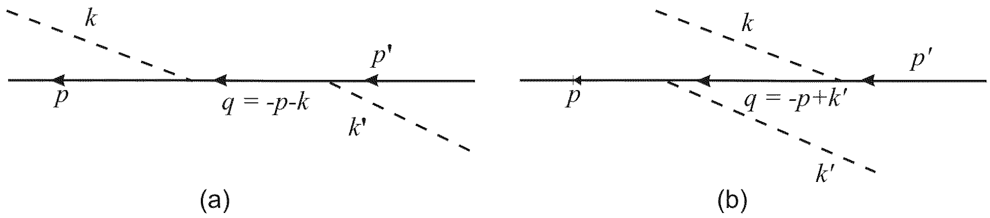


Abbildung 7.4: Compton-Streuung von Positronen.

1. Die Faktoren (7.43) und (7.44) sind in korrekter Spinorordnung. Durch Vergleich mit den Feynman Graphen sehen wir, daß die Folge der Fermionen-Linien in *Richtung der Pfeile* dem Anschreiben der Spinorfaktoren von *rechts nach links* entspricht.

2. Vergleichen wir (7.42) mit (7.36), so sehen wir, daß die eckigen Klammern eine Deltadistribution zur Viererimpulserhaltung enthalten. (Diese ist mit $(2\pi)^4$ multipliziert.) Für jede externe Photon- oder Elektronlinie treten Faktoren $\sqrt{1/2\Omega\omega_{\mathbf{k}}}$ und $\sqrt{m_0/\Omega E_{\mathbf{p}}}$ auf. Die Feynmanamplituden enthalten ferner einen Faktor (ie) für jeden Vertex und Faktoren $\bar{u}(\mathbf{p})$, $u(\mathbf{p})$ und $\not{\epsilon}(\mathbf{k})$, welche mit den äußeren Linien korreliert sind. Zusätzlich tritt in (7.42) der Faktor $iS_F(q)$ für den Fermionenzwischenzustand auf.

Diese Eigenschaften werden integraler Teil der Feynman Regeln zur Konstruktion von Feynman Diagrammen sein.

Es muß noch betont werden, daß in beiden Prozessen der Zwischenzustand *nicht* durch ein reelles Teilchen beschrieben wird, da $q^\mu q_\mu \neq m_0^2$ ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß man keinen Vertex mit drei reellen Teilchen bilden kann. Dies steht in Kontrast zur nicht kovarianten Theorie der nicht relativistischen Quantenmechanik, wo die Raum- und Zeitkoordinaten (und damit Energie und Impuls) unterschiedlich behandelt werden. In diesem Fall werden auch durch Zwischenzustandsteilchen die Energie-Impulsbeziehungen für reelle Teilchen erfüllt, die Energie wird aber von den Zwischenzuständen nicht erhalten, wohl aber der Impuls.

Wir betrachten abschließend die Compton-Streuung von Positronen, wie sie in Abb. 7.4 dargestellt ist. Für Diagramm (a) erhalten wir wieder das Ergebnis (7.42) mit $\mathcal{M}_a$ ersetzt durch

$$\mathcal{M}'_a = e^2 \bar{v}(\mathbf{p}) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(q = -p - k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}') v(\mathbf{p}').$$

In dieser Gleichung bezieht sich $v(\mathbf{p}')$ auf das Positron im Endzustand und der Bispinor $\bar{v}(\mathbf{p})$ auf das Positron im Anfangszustand. Die Ordnung der Spinfaktoren in dieser Gleichung entspricht also dem Anschreiben dieser Faktoren

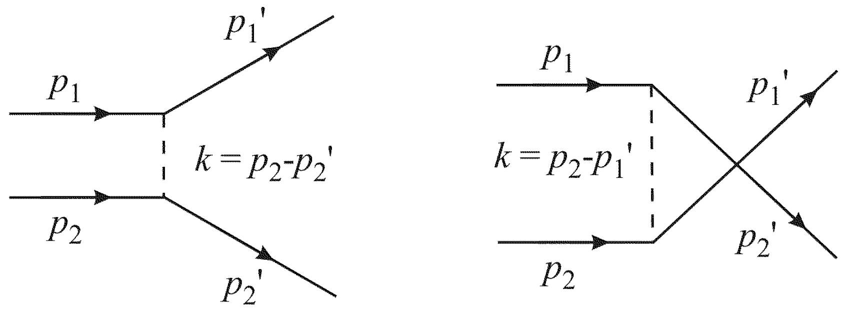


Abbildung 7.5: Feynman Diagramme zur Møller Streuung in Impulsdarstellung.

von rechts nach links, indem man der Pfeilrichtung der Fermionenlinien des Diagrammes folgt. Für die externen Elektronenlinien galt, daß der Fluß des Viererimpulses in dieselbe Richtung geht, wie sie durch die Pfeile angegeben wurde. Für externe Positronenlinien gilt genau das Gegenteil. Für interne Linien hingegen, entspricht der Fluß des Viererimpulses *stets* der Pfeilrichtung.

7.2.3 Die Møller Streuung

Die Diagramme folgen aus Gleichung (7.13). Wir beobachten folgenden Übergang:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \hat{c}^{\dagger}(\mathbf{p}_2)\hat{c}^{\dagger}(\mathbf{p}_1)\,|0\rangle = \left|e^- \, \mathbf{p}_1; e^- \, \mathbf{p}_2\right\rangle \\ |f\rangle &= \hat{c}^{\dagger}(\mathbf{p}_2')\hat{c}^{\dagger}(\mathbf{p}_1')\,|0\rangle = \left|e^- \, \mathbf{p}_1'; e^- \, \mathbf{p}_2'\right\rangle . \end{aligned}$$

Die zugehörigen Feynman Diagramme sind in Abb. 7.5 dargestellt. Das Ergebnis ist aus (7.19) abzulesen und wir erhalten durch explizites Einsetzen:

$$\begin{aligned} &\left\langle f \left| \hat{S}_a \right| i \right\rangle = \\ &= -e^2 \left\langle e^- \, \mathbf{p}_1'; e^- \, \mathbf{p}_2' \right| \iint d^4x_1 d^4x_2 \, \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_1)\gamma^{\alpha}\hat{\psi}^{(+)}(x_1) \\ &\quad \times iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x_2)\gamma^{\beta}\hat{\psi}^{(+)}(x_2)\left|e^- \, \mathbf{p}_1; e^- \, \mathbf{p}_2\right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^2 \langle 0|\, \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2') \iint d^4x_1 d^4x_2 \sum_{\mathbf{p}_1''} N_{\mathbf{p}_1''}\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1'')\bar{u}(\mathbf{p}_1'')e^{ip_1''x_1} \\
&\quad \times\gamma^\alpha \sum_{\bar{\mathbf{p}}_1} N_{\bar{\mathbf{p}}_1}\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_1)u(\bar{\mathbf{p}}_1)e^{-i\bar{p}_1x_1}\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\, D_{F\alpha\beta}(q)e^{-iq(x_1-x_2)} \\
&\quad \times\sum_{\mathbf{p}_2''} N_{\mathbf{p}_2''}\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2'')\bar{u}(\mathbf{p}_2'')e^{ip_2''x_2}\gamma^\beta \sum_{\bar{\mathbf{p}}_2} N_{\bar{\mathbf{p}}_2}\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_2)u(\bar{\mathbf{p}}_2)e^{-i\bar{p}_2x_2} \\
&\quad \times\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1)\,|0\rangle \\
&= -e^2 \sum_{\mathbf{p}_1''\mathbf{p}_2''}\sum_{\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2} \underbrace{\left\langle 0\,\middle|\,\hat{c}(\mathbf{p}_1')\hat{c}(\mathbf{p}_2')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1'')\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_1)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2'')\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1)\,\middle|\,0\right\rangle}_{=\,\mathrm{I}} \\
&\quad \times\frac{1}{(2\pi)^4}\underbrace{\iint d^4x_1 d^4x_2}_{=\,\mathrm{II}}\int d^4q \prod_{ext.}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}(\mathbf{p}_1'')\gamma^\alpha u(\bar{\mathbf{p}}_1)iD_{F\alpha\beta}(q) \\
&\quad \times\bar{u}(\mathbf{p}_2'')\gamma^\beta u(\bar{\mathbf{p}}_2)\underbrace{\exp\left\{ix_1\left(p_1''-\bar{p}_1+q\right)\right\}\exp\left\{ix_2\left(p_2''-\bar{p}_2+q\right)\right\}}_{=\,\mathrm{II}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= -\left\langle 0\,\middle|\,\hat{c}(\mathbf{p}_1')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1'')\hat{c}(\mathbf{p}_2')\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_1)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2'')\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1)\,\middle|\,0\right\rangle \\
&= \left\langle 0\,\middle|\,\hat{c}(\mathbf{p}_1')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1'')\hat{c}(\mathbf{p}_2')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2'')\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_1)\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1)\,\middle|\,0\right\rangle \\
&= \left\langle 0\,\middle|\,\hat{c}(\mathbf{p}_1')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1'')\hat{c}(\mathbf{p}_2')\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2'')\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_2)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{c}(\bar{\mathbf{p}}_1)\hat{c}^\dagger(\mathbf{p}_1)\,\middle|\,0\right\rangle \\
&= \delta_{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1''}\delta_{\mathbf{p}_2'\mathbf{p}_2''}\delta_{\bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{p}_2}\delta_{\bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{p}_1}\langle 0\,|\,0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1''-\bar{p}_1+q\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_2''-\bar{p}_2+q\right) \\
&\overset{(\mathrm{I})}{=} (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1'-p_1+q\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_2'-p_2+q\right) \\
&= (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1'-p_1+p_2'-p_2\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_2'-p_2+q\right).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, iD_{F\alpha\beta}(q)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_2'-p_2+q\right) = iD_{F\alpha\beta}(p_2-p_2'),
$$

und wir erhalten das Ergebnis

$$
\left\langle f\,\middle|\,\hat{S}_a\,\middle|\,i\right\rangle = \left[(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1'-p_1+p_2'-p_2\right)\prod_{ext.}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\mathcal{M}_a, \qquad (7.45)
$$

mit

$$
\mathcal{M}_a = -e^2\bar{u}(\mathbf{p}_1')\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1)iD_{F\alpha\beta}(k=p_2-p_2')\bar{u}(\mathbf{p}_2')\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2). \qquad (7.46)
$$

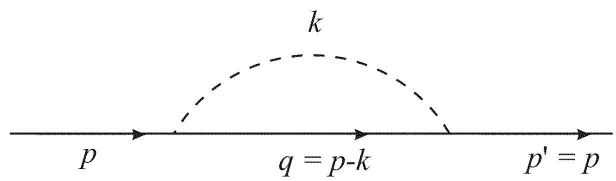


Abbildung 7.6: Feynman Diagramme zur Elektronenselbstenergie.

Der zweite mögliche Beitrag wird unmittelbar durch Vertauschung der Operatoren für die Endzustände gefunden und führt zum Ausdruck (7.45), wobei $\mathcal{M}_a$ durch

$$\mathcal{M}_b = +e^2 \bar{u}(\mathbf{p}_2')\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1')\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2) \tag{7.47}$$

zu ersetzen ist.

7.2.4 Selbstenergiebeiträge

Treten in Feynman Diagrammen geschlossene Schleifen auf, so werden neue Eigenschaften gefunden. Um dies zu demonstrieren betrachten wir die Elektronenselbstenergie für folgenden Prozess:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \hat{c}^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle = \left|e^-\ \mathbf{p}\right\rangle \\ |f\rangle &= \hat{c}^\dagger(\mathbf{p}')\,|0\rangle = \left|e^-\ \mathbf{p}'\right\rangle . \end{aligned}$$

Das zugehörige Feynman Diagramm ist in Abb. 7.6 dargestellt.

Wir wenden die nun bereits bekannten Methoden an und erhalten für das Matrixelement:

$$\begin{aligned} &\left\langle f \left| \hat{S}^{(2)}(e^- \to e^-) \right| i \right\rangle = \\ &= \ -e^2 \left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}'}}\right)^{\frac{1}{2}} \iint d^4q d^4k\, \delta^{(4)}(p' - k - q)\delta^{(4)}(k + q - p) \\ &\quad\ \times iD_{F\alpha\beta}(k)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\alpha iS_F(q)\gamma^\beta u(\mathbf{p}) \\ &= \ -\left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p' - p)\prod_{ext.}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\mathcal{M}, \end{aligned} \tag{7.48}$$

mit der Feynman Amplitude

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\, iD_{F\alpha\beta}(k)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\alpha iS_F(p - k)\gamma^\beta u(\mathbf{p}). \tag{7.49}$$

Die Feynman Amplitude enthält die Integration über alle internen Photon-Viererimpulse k^μ, wobei für jeden Wert von k^μ der Viererimpuls des internen Fermions durch $q = p - k$ bestimmt ist. Dies entspricht wiederum der Viererimpulserhaltung an den Vertices. Eine solche Integration in der Feynman Amplitude über einen internen Impuls ist typisch für geschlossene Schleifen in Feynman Diagrammen.

7.3 Die Feynman Regeln der QED

Wir haben in den vorgehenden Abschnitten gewisse Gesetzmäßigkeiten bei der Berechnung der Übergangsamplitude der S-Matrix festgestellt, welche nunmehr zusammengefaßt werden sollen.

Das Matrixelement ist durch

$$\left\langle f \left| \hat{S} \right| i \right\rangle = \delta_{fi} + \left[(2\pi)^4 \left(P_f - P_i \right) \prod_{ext} \left(\frac{m_0}{\Omega E} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{ext.} \left(\frac{1}{2\Omega\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M} \qquad (7.50)$$

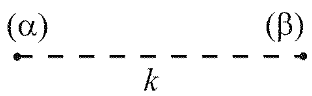
gegeben, mit P_i und P_f den totalen Viererimpulsen im Anfangs- und im Endzustand. Die Produkte gehen über alle externen Elektron-, Positron- und Photonlinien. Die Feynman Amplitude ergibt sich aus

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)}. \qquad (7.51)$$

$\mathcal{M}^{(n)}$ gewinnt man dabei durch das Zeichnen aller topologisch verschiedenen, zusammenhängenden Feynman Diagramme im Impulsraum, welche n Vertices und die erforderlichen externen Linien (durch Anfangs- und Endzustand bestimmt) enthalten. Man kann dann $\mathcal{M}^{(n)}$ aus folgenden Regeln erhalten.

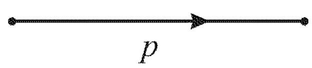
1. Für jeden Vertex gibt es einen Faktor $ie\gamma^\alpha$.

2. Für jede interne Photonenlinie erhält man den Beitrag:



$$iD_{F\alpha\beta}(k) = i\frac{-g^{\alpha\beta}}{k^\mu k_\mu + i\varepsilon}$$

3. Für jede interne Elektronenlinie erhält man den Beitrag:



$$iS_F(p) = i\frac{1}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon}$$

4. Für jede externe Linie:

   (i) Anfangselektron: $u_r(\mathbf{p})$

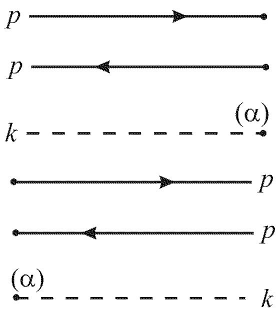
   (ii) Anfangspositron: $\bar{v}_r(\mathbf{p})$

   (iii) Anfangsphoton: $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$

   (vi) Endelektron: $\bar{u}_r(\mathbf{p})$

   (v) Endpositron: $v_r(\mathbf{p})$

   (vi) Endphoton: $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$



   mit $r = 1, 2$ als Spin oder Polarisationsindex, $\mathbf{k}$ und $\mathbf{p}$ bezeichnen den Dreierimpuls.

5. Die Spinorfaktoren (γ-Matrizen, S_F-Funktionen und Bispinoren) sind für jede Fermionenlinie so angeordnet, daß sie - gelesen von rechts nach links - in derselben Reihenfolge auftreten, wenn man der Fermionenlinie in Richtung der Pfeile folgt.

6. Für jede geschlossene Fermionenschleife wird die Spur gebildet und diese mit einem Faktor (-1) multipliziert. (Die Spurbildung selbst ist noch unbewiesen.)

7. Die Viererimpulse, welche zu den drei Linien gehören, welche sich in jedem Vertex treffen (eine Photonen- und zwei Fermionenlinien) befriedigen die Viererimpulserhaltung. Über jeden Viererimpuls q^μ, für welchen keine Viererimpulserhaltung gilt, ist die Integration $(2\pi)^{-4}\int d^4q$ auszuführen.

8. Multipliziere den Gesamtausdruck mit einem Phasenfaktor δ_p, welcher gleich $+1$ (-1) ist, entsprechend einer geraden (ungeraden) Vertauschung benachbarter Fermionenoperatoren, welche erforderlich ist um die korrekte Normalordnung zu erhalten. Im allgemeinen ist dieser Phasenfaktor nur von Bedeutung, wenn mehrere Feynman Diagramme addiert werden. Dann sind die relativen Vorzeichen von Bedeutung.

Es ist noch Punkt 7 zu rechtfertigen. Wir haben eigentlich bisher die auftretenden $(2\pi)^4$ Faktoren nicht berücksichtigt. Diese sind mit den $\delta^{(4)}(p)$-Distributionen verknüpft. Die x-Integration jedes Vertex führt zu einem Faktor $(2\pi)^4$ und die Fouriertransformierte jedes Propagators enthält einen Faktor $(2\pi)^{-4}$. Enthält das Feynman Diagramm n Vertices und f_i (b_i) innere Fermionen (Photonen)-Linien, so enthält die Feynman Amplitude einen Faktor

$$\left[(2\pi)^4\right]^{n-f_i-b_i-1}, \tag{7.52}$$

wobei der Exponent -1 daher kommt, daß ein Faktor $(2\pi)^4$ in (7.50) bereits herausgezogen wurde. Enthält nun das Feynman Diagramm l Schleifen, so kann man zeigen, daß

$$n - f_i - b_i - 1 = -l$$

ist. Es tritt für jede Schleife ein Integral $\int d^4q$ auf und wir können den Beitrag (7.52) zu jeder Feynman Amplitude unter der Voraussetzung fallen lassen, daß wir, wie in Punkt 7 angeführt, jedes Schleifenintegral $\int d^4q$ durch das Integral $(2\pi)^{-4}\int d^4q$ ersetzen.

7.4 Erweiterung der QED auf Leptonenprozesse

Bisher haben wir nur die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Positronen mit dem elektromagnetischen Feld untersucht. Es gibt aber noch viele weitere geladene Teilchen. Sie können in zwei Klassen eingeteilt werden: *Hadronen*, welche auch über die starken Kräfte (auch Kernkräfte genannt) wechselwirken können (*starke Wechselwirkung*), und *Leptonen*, welche nicht über Kernkräfte wechselwirken. Teilchen beider Klassen zeigen aber *schwache* und elektromagnetische Wechselwirkung.

Elektronen und Positronen ($e^{\pm}$) sind Leptonen, wie auch die *Muonen* ($\mu^{\pm}$) und die *Tauonen* ($\tau^{\pm}$). Alle haben Spin $\pm\frac{1}{2}$ und Ladung $\pm e$. Muonen und Tauonen zeigen weiters alle Eigenschaften, welche auch Elektronen besitzen. Der einzige Unterschied zwischen diesen Teilchen besteht in der Teilchenmasse: $m_e = 0.511\,\text{MeV}$, $m_\mu = 206.8\,m_e = 105.7\,\text{MeV}$ und $m_\tau = (1784 \pm 3)\,\text{MeV}$ und in der unterschiedlichen Lebensdauer der Teilchen. (Man spricht von der $e - \mu - \tau$ Universaltität.) Ob es noch weitere Leptonen gibt ist bis heute ungeklärt. Experimente zeigen aber, daß bis zu Massen von $\sim 15\,\text{GeV}$ keine weiteren Leptonen existieren.

Auf Basis dieser Universalität ist die Erweiterung der QED geradezu trivial. Wir beschreiben jedes Lepton durch ein Diracsches Bispinorfeld $\psi_\ell(x^\mu)$, mit ℓ als Index für das Lepton: $\ell = e, \mu, \tau$. Wir verallgemeinern die Lagrangedichte des freien Elektronenfeldes (E.23) auf

$$\mathcal{L} = \sum_\ell \bar{\psi}_\ell(x^\mu)\,[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0]\,\psi_\ell(x^\mu) \tag{7.53}$$

und mit

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \to \qquad D_\mu = [\partial_\mu + iqA_\mu(x^\mu)]$$

erhalten wir nun (nach üblicher Quantisierung) den Wechselwirkungshamiltonoperator:

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu) = -e \sum_\ell \mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}_\ell(x^\mu)\, \hat{\not{A}}(x^\mu) \hat{\psi}_\ell(x^\mu)\right]. \tag{7.54}$$

Dies beschreibt wieder eine *lokale* Wechselwirkung, was für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Punktteilchen zulässig ist. Dies trifft im Rahmen der derzeitigen experimentellen Möglichkeiten auf Leptonen zu, nicht aber auf Hadronen. (So hat etwa das Proton einen Radius von 0.8×10^{-15} m.) Weiters ist an (7.54) noch bemerkenswert, daß der Hamiltonoperator aus einer Summe von Beiträgen besteht, von denen jeder nur Leptonen einer Sorte enthält. Es werden daher wieder die bereits besprochenen Grundvertices auftreten, wobei sich beide Fermionenlinien auf *einen* Leptonentyp beziehen. Es ist somit eine Umwandlung eines Leptons in ein Lepton eines anderen Typs nicht möglich. Somit gilt, daß für jedes von Null verschiedene Matrixelement $\left\langle f \middle| \hat{\mathcal{H}}_I \middle| i \right\rangle$ die Leptonenzahl erhalten bleibt:

$$N(\ell) = N(\ell^-) + N(\ell^+) = \text{konst.}, \quad \ell = e, \mu, \tau. \tag{7.55}$$

Somit sind Prozesse wie etwa

$$e^- + \mu^+ \quad \to \quad e^+ + \mu^-$$

verboten, obwohl die Gesamtladung erhalten bleibt. Solche Prozesse wurden auch bisher noch nicht beobachtet.

Wir können nun leicht Gleichung (7.1) auf die neuen Verhältnisse erweitern:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \sum_{\ell_1} \cdots \sum_{\ell_n} \\ &\quad \times \mathcal{T}\left[\mathcal{N}\left(\hat{\bar{\psi}}_{\ell_1} \hat{\not{A}} \hat{\psi}_{\ell_1}\right)_{x_1} \cdots \mathcal{N}\left(\hat{\bar{\psi}}_{\ell_n} \hat{\not{A}} \hat{\psi}_{\ell_n}\right)_{x_n}\right]. \end{aligned}$$

Neue Prozesse entstehen nur, wenn mehr als eine Leptonenart involviert ist, was erstmals bei Termen zweiter Ordnung möglich ist. Hier finden wir etwa für $\ell_1 = \mu$ und $\ell_2 = e$:

$$\hat{S}^{(2)}_{\mu e} = -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{T}\left[\mathcal{N}\left(\hat{\bar{\psi}}_\mu \hat{\not{A}} \hat{\psi}_\mu\right)_{x_1} \mathcal{N}\left(\hat{\bar{\psi}}_e \hat{\not{A}} \hat{\psi}_e\right)_{x_2}\right].$$

Man verwendet nun das Wicksche Theorem um das zeitgeordnete Produkt zu entwickeln. Wir erhalten:

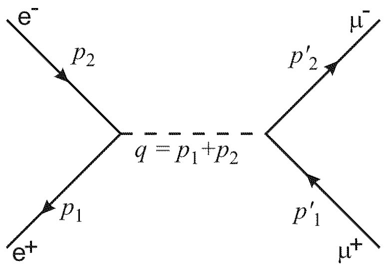
$$\begin{aligned} \hat{S}^{(2)}_{\mu e} &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}_\mu \hat{\not{A}} \hat{\psi}_\mu\right)_{x_1} \left(\hat{\bar{\psi}}_e \hat{\not{A}} \hat{\psi}_e\right)_{x_2}\right] \\ &\quad -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}_\mu \hat{\not{A}} \hat{\psi}_\mu\right)_{x_1} \left(\hat{\bar{\psi}}_e \hat{\not{A}} \hat{\psi}_e\right)_{x_2}\right]. \end{aligned} \tag{7.56}$$

Alle anderen Kontraktionen zu unterschiedlichen Zeiten verschwinden aufgrund der Definition der Kontraktion als Vakuumerwartungswert.

Der erste Term von (7.56) entspricht, wie auch schon früher $\hat{S}_A^{(2)}$ entsprechend Gleichung (7.4) zwei unabhängigen, unphysikalischen Prozessen, von denen einer ein Elektronen- und der andere ein Muonenprozess ist. Der zweite Term von (7.56) führt zu Prozessen, welche zwei externe Muonen und zwei externe Elektronen involviert. Es muß Ladung, Muonen- und Elektronenzahl erhalten bleiben. Dies inkludiert Elektron-Muon Streuung nach Art der Møller-Streuung und, wesentlich interessanter, den Prozess

$$e^+ + e^- \quad \rightarrow \quad \mu^+ + \mu^-,$$

also der Vernichtung eines $(e^+\, e^-)$-Paares, welche zur Erzeugung eines $(\mu^+\, \mu^-)$-Paares führt:



Für diesen Prozess ist der S-Matrix Beitrag

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\mu e}^{(2)}(e^+\, e^- \to \mu^+\, \mu^-) &= -e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2\, \mathcal{N}\left[\left(\hat{\bar{\psi}}_\mu^{(-)} \gamma^\alpha \hat{\psi}_\mu^{(-)}\right)_{x_1}\right. \\ &\quad \left. \times \left(\hat{\bar{\psi}}_e^{(+)} \gamma^\beta \hat{\psi}_e^{(+)}\right)_{x_2}\right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

verantwortlich. Die Anfangs- und Endzustände sind durch

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \left|e^-\, \mathbf{p}_2;\, e^+\, \mathbf{p}_1\right\rangle = \hat{c}_e^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{c}_e^\dagger(\mathbf{p}_1)\,|0\rangle \\ |f\rangle &= \left|\mu^-\, \mathbf{p}_2';\, \mu^+\, \mathbf{p}_1'\right\rangle = \hat{c}_\mu^\dagger(\mathbf{p}_2')\hat{c}_\mu^\dagger(\mathbf{p}_1')\,|0\rangle \end{aligned}$$

gegeben und man erhält die Feynman Amplitude

$$\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = -ie^2\bar{u}_\mu(\mathbf{p}_2')\gamma^\alpha v_\mu(\mathbf{p}_1')D_{F\alpha\beta}(q = p_1 + p_2)\bar{v}_e(\mathbf{p}_1)\gamma^\beta u_e(\mathbf{p}_2).$$

Der hier verwendete Graph ist durchaus ähnlich dem Graphen b) aus Abbildung 7.3, wenn man die im Punkt x_1 einlaufenden Elektronenlinien durch

Muonenlinien ersetzt. Ein Beitrag, wie er im Graphen a) von Abb. 7.3 dargestellt ist, entspräche dem Ersatz der End-Elektronenlinien durch Muonlinien, was aber wegen der Erhaltung der Leptonenzahl ausdrücklich verboten ist.

Damit sind nun die Regeln der QED, wie sie in Abschnitt 7.3 festgelegt wurden, leicht erweiterbar: man zeichnet alle relevanten, topologisch unterschiedlichen Feynman Diagramme, welche in jedem Vertex die Leptonenzahl erhalten, was letztlich bedeutet, daß die zwei Fermionenlinien, welche in den Vertex münden derselben Leptonenart zugeordnet sein müssen. Alle anderen Regeln bleiben unverändert.