Kapitel 8

Berechnung von Wirkungsquerschnitten

Wir wollen nun von den Übergangsmatrixelementen S_{fi} experimentell beobachtbare Größen ableiten, die *Wirkungsquerschnitte*. Dabei waren die Photonen und Leptonen im Anfangs- und Endzustand in definierten Polarisationszuständen, was bei Fermionen einem bestimmten Spinzustand entspricht. In der Regel ist aber der Teilchenstrahl kollidierender Teilchen nicht polarisiert und die Polarisation der Teilchen, welche bei der Kollision erzeugt werden, wird nicht beobachtet. Es wird also notwendig sein über Polarisationszustände im Anfangs- und Endzustand zu summieren und zu mitteln. Hiezu wird es notwendig sein, entsprechende Techniken zu entwickeln.

8.1 Streuung von Elektronen an einem schweren Kern

Wir entwickeln das Konzept des Streuquerschnittes aus dem Prozess der Streuung von Elektronen an einem schweren Kern. Dieser wird als festes Streuzentrum betrachtet, seine Position im Phasenraum wird durch den Streuprozess nicht beeinflußt. Wir haben somit die in Abb. 8.1 dargestellte Situation. Die Kernladungszahl sei Ze und die Ladungsverteilung beschreiben wir durch die Dichtefunktion $Ze\rho(\mathbf{r})$, wobei $\rho(\mathbf{r})$ normiert sei:

$$\int d^3r\,\rho(\mathbf{r}) = 1.$$

Diese Ladung erzeugt ein Potential $\phi(\mathbf{r})$, welches der Poissongleichung

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -Ze\rho(\mathbf{r}) \tag{8.1}$$

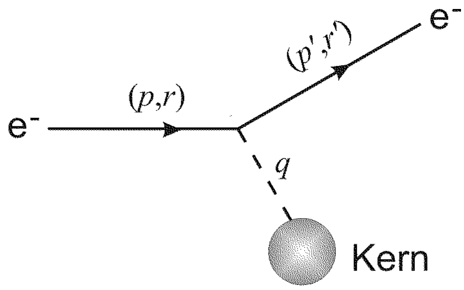


Abbildung 8.1: Streuung eines Elektrons an einem schweren Kern.

genügt. Die Streuung der Elektronen an diesem Potential soll nun studiert werden.

Wir bedienen uns hiezu der Wechselwirkungsdarstellung. In dieser genügen die Operatoren den freien Bewegungsgleichungen, während die Zeitentwicklung der Zustände durch den Wechselwirkungs-Hamiltonoperator $\hat{H}_I(t)$ beschrieben wird:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = \hat{H}_I(t)\,|t\rangle\,. \tag{8.2}$$

Dieser Zustand $|t\rangle$ muß für $t = -\infty$ dem 'einlaufenden' Zustand entsprechen, also

$$\lim_{t=-\infty}|t\rangle = \left|e^-\,\mathbf{p}, r\right\rangle, \tag{8.3}$$

und dies ist zugleich auch die Anfangsbedingung von (8.2). Zur Zeit $t = \infty$ wird man einen anderen Zustand auffinden, da aber (8.2) eine lineare Differentialgleichung für den Zustandsvektor ist, so muß der Zusammenhang zwischen dem Anfangs- und Endzustand ein linearer sein. Wir schreiben:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}|t\rangle &= |i\rangle \\ \lim_{t\to\infty}|t\rangle &= \hat{S}\,|i\rangle\,,\end{aligned} \tag{8.4}$$

mit dem linearen Operator $\hat{S}$. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür einen bestimmten Zustand $|f\rangle$ nach der Streuung aufzufinden ist dann durch

$$\langle f\,|\,t=\infty\rangle = \left\langle f\,\middle|\,\hat{S}\,\middle|\,i\right\rangle = S_{fi} \tag{8.5}$$

gegeben, wobei $\hat{S}$ die bereits eingeführte S-Matrix ist.

Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator ist im vorliegenden Fall durch

$$\hat{H}_I(t) = -e\int d^3r\,\hat{\bar{\psi}}(\mathbf{r},t)\gamma^0\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r}) \tag{8.6}$$

gegeben; eine exakte Lösung der Differentialgleichung (8.2) ist aber nicht möglich. Wir schreiben (8.2) zunächst in eine Integralgleichung um:

$$|t\rangle = |i\rangle - i \int_{-\infty}^{t} dt' \, \hat{H}_I(t') \, |t'\rangle \, ,$$

und beschränken uns auf die *erste Bornsche Näherung*

$$|t = \infty\rangle \simeq |i\rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \hat{H}_I(t') \, |t'\rangle \, . \tag{8.7}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \langle f \, | \, t = \infty \rangle &= S_{fi} \\ &\simeq \langle f \, | \, i \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\langle f \, \middle| \, \hat{H}_I(t') \, \middle| \, i \right\rangle \\ &= \delta_{fi} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\langle f \, \middle| \, \hat{H}_I(t') \, \middle| \, i \right\rangle . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Für $\hat{H}_I(t)$ setzen wir jetzt (8.6) ein und verwenden

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \left| e^- \, \mathbf{p}, r \right\rangle = \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \, |0\rangle \\ |f\rangle &= \left| e^- \, \mathbf{p}', r' \right\rangle = \hat{c}_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \, |0\rangle \, , \end{aligned}$$

und interessieren uns nur für gestreute Zustände $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int dt \left\langle e^- \, \mathbf{p}', r' \middle| (-e) \int d^3r \, \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{r}, t) \gamma^0 \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}) \middle| e^- \, \mathbf{p}, r \right\rangle \\ &= ie \int dt d^3r \sum_{\mathbf{p}_2, s'} N_{\mathbf{p}_2} \, \langle 0 | \, \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \left\{ e^{ip_2x} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}_2) \hat{c}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}_2) \right. \\ &\quad \left. + e^{-ip_2x} \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}_2) \hat{d}_{s'}(\mathbf{p}_2) \right\} \gamma^0 \sum_{\mathbf{p}_1, s} N_{\mathbf{p}_1} \left\{ e^{ip_1x} v_s(\mathbf{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p}_1) \right. \\ &\quad \left. + e^{-ip_1x} u_s(\mathbf{p}_1) \hat{c}_s(\mathbf{p}_1) \right\} \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \, |0\rangle \, \phi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Wir konzentrieren uns auf die Operatoren im Integranden:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 s s'} \left\langle 0 \middle| \left[\hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \hat{c}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}_2) + \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \hat{d}_{s'}(\mathbf{p}_2) \right] \left[\hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) + \hat{c}_s(\mathbf{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \right] \middle| 0 \right\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 s s'} \langle 0 | \left[\hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \hat{c}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}_2) \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) + \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \hat{c}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}_2) \hat{c}_s(\mathbf{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \hat{d}_{s'}(\mathbf{p}_2) \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) + \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}') \hat{d}_{s'}(\mathbf{p}_2) \hat{c}_s(\mathbf{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \right] |0\rangle \, . \end{aligned}$$

Dies ergibt, einzeln ausgewertet

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0 \left| \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\hat{c}^\dagger_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{d}^\dagger_s(\mathbf{p}_1)\hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p}) \right| 0 \right\rangle = \\
&= \left\langle 0 \right| \left[\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_2}\delta_{r',s'} - \hat{c}^\dagger_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\right] \hat{d}^\dagger_s(\mathbf{p}_1)\hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p}) \left| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \hat{c}^\dagger_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\hat{d}^\dagger_s(\mathbf{p}_1)\hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p}) \right| 0 \right\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0 \left| \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\hat{c}^\dagger_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{c}_s(\mathbf{p}_1)\hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p}) \right| 0 \right\rangle = \\
&= \left\langle 0 \right| \left[\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_2}\delta_{r',s'} - \hat{c}^\dagger_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\right] \left[\delta_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}}\delta_{r,s} - \hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p})\hat{c}_s(\mathbf{p}_1)\right] \left| 0 \right\rangle \\
&= \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_2}\delta_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}}\delta_{r',s'}\delta_{r,s}\langle 0 \,|\, 0\rangle,
\end{aligned}$$

$$\left\langle 0 \left| \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\hat{d}_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{d}^\dagger_s(\mathbf{p}_1)\hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p}) \right| 0 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle 0 \left| \hat{c}_{r'}(\mathbf{p}')\hat{d}_{s'}(\mathbf{p}_2)\hat{c}_s(\mathbf{p}_1)\hat{c}^\dagger_r(\mathbf{p}) \right| 0 \right\rangle = 0,$$

und es bleibt:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= ie \int d^4x\, e^{ip'^\mu x_\mu} e^{-ip^\mu x_\mu} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\phi(\mathbf{r}) N_\mathbf{p} N_{\mathbf{p}'} \\
&= ie \int dt d^3r\, \phi(\mathbf{r}) e^{it(p'^0 - p^0)} e^{-i\mathbf{r}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})}\, \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p}) N_\mathbf{p} N_{\mathbf{p}'} \\
&= ie 2\pi\delta(p'^0 - p^0) \int d^3r\, \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{r}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})}\, \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p}) N_\mathbf{p} N_{\mathbf{p}'}. \quad (8.9)
\end{aligned}$$

Für das ein- und auslaufende Elektron stehen die Bispinoren $u_r(\mathbf{p})$ und $\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')$. Die δ-Distribution stellt sicher, daß das gestreute Elektron die selbe Energie hat wie das einlaufende, was zu fordern war, da das statische Potential $\phi(\mathbf{r})$ weder Energie aufnehmen noch abgeben kann.

Das Fourierintegral des Potentiales kann man mit Hilfe der Poissongleichung umformen. Dazu führen wir den Impulsübertrag

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

ein und schreiben:

$$\begin{aligned}
\int d^3r\, \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{kr}} &= -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \int d^3r\, \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 e^{i\mathbf{kr}} \\
&= -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \int d^3r\, e^{i\mathbf{kr}} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) \\
&\overset{(8.1)}{=} -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \int d^3r\, e^{i\mathbf{kr}} Ze\rho(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Schließlich führen wir den *Formfaktor*

$$F(\mathbf{k}) = \int d^3r\, \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{kr}} \tag{8.10}$$

ein und finden für S_{fi}:

$$S_{fi} = ie2\pi\delta(p'^0 - p^0)\frac{Ze}{\mathbf{k}^2}F(\mathbf{k})\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})N_{\mathbf{p}}N_{\mathbf{p}'}. \tag{8.11}$$

Im nächsten Schritt soll die Übergangswahrscheinlichkeit und der Streuquerschnitt bestimmt werden. Dazu wollen wir annehmen, daß das einfallende Elektron nicht spinpolarisiert ist, und daß wir die Spinpolarisation des gestreuten Elektrons auch nicht beobachten. Dann ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit w

$$\begin{aligned} w &= \sum_{r,r'}{}' \left| \left\langle e^-\, \mathbf{p}'r' \middle| \hat{S} \middle| e^-\, \mathbf{p}r \right\rangle \right|^2 \\ &= e^2(Ze)^2 \left[2\pi\delta(p'^0 - p^0)\right]^2 \frac{1}{|\mathbf{k}|^4} |F(\mathbf{k})|^2 \\ &\quad \times \sum_{r,r'}{}' \left|\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2 N_{\mathbf{p}'}^2 N_{\mathbf{p}}^2. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Hier bedeutet $\sum'$ die Mittelung über die Spinpolarisationen des Anfangszustandes und die Summation über die Spinpolarisationen des Endzustandes.

Gleichung (8.12) sieht katastrophal aus: sie enthält das Quadrat einer δ-Distribution, ein sinnloses Symbol. Den Weg aus diesem Problem zeigt ein Trick, welcher auf Fermi zurückgeht. Wir schreiben:

$$\left[2\pi\delta(p'^0 - p^0)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left\{i(p'^0 - p^0)t\right\} 2\pi\delta(p'^0 - p^0);$$

wir haben also eine δ-Distribution durch ihre Fouriertransformierte ersetzt. Die zweite δ-Distribution fordert nun $p'^0 = p^0$, was im Integral ausgenützt werden kann:

$$\left[2\pi\delta(p'^0 - p^0)\right]^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\right) 2\pi\delta(p'^0 - p^0).$$

Wir stellen uns nun weiters vor, daß das Potential $\phi(\mathbf{r})$ adiabatisch ein- und ausgeschaltet wird, sodaß wir dann das Integral über alle Zeiten durch die

Gesamtzeit T ersetzen können, während der das Potential eingeschaltet ist. Diese Vorstellung ist physikalisch sinnvoll, da kein Experiment unendlich lange dauert. Wir ersetzen dann:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\right) &\rightarrow T \\
\left[2\pi\delta(p'^0 - p^0)\right]^2 &\rightarrow T 2\pi\delta(p'^0 - p^0).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Dies ergibt nun ein mathematisch wohl definiertes Ergebnis für die *Übergangsrate w/T*:

$$\frac{w}{T} = e^2(Ze)^2 2\pi\delta(p'^0 - p^0)\frac{1}{|\mathbf{k}|^4}\left|F(\mathbf{k})\right|^2 \sum_{r,r'}{}' \left|\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2 N_{\mathbf{p}'}^2 N_{\mathbf{p}}^2. \tag{8.14}$$

Fermis Trick kann vermieden werden, wenn man anstelle von Zuständen mit festen Impulsen Wellenpakete betrachtet.

Die physikalisch interessante Größe ist der *Streuquerschnitt*. Multipliziert man die Übergangsrate mit der Dichte der Endzustände und dividiert man sie durch den Fluß Φ der einfallenden Teilchen, so erhält man zunächst einen zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt dafür, ein gestreutes Teilchen in einem Energie- und Raumwinkelement auffinden zu können. Die Dichte der Endzustände erhält man

$$\frac{\Omega\, d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{\Omega\,|\mathbf{p}'|^2\, d\,|\mathbf{p}'|\, d\theta'}{(2\pi)^3} = \frac{\Omega\,|\mathbf{p}'|\, E_{\mathbf{p}'} dE_{\mathbf{p}'} d\theta'}{(2\pi)^3}, \tag{8.15}$$

was aus $E_{\mathbf{p}}^2 = m_0^2 + |\mathbf{p}|^2$ und $E_{\mathbf{p}}\, dE_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|\; d\,|\mathbf{p}|$ folgt. Weiters ist θ' der Raumwinkel des Ausgangsimpulses $\mathbf{p}'$. Der Teilchenfluß, schließlich, ist als die Anzahl von Teilchen definiert, welche in der Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche durchtreten. In unserem Fall ist somit $\Phi = v_{rel}/\Omega$, wenn v_{rel} die Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen relativ zum Streuzentrum ist.

Bei der Bestimmung von v_{rel} ist zu beachten, daß in jedem Lorentz-Bezugssystem die Relativgeschwindigkeit zweier sich kolinear bewegender Teilchen durch

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} \tag{8.16}$$

gegeben ist, wobei p_i der Viererimpuls und m_i die Ruhemasse des i-ten Teilchens ist. In einem Schwerpunktsystem (SS) ist $|\mathbf{p}_1| = -\,|\mathbf{p}_2|$ und daraus folgt

$$v_{rel} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_{\mathbf{p}_2}} = |\mathbf{p}_1|\,\frac{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}}. \tag{8.17}$$

Im Laborsystem (LS) ist das Streuzentrum (etwa Teilchen 2) in Ruhe, also $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, und damit gilt:

$$v_{rel} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}}. \tag{8.18}$$

Damit erhalten wir den Fluß der einfallenden Teilchen im LS:

$$\Phi = \frac{v_{rel}}{\Omega} = \frac{|\mathbf{p}|}{\Omega E_{\mathbf{p}}}.$$

Daraus ergibt sich schließlich der zweifach differentielle Streuquerschnitt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma}{dE_{\mathbf{p}'}d\theta'} &= \frac{w}{\Phi T}\frac{\Omega\,|\mathbf{p}'|\,E_{\mathbf{p}'}}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{\Omega\,|\mathbf{p}'|\,E_{\mathbf{p}'}}{(2\pi)^3}\frac{\Omega E_{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|}\frac{e^2(eZ)^2}{|\mathbf{k}|^4}2\pi\delta\left(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}\right)|F(\mathbf{k})|^2 \\
&\quad \times {\sum_{r,r'}}' \left|\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2 N_{\mathbf{p}'}^2 N_{\mathbf{p}}^2,
\end{aligned} \tag{8.19}$$

wobei wir $E_{\mathbf{p}} = p^0$ benützt haben. Die Integration über $E_{\mathbf{p}'}$ kann unmittelbar ausgeführt werden und sie resultiert in $E_{\mathbf{p}'} = E_{\mathbf{p}}$ und damit gilt auch $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$; es tritt also nur elastische Streuung auf. Damit erhalten wir den einfach differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons in das Raumwinkelement $d\theta'$ am Coulombpotential eines schweren Kernes:

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{m_0^2}{(2\pi)^2}\frac{e^2(eZ)^2}{|\mathbf{k}|^4}|F(\mathbf{k})|^2 {\sum_{r,r'}}' \left|\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2, \tag{8.20}$$

wegen $N_{\mathbf{p}} = \sqrt{m_0/(\Omega E_{\mathbf{p}})}$.

Es ist nunmehr die Summation über die Spinpolarisationen zu untersuchen. Zunächst tritt in (8.19) ein Term auf, welcher als Feynman Amplitude identifiziert werden kann

$$\mathcal{M} = \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p}),$$

mit Γ einer γ-Matrix. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann proportional zu

$$X = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{r'=1}^{2}|\mathcal{M}|^2.$$

Wie bereits eingangs festgelegt, ist über die Spinpolarisationen des Anfangszustandes zu mitteln und über die Spinpolarisationen des Endzustandes zu summieren. Wir führen noch

$$\tilde{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$$

ein, und können jetzt X umformen:

$$X = \frac{1}{2}\sum_{r,r'}\left[\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p})\right]\left[\bar{u}_r(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}u_{r'}(\mathbf{p}')\right],$$

oder mit den Bispinorindizes explizit angeschrieben:

$$X = \frac{1}{2}\left[\sum_{r'} u_{r',\delta}(\mathbf{p}')\bar{u}_{r',\alpha}(\mathbf{p}')\right]\Gamma_{\alpha\beta}\left[\sum_{r} u_{r,\beta}(\mathbf{p})\bar{u}_{r,\gamma}(\mathbf{p})\right]\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}.$$

Wir verwenden nun Energieprojektionsoperatoren nach (4.22)

$$\Lambda^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m_0}\left(\pm \not{p} + m_0\right),$$

und mit (4.24) folgt:

$$\Lambda^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \sum_{r} u_{r,\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r,\beta}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m_0}\left(\not{p} + m_0\right)_{\alpha\beta}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\Lambda^{+}_{\delta\alpha}(\mathbf{p}')\Gamma_{\alpha\beta}\Lambda^{+}_{\beta\gamma}(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Gamma^{+}(\mathbf{p}')\Gamma\Lambda^{+}(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4m_0^2}\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}' + m_0\right)\Gamma\left(\not{p} + m_0\right)\tilde{\Gamma}\right]. \end{aligned} \tag{8.21}$$

In Gleichung (8.19) ist $\Gamma = \gamma^0$ und damit ist auch $\tilde{\Gamma} = \gamma^0$ und wir erhalten somit:

$$\sum_{r,r'}{}' \left|\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2 = \frac{1}{8m_0^2}\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}' + m_0\right)\gamma^0\left(\not{p} + m_0\right)\gamma^0\right]. \tag{8.22}$$

8.1.1 Berechnung der Spinsummen

Wichtig sind zunächst folgende Eigenschaften der Spur:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(AB) &= \mathrm{Tr}\,(BA) && (8.23a) \\ \mathrm{Tr}\,(A+B) &= \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B) \\ &= A_{\nu\nu} + B_{\nu\nu} = (A+B)_{\nu\nu} && (8.23b) \\ \mathrm{Tr}\,[A\,(B+C)] &= \mathrm{Tr}\,(AB) + \mathrm{Tr}\,(AC)\,, && (8.23c) \end{aligned}$$

mit Matrizen A, B, C. In unserem Fall sind dies natürlich γ-Matrizen und diese haben die Vertauschungsrelationen (E.5)

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu},$$

und es sind Ausdrücke der Form $\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n})$ auszuwerten, was durch Rekursion gelingt. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}) &= \mathrm{Tr}\,[(2g_{\nu_1\nu_2} - \gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_1})\,\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n}] \\ &= 2g_{\nu_1\nu_2}\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n}) - \mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n})\,. \end{aligned}$$

Es wird nun γ_{ν_1} schrittweise ganz nach rechts verschoben

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n}) &= -\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_3}\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_4}\cdots\gamma_{\nu_n}) \\ &\quad +2g_{\nu_1\nu_3}\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_4}\cdots\gamma_{\nu_n})\,, \end{aligned}$$

also zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}) &= \mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_3}\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_4}\cdots\gamma_{\nu_n}) \\ &\quad +2g_{\nu_1\nu_2}\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n}) \\ &\quad -2g_{\nu_1\nu_3}\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_4}\cdots\gamma_{\nu_n})\,. \end{aligned}$$

Ganz allgemein ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}) &= 2\sum_{i=2}^{n}(-1)^i g_{\nu_1\nu_i}\mathrm{Tr}\,\left(\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{i-1}}\gamma_{\nu_{i+1}}\cdots\gamma_{\nu_n}\right) \\ &\quad +(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n}\gamma_{\nu_1})\,. \end{aligned}$$

Ist nun n gerade, so ist $(-1)^{n-1} = -1$ und wegen der zyklischen Eigenschaft der Spur (8.23a) folgt:

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}) = \sum_{i=2}^{n}(-1)^i g_{\nu_1\nu_i}\mathrm{Tr}\,\left(\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{i-1}}\gamma_{\nu_{i+1}}\cdots\gamma_{\nu_n}\right)\,. \tag{8.24}$$

Man erkennt etwa unmittelbar durch Ausrechnung:

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu},$$

und damit stellt (8.24) eine Rekursionsgleichung dar, welche die Berechnung der Spuren eines geradzahligen Produktes von γ-Matrizen gestattet. Für ungerade n hingegen versagt die Rekursionbeziehung (8.24) und wir finden unter

Verwendung von

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^5\right)^2 &= i^2\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right)\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= i^2\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2(-1)\gamma^0\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= i^2\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= i^2\left((-1)\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=1}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= i^2\left((-1)\underbrace{\gamma^1\gamma^1}_{=-1}\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= i^2\left(\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3\right) = i^2\left[(-1)\gamma^2\gamma^2\gamma^3\gamma^3\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_n}\right) &= \mathrm{Tr}\left[\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_n}\left(\gamma^5\right)^2\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left(\gamma^5\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_n}\gamma^5\right).
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\gamma^{\nu_i}\gamma^5 + \gamma^5\gamma^{\nu_i} = 0,$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_n}\left(\gamma^5\right)^2\right] = (-1)^n\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_n}\left(\gamma^5\right)^2\right],$$

was für ungerade n

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_n}\left(\gamma^5\right)^2\right] = 0 \qquad \forall\, n \text{ ungerade} \tag{8.25}$$

ergibt. Es verbleiben also nur Spuren über eine gerade Anzahl von γ-Matrizen. Schließlich gilt noch

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}\right) = \mathrm{Tr}\left(\gamma_{\nu_n}\gamma_{\nu_{n-1}}\cdots\gamma_{\nu_1}\right). \tag{8.26}$$

Für $n = 2$ ist dies unmittelbar einsichtig. Der Rest folgt durch Rekursion und Verwendung von (8.24):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}\gamma_{\nu_{n+1}}\gamma_{\nu_{n+2}}\right) &= \sum_{i=2}^{n+2}(-1)^i g_{\nu_1\nu_i}\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\nu_2}\ldots\gamma_{\nu_{i-1}}\gamma_{\nu_{i+1}}\cdots\right. \\
&\quad \left.\times\cdots\gamma_{\nu_n}\gamma_{\nu_{n+1}}\gamma_{\nu_{n+2}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left(\gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n}\gamma_{\nu_{n+1}}\gamma_{\nu_{n+2}}\right) &= \sum_{i=2}^{n+2}(-1)^i g_{\nu_1\nu_i}\operatorname{Tr}\left(\gamma_{\nu_{n+2}}\gamma_{\nu_{n+1}}\gamma_{\nu_n}\cdots\right.\\ &\quad \times\left.\cdots\gamma_{\nu_{i+1}}\gamma_{\nu_{i-1}}\cdots\gamma_{\nu_1}\right),\end{aligned}$$

was wegen (8.24) gleich $\operatorname{Tr}\left(\gamma_{\nu_{n+2}}\gamma_{\nu_{n+1}}\gamma_{\nu_n}\cdots\gamma_{\nu_1}\right)$ ist, womit (8.26) bewiesen ist.

8.1.2 Bestimmung des Wirkungsquerschnittes

Wir werten nun die Spur in Gleichung (8.22) aus:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\left[\left(p'^{\mu}\gamma_\mu+m_0\right)\gamma^0\left(p^\nu\gamma_\nu+m_0\right)\gamma^0\right]=\\ &\quad= \operatorname{Tr}\left[p'^{\mu}\gamma_\mu\gamma^0p^\nu\gamma_\nu\gamma^0+p'^{\mu}\gamma_\mu\gamma^0m_0\gamma^0+m_0\gamma^0p^\nu\gamma_\nu\gamma^0+m_0^2\gamma^0\gamma^0\right]\\ &\quad= \operatorname{Tr}\left(p'^{\mu}\gamma_\mu\gamma^0p^\nu\gamma_\nu\gamma^0\right)+4m_0^2.\end{aligned}$$

Wir werten weiter aus

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\left(p'^{\mu}\gamma_\mu\gamma^0p^\nu\gamma_\nu\gamma^0\right)=\\ &\quad= p'^0p^0\operatorname{Tr}\left(\underbrace{\gamma_0\gamma^0\gamma_0\gamma^0}_{=\gamma^0\gamma^0\gamma^0\gamma^0=E}\right)+p'^ip^j\operatorname{Tr}\underbrace{\left(\gamma_i\gamma^0\gamma_j\gamma^0\right)}\\ &\qquad\qquad = -\gamma^i\gamma^0\left(-\gamma^j\gamma^0\right)\\ &\qquad\qquad = \gamma^i\gamma^0\gamma^j\gamma^0\\ &\qquad\qquad = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0\gamma^j\\ &\qquad\qquad = -\gamma^i\gamma^j\\ &\qquad\left[\quad -\operatorname{Tr}\left(\gamma^i\gamma^j\right)=-4g^{ij}=4\delta_{i,j}\quad\right]\\ &\quad= 4p'^0p^0+4p'^ip^i,\end{aligned}$$

und erhalten wegen $p'^0=p^0$:

$$\operatorname{Tr}\left[\left(p'^{\mu}\gamma_\mu+m_0\right)\gamma^0\left(p^\nu\gamma_\nu+m_0\right)\gamma^0\right]=4m_0^2+4\left(p^0\right)^2+4\mathbf{p}'\mathbf{p}.$$

Dies ergibt schließlich:

$$\sum_{r,r'}{}'\left|\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\gamma^0u_r(\mathbf{p})\right|^2=\frac{4}{8m_0^2}\left[\left(p^0\right)^2+\mathbf{p}'\mathbf{p}+m_0^2\right].$$

Wir führen nun den Streuwinkel

$$\cos\vartheta=\frac{\mathbf{p}'\mathbf{p}}{|\mathbf{p}'|\,|\mathbf{p}|}=\frac{\mathbf{p}'\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}$$

ein und benützen wieder

$$(p_0)^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_0^2$$

und erhalten somit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m_0^2}\left(p_0^2 + \mathbf{p}'\mathbf{p} + m_0^2\right) &= \frac{1}{2m_0^2}\left(|\mathbf{p}|^2 + m_0^2 + |\mathbf{p}|^2\cos\vartheta + m_0^2\right) \\
&= \frac{1}{2m_0^2}\left[|\mathbf{p}|^2(1+\cos\vartheta) + 2m_0^2\right] \\
&= \frac{1}{m_0^2}\left(|\mathbf{p}|^2\cos^2\frac{\vartheta}{2} + m_0^2\right).
\end{aligned}$$

Schließlich beachten wir noch

$$|\mathbf{k}|^2 = |\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2 = 2|\mathbf{p}|^2 - 2|\mathbf{p}|^2\cos\vartheta = 4|\mathbf{p}|^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Dies ergibt in Gleichung (8.20):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\theta'} &= \frac{m_0^2}{(2\pi)^2}\frac{\frac{|\mathbf{p}|^2}{m_0^2}\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{m_0^2}{|\mathbf{p}|^2}\right)}{16|\mathbf{p}|^4\sin^4\frac{\vartheta}{2}}|F(\mathbf{k})|^2 e^2(eZ)^2 \\
&= (\alpha Z)^2\frac{1}{4|\mathbf{p}|^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{m_0^2}{|\mathbf{p}|^2}\right)|F(\mathbf{k})|^2, \qquad (8.27)
\end{aligned}$$

mit $\alpha = e^2/(4\pi)$.

Für eine Punktladung als Streuzentrum gilt

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

und damit wird

$$|F(\mathbf{k})|^2 = \int d^3r\,\delta(\mathbf{r})e^{i\mathbf{kr}} = 1.$$

Wir erhalten dann für den Wirkungsquerschnitt die Mott*sche Streuformel*:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\theta'} &= \frac{(\alpha Z)^2}{4|\mathbf{p}|^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{m_0^2}{|\mathbf{p}|^2}\right) \\
&= \frac{(\alpha Z)^2}{4E_{\mathbf{p}}^2 v_{rel}^4\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\left(1 - v_{rel}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right). \qquad (8.28)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist die relativistische Verallgemeinerung der Rutherford*schen Streuformel* ($|\mathbf{p}| \ll m_0$):

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{(\alpha Z)^2}{4m_0^2 v_{rel}^4\sin^4\frac{\vartheta}{2}}.$$

Im extrem relativistischen Grenzfall, $|\mathbf{p}| \gg m_0$, finden wir:

$$|\mathbf{p}|^2 \frac{d\sigma}{d\theta} = Z^2 \underbrace{\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2}_{=\alpha^2} \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}. \tag{8.29}$$

Somit hängt für die Punktladung der proportional zum Quadrat der "äußeren" kinematischen Längenskala $1/|\mathbf{p}|$ dimensionslos gemachte differentielle Streuquerschnitt in der Hochenergiephysik *nicht* vom Impuls des einlaufenden Teilchens ab. Er zeigt *Skalenverhalten*. Wird ein solches Skalenverhalten beobachtet, so kann man daraus schließen, daß die Streuzentren punktförmig sein müssen.

8.2 Verallgemeinerung auf allgemeine Streuprobleme

Wir untersuchen Streuprozesse, in welchen zwei Partikel, Leptonen oder Photonen, mit dem Viererimpuls $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i), i = 1, 2$ kollidieren und N Endpartikel als Endprodukte erzeugen, welche den Viererimpuls $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f), f = 1, \ldots, N$ haben. Anfangs- und Endteilchen sollen dabei in bestimmten Polarisationszuständen sein. (Wir werden dabei in den folgenden Rechnungen die Polarisationsindizes unterdrücken wo immer sie unnotwendig sind.)

Das S-Matrix Element für einen solchen Prozess kann nach Gleichung (7.50) unmittelbar angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{f,i} + (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{f=1}^{N} p'_f - \sum_{i=1}^{2} p_i \right) \prod_i \left(\frac{1}{2\Omega E_i} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \prod_f \left(\frac{1}{2\Omega E_f} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_l (2m_l)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}, \quad l \leq f \end{aligned} \tag{8.30}$$

wobei der Index l über alle externen Leptonen im Prozess läuft. Diese Gleichung gilt im Grenzfall $T \to \infty$ und $\Omega \to \infty$. In Realität sind aber beide

Größen endlich und wir hätten den selben Ausdruck (8.30) aufgefunden, mit

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_{f=1}^{N} p'_f - \sum_{i=1}^{2} p_i\right) &= \\
= \lim_{\substack{T\to\infty\\ \Omega\to\infty}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{\Omega} d^3x \exp\left[ix\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)\right] \\
= \lim_{\substack{T\to\infty\\ \Omega\to\infty}} \delta_{T\Omega}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right). \qquad (8.31)
\end{aligned}
$$

Es ist also $\delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)$ durch $\delta_{T\Omega}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)$ zu ersetzen. Wir finden dann für die Übergangsrate, wie bereits früher:

$$
w = |S_{fi}|^2/T. \qquad (8.32)
$$

Dies enthält den Faktor $\left[\delta_{T\Omega}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)\right]^2$ und wir setzen für große Werte von T und Ω:

$$
\delta_{T\Omega}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \simeq (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right),
$$

und damit ergibt sich in Analogie zu (8.13)

$$
\left[\delta_{T\Omega}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)\right]^2 \simeq T\Omega(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right), \qquad (8.33)
$$

was in (8.32) zu

$$
w = \Omega(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)\left(\prod_i \frac{1}{2\Omega E_i}\right)\left(\prod_f \frac{1}{2\Omega E_f}\right)\left(\prod_l 2m_l\right)|\mathcal{M}|^2 \qquad (8.34)
$$

führt. Dieser Ausdruck beschreibt den Übergang in *einen* bestimmten Endzustand. Um die Übergangsrate in eine *Gruppe* von Endzuständen mit Impulsen in den Intervallen $(\mathbf{p}'_f, \mathbf{p}'_f + d\mathbf{p}'_f)$, $f = 1, \ldots, N$ aufzufinden, müssen wir w mit der Zahl solcher Zustände, $\prod_f \Omega d^3p'_f/(2\pi)^3$, multiplizieren. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann die Übergangsrate in diese Gruppe von Endzuständen für ein Streuzentrum und den auf die Einheit normierten Eintrittsfluß. In den von uns gewählten Normierungen für die Zustände, enthält das Volumen Ω ein Streuzentrum, und der einfallende Fluß ist durch v_{rel}/Ω gegeben, wobei v_{rel} die relative Geschwindigkeit der kollidierenden Teilchen ist. Dies wird mit (8.34) kombiniert und ergibt für zwei kollidierende Teilchen:

$$\begin{aligned} d^4\sigma &= w\frac{\Omega}{v_{rel}}\prod_f \frac{\Omega d^3p'_f}{(2\pi)^3} \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)\frac{1}{4\Omega^2 E_1E_2}\frac{\Omega^2}{v_{rel}}\left(\prod_l 2m_l\right) \\ &\quad\times\left(\prod_f \frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}\right)|\mathcal{M}|^2 . \qquad (8.35) \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt in allen Lorentzsystemen, in welchen sich die Teilchen kolinear bewegen.

Die relativistische Invarianz von (8.35) folgt aus (8.16) und aus der Lorentzinvarianz von

$$\frac{d^3p}{2E} = \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \int d^3p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0),$$

mit $m^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2$. $\theta(x)$ ist wieder die Stufenfunktion.

Weiters sind wegen der Viererimpulserhaltung die Endimpulse $\mathbf{p}'_1, \ldots, \mathbf{p}'_N$ nicht alle unabhängig. Für einen Zweiteilchen-Endzustand ergibt (8.35)

$$d^4\sigma = f(p'_1,p'_2)\delta^{(4)}\left(p'_1+p'_2-p_1-p_2\right)d^3p'_1\,d^3p'_2, \qquad (8.36)$$

mit

$$\begin{aligned} f(p'_1,p'_2) &= \frac{(2\pi)^4}{4\cdot 4(2\pi)^6 E_1E_2E'_1E'_2}\frac{1}{v_{rel}}\left(\prod_l 2m_l\right)|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 v_{rel}E_1E_2E'_1E'_2}\left(\prod_l 2m_l\right)|\mathcal{M}|^2 . \qquad (8.37) \end{aligned}$$

Wir integrieren nun (8.36) über $\mathbf{p}'_2$, was zu $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1$ führt, und damit folgt,

$$d^2\sigma = f(p'_1,p'_2)\delta\left(E'_1+E'_2-E_1-E_2\right)|\mathbf{p}'_1|^2\,d\,|\mathbf{p}'_1|\,d\theta'_1, \qquad (8.38)$$

mit dem Raumwinkel θ'_1 des Impulses $\mathbf{p}'_1$. Wir integrieren nun (8.38) über $|\mathbf{p}'_1|$ und benützen dabei

$$\begin{aligned} \int dx\,f(x,y)\delta\left[g(x,y)\right] &= \int dg\,f(x,y)\delta\left[g(x,y)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_y \\ &= \left[\frac{f(x,y)}{(\partial g/\partial x)_y}\right]_{g=0}, \end{aligned}$$

was dann

$$\frac{d\sigma}{d\theta_1'} = f(p_1', p_2')\, |\mathbf{p}_1'|^2 \left[\frac{\partial(E_1' + E_2')}{\partial\, |\mathbf{p}_1'|}\right]^{-1} \tag{8.39}$$

ergibt. Hier ist $p_2' = p_1 + p_2 - p_1'$ aufgrund der Viererimpulserhaltung. Die partielle Ableitung berechnet man, indem man die Polarwinkel ϑ_1' und φ_1' des Vektors $\mathbf{p}_1'$ konstant läßt.

Wir berechnen nun den Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem mit $|\mathbf{p}_1'| = -\,|\mathbf{p}_2'|$. In diesem gilt

$$\left(E_f'\right)^2 = \left(m_f'\right)^2 + \left|\mathbf{p}_f'\right|^2, \quad f = 1, 2$$

und damit

$$\frac{\partial\left(E_1' + E_2'\right)}{\partial\, |\mathbf{p}_1'|} = |\mathbf{p}_1'|\, \frac{E_1 + E_2}{E_1' E_2'}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\theta_1'}\right)_{\text{SS}} &= \frac{1}{64\pi^2 E_1 E_2 E_1' E_2'} \frac{E_1' E_2'}{|\mathbf{p}_1'|\,(E_1 + E_2)}\, |\mathbf{p}_1'|^2 \\
&\quad \times \frac{E_1 E_2}{|\mathbf{p}_1|\,(E_1 + E_2)} \left(\prod_l 2m_l\right) |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{1}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} \left(\prod_l 2m_l\right) |\mathcal{M}|^2 .
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Damit wurde die allgemeine Formel für den Wirkungsquerschnitt von Zweiteilchenprozessen aufgefunden. Diese ist gültig unabhängig davon ob die beteiligten Teilchen ident sind oder nicht. Will man aber den totalen Wirkungsquerschnitt für Fälle berechnen, in denen zwei oder mehr idente Teilchen im Endzustand vorhanden sind, so muß man nur über jene Winkelbereiche $\theta = (\vartheta, \varphi)$ integrieren, welche physikalisch unterscheidbaren Prozessen zuordenbar sind. Entspricht also (8.40) einem Prozess, in welchem zwei idente Teilchen im Endzustand vorhanden sind, dann beschreiben die Streuwinkel $(\vartheta_1', \varphi_1') = (\alpha, \beta)$ und $(\vartheta_1', \varphi_1') = (\pi - \alpha, \pi + \beta)$ denselben Prozess. Damit erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt im SS-System indem man (8.40) nur über die "Vorwärts-Halbkugel" $0 \le \vartheta' \le \pi/2$ integriert:

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\text{SS})} = \int_0^1 d(\cos\vartheta_1') \int_0^{2\pi} d\varphi_1' \left(\frac{d\sigma}{d\theta_1'}\right)_{\text{SS}} = \frac{1}{2} \int_{4\pi} d\theta_1' \left(\frac{d\sigma}{d\theta_1'}\right)_{\text{SS}} . \tag{8.41}$$

Ist dann die Fermi-Amplitude von der Form

$$\mathcal{M} = \bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p}),$$

so sind die Überlegungen von Abschnitt 8.1.1 unmittelbar anwendbar.

Es sind aber auch noch die Fermi-Amplituden

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{M} & = & \bar{v}_s(\mathbf{p}')\Gamma v_r(\mathbf{p}) & \text{Absorption und Emission eines neg. Leptons} \\
\mathcal{M} & = & \bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma v_r(\mathbf{p}) & \text{Erzeugung eines Leptonenpaares} \\
\mathcal{M} & = & \bar{v}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p}) & \text{Vernichtung eines Leptonenpaares}
\end{array}
$$

möglich. In diesen Fällen ist dann Λ^+ durch Λ^- zu ersetzen. So liefert etwa

$$\mathcal{M} = \bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma v_r(\mathbf{p})$$

ein

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{r,s} |\mathcal{M}|^2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(\mathbf{p}')\Gamma\Lambda^-(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}' + m_0}{2m_0}\Gamma\frac{\not{p} - m_0}{2m_0}\tilde{\Gamma}\right].
\end{aligned}
$$

Es kann aber natürlich auch geschehen, daß ein Prozess Spinpolarisationseigenschaften hat. Dazu muß man dann $|\mathcal{M}|^2$ für spezielle Spin-Anfangs- und -Endzustände bestimmen. Dies kann natürlich durch explizites Anschreiben der Bispinoren geschehen, eleganter ist die Verwendung von Helizitäts- oder Spinprojektionsoperatoren (4.19) um die korrekten Spinzustände auswählen zu können.

Wir nehmen nun - zur Demonstration - an, daß das einfallende Elektron positive und das auslaufende Elektron negative Helizität habe. Der Wirkungsquerschnitt ist dann proportional zu

$$
\begin{aligned}
X &= |\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma u_1(\mathbf{p})|^2 \\
&= [\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma u_1(\mathbf{p})]\left[\bar{u}_1(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}u_2(\mathbf{p}')\right]. \qquad (8.42)
\end{aligned}
$$

Wir führen nun den Helizitätsoperator

$$\hat{\Pi}^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}), \qquad (8.43)$$

mit $\sigma_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ entsprechend (4.4) ein. Dieser Operator hat Eigenschaften, welche unmittelbar aus (4.5) folgen

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) &= (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}) \\
\hat{\Pi}^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}(1 + \sigma_{\mathbf{p}})\, u_r(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{r+1}\right] u_r(\mathbf{p}) \\
&= \delta_{1,r} u_r(\mathbf{p}), \qquad (8.44a)
\end{aligned}
$$

und analog:

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}^{-}(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2,r}u_r(\mathbf{p}), && (8.44b)\\
\hat{\Pi}^{+}(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2,r}v_r(\mathbf{p}), && (8.44c)\\
\hat{\Pi}^{-}(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1,r}v_r(\mathbf{p}). && (8.44d)
\end{aligned}$$

Dies kann man dazu verwenden um für (8.43)

$$\begin{aligned}
X &= \left[\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma\hat{\Pi}^{+}(\mathbf{p})u_1(\mathbf{p})\right]\left[\bar{u}_1(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\hat{\Pi}^{-}(\mathbf{p}')u_2(\mathbf{p}')\right]\\
&= \sum_{r,s}\left[\bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma\hat{\Pi}^{+}(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})\right]\left[\bar{u}_r(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\hat{\Pi}^{-}(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p}')\right]\\
&= \mathrm{Tr}\left[\Lambda^{+}(\mathbf{p}')\Gamma\hat{\Pi}^{+}(\mathbf{p})\Lambda^{+}(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\hat{\Pi}^{-}(\mathbf{p}')\right] \qquad (8.45)
\end{aligned}$$

zu schreiben. Dieser Ausdruck ist analog zu Gleichung (8.21), nur ist Γ und $\tilde{\Gamma}$ durch $\Gamma\hat{\Pi}^{+}$ bzw. $\tilde{\Gamma}\hat{\Pi}^{-}$ zu ersetzen.

Die Berechnung solcher Ausdrücke wird im relativistischen Limit besonders einfach. Da in diesem Limit $E \gg m_0$ ist, kann man von der Dirac Gleichung massenfreier Teilchen ausgehen:

$$\begin{aligned}
\not{p}w_r(\mathbf{p}) &= 0; \qquad w_r(\mathbf{p}) = \begin{cases} u_r(\mathbf{p}) \\ v_r(\mathbf{p}) \end{cases}\\
\gamma^0 p_0 w_r(\mathbf{p}) &= -\gamma^k p_k w_r(\mathbf{p}); \qquad p_0 = |\mathbf{p}|\\
\gamma^0\,|\mathbf{p}|\,w_r(\mathbf{p}) &= \gamma^k p^k w_r(\mathbf{p})\\
\gamma^5\gamma^0\gamma^0 w_r(\mathbf{p}) &= \gamma^5\gamma^0\gamma^k\frac{p^k}{|\mathbf{p}|}w_r(\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Es gilt dann noch

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k = \gamma^5\gamma^0\gamma^k$$

und dies führt zu

$$\begin{aligned}
\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) &= \sigma^{ij}\frac{p^k}{|\mathbf{p}|}w_r(\mathbf{p})\\
&= \sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p}). \qquad (8.46)
\end{aligned}$$

Daraus finden wir unmittelbar:

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right) w_r(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}\right) w_r(\mathbf{p}),$$

oder

$$\hat{\Pi}^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right), \quad E \gg m_0, \qquad (8.47)$$

was die Berechnung von (8.45) erheblich erleichtert.

8.3 Summen über Photonenpolarisationen

Ein kovarianter Formalismus erlaubt es unpolarisierte Wirkungsquerschnitte unmittelbar zu berechnen. Dieser Formalismus hängt von der Eichinvarianz der Theorie ab. Diese impliziert die Eichinvarianz der Matrixelemente und damit der Fermi Amplituden. Es ist natürlich das Matrixelement selbst, welches der Summe aller möglichen Feynman Diagramme einer gegebenen Ordnung Störungstheorie entspricht, welches eichinvariant sein muß. Die Beiträge einzelner Feynman Diagramme zur Amplitude müssen hingegen im allgemeinen nicht eichinvariant sein. Betrachten wir etwa die Comptonstreuung, so sind die Amplituden $\mathcal{M}_a$ und $\mathcal{M}_b$ nicht eichinvariant, wohl aber die Summe $\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$ (siehe Gleichungen (7.43) und (7.44)).

Jeder Prozess, welcher externe Photonen enthält, hat eine Fermi Amplitude der Form

$$\mathcal{M} = \varepsilon^{\alpha}_{r_1}(\mathbf{k}_1)\varepsilon^{\beta}_{r_2}(\mathbf{k}_2)\cdots\mathcal{M}_{\alpha\beta\ldots}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots). \tag{8.48}$$

Der Vierervektor $\varepsilon^\mu(\mathbf{k})$ ist dabei der Polarisationsvektor eines externen Photons und $\mathcal{M}_{\alpha\beta\ldots}$ ist die Tensoramplitude gewonnen unter Anwendung der Feynman Regeln. Die Polarisationsvektoren selbst sind natürlich eichinvariant; so ist etwa ein freies Photon in der Lorentzeichung durch die ebene Welle

$$A^\mu(x^\mu) = \text{konst}\,\varepsilon^\mu_r(\mathbf{k})e^{\pm ik^\mu x_\mu}$$

beschrieben. Eine Eichtransformation

$$A^\mu(x^\mu) \quad \to \quad A^\mu(x^\mu) + \partial^\mu f(x^\mu),$$

mit beliebigem $f(x^\mu)$, also auch einem

$$f(x^\mu) = \tilde{f}(k^\mu)e^{\pm ik^\mu x_\mu},$$

impliziert den Übergang:

$$\varepsilon^\mu_r(\mathbf{k})\,e^{\pm ik^\mu x_\mu} \quad \to \quad \left[\varepsilon^\mu_r(\mathbf{k}) \pm ik^\mu\tilde{f}(k^\mu)\right]e^{\pm ik^\mu x_\mu}. \tag{8.49}$$

Daraus folgt, daß die Eichinvarianz der Feynman Amplitude (8.48) von der Tensoramplitude das Verhalten

$$k_1^\alpha\mathcal{M}_{\alpha\beta\ldots}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots) = k_2^\beta\mathcal{M}_{\alpha\beta\ldots}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots) = \ldots = 0$$

fordert. Wenn also irgendein Photonenpolarisationsvektor durch den entsprechenden Viererimpuls ersetzt wird, muß die Amplitude zu Null werden.

Diese Eigenschaft kann dazu verwendet werden Die Summen über Photonenpolarisationen auszuwerten. Wir untersuchen ein einfaches Beispiel:

$$\mathcal{M}_r(\mathbf{k}) = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\,\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}),$$

was einem Prozess entspricht, welcher ein externes Photon hat. Eichinvarianz verlangt nun

$$k^\alpha\,\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}) = 0. \tag{8.50}$$

Der Wirkungsquerschnitt für nicht polarisierte Prozesse ist dann proportional

$$X = \sum_{r=1}^{2} |\mathcal{M}_r(\mathbf{k})|^2 = \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\beta^\star(\mathbf{k}) \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}).$$

Nun gilt aber (5.26)

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu},$$

und es folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) &= -g^{\alpha\beta} + \varepsilon_0^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_0^\beta(\mathbf{k}) - \varepsilon_3^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_3^\beta(\mathbf{k}) \\
&= -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(k^\mu n_\nu)^2}\left[k^\alpha k^\beta - (k^\mu n_\mu)(k^\alpha n^\beta + k^\beta n^\alpha)\right].
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Für ein reelles Photon ($k^\mu k_\mu = 0$) und die Eichbeziehung (8.50) folgt dann unmittelbar

$$\sum_{r=1}^{2} |\mathcal{M}_r(\mathbf{k})|^2 = -\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\alpha^\star(\mathbf{k}), \tag{8.52}$$

was dem gesuchten Ergebnis entspricht. Es kann leicht auf Übergänge erweitert werden, welche auch externe Photonen enthalten.

8.4 Leptonen Paarerzeugung aus $(e^+\,e^-)$ Kollisionen

Bei der Kollision anihiliert das Elektron-Positron Paar und erzeugt ein Leptonenpaar $(\ell^+\,\ell^-)$. Wir untersuchen also Prozesse der Art

$$e^+(\mathbf{p}_1, r_1) + e^-(\mathbf{p}_2, r_2) \quad\to\quad \ell^+(\mathbf{p}_1', s_1) + \ell^-(\mathbf{p}_2', s_2),$$

wobei $\ell = e, \mu, \tau, \ldots$. Die Feynman Amplitude ergibt sich aus (7.47) mit einer leichten Modifikation

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(e^+ e^- \to \ell^+ \ell^-) &= -ie^2 \bar{u}_\ell(\mathbf{p}_2') \gamma^\alpha v_\ell(\mathbf{p}_1') D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2) \\
&\quad \times \bar{v}_e(\mathbf{p}_2) \gamma^\beta u_e(\mathbf{p}_1) \\
&= ie^2 \left[\bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\alpha v_{s_1}(\mathbf{p}_1')\right]_\ell \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}_{r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\alpha u_{r_2}(\mathbf{p}_2)\right]_e \\
&= \mathcal{M}(r_1, r_2; s_1, s_2). \qquad (8.53)
\end{aligned}$$

Wir haben dabei den Term $(+i\epsilon)$ im Nenner des Photonenpropagators gestrichen. Der term $(+i\epsilon)$ ist nur beim Pol des Propagators von Bedeutung, in unserem Fall ist aber $(p_1 + p_2)^2 \geq 4m_e^2$ und kann daher nicht Null werden. Wir benützten weiters

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha g^{\alpha\beta} \gamma^\beta &= [\, \gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu \,] \\
&= \gamma^\alpha \underbrace{g^{\alpha\beta} g^{\beta\nu}}_{=\delta_{\alpha,\nu}} \gamma_\nu = \gamma^\alpha \delta_{\alpha,\nu} \gamma_\nu \\
&= \gamma^\alpha \gamma_\alpha = \gamma_\alpha \gamma^\alpha.
\end{aligned}$$

Der nicht polarisierte Wirkungsquerschnitt wird aus

$$X = \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2} \sum_{s_1, s_2} |\mathcal{M}(r_1, r_2; s_1, s_2)|^2$$

berechnet, wozu zunächst $\mathcal{M}^\star(r_1, r_2; s_1, s_2)$ zu bestimmen ist. Dazu benützen wir (E.17), $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, und erhalten unmittelbar

$$\mathcal{M}^\star(r_1, r_2; s_1, s_2) = ie^2 \left[\bar{v}_{s_1}(\mathbf{p}_1') \gamma_\beta u_{s_2}(\mathbf{p}_2')\right]_\ell \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{u}_{r_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^\beta v_{r_1}(\mathbf{p}_1)\right]_e$$

und damit folgt

$$X = \frac{e^4}{4\left[(p_1 + p_2)^2\right]^2} A_{(\ell)\alpha\beta} B_{(e)}^{\alpha\beta}, \qquad (8.54)$$

mit

$$\begin{aligned}
A_{(\ell)\alpha\beta} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{\left[\bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\alpha v_{s_1}(\mathbf{p}_1')\right] \left[\bar{v}_{s_1}(\mathbf{p}_1') \gamma_\beta u_{s_2}(\mathbf{p}_2')\right]\right\}_{(\ell)} \\
&= \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_2' + m_\ell}{2m_\ell} \gamma_\alpha \frac{\not{p}_1' - m_\ell}{2m_\ell} \gamma_\beta\right], \qquad (8.55)
\end{aligned}$$

und

$$B_{(e)}^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma^\beta\right]. \qquad (8.56)$$

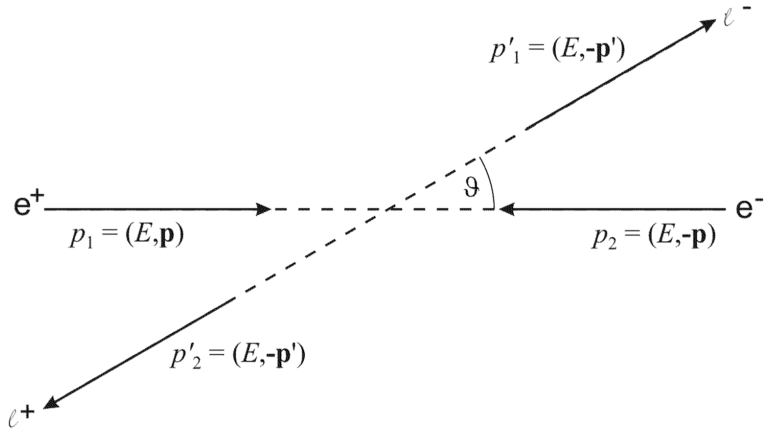


Abbildung 8.2: Kinematik des Prozesses $e^+ e^- \to \ell^+ \ell^-$ im Schwerpunktsystem.

Diese Spuren können nun in der bereits besprochenen Weise ausgewertet werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} A_{(\ell)\alpha\beta} &= \frac{1}{4m_\ell^2}\left[\mathrm{Tr}\left(\not p_2'\gamma_\alpha\ \not p_1'\gamma_\beta\right) - m_\ell^2 \mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\right)\right] \\ &= \frac{1}{m_\ell^2}\left[p_{1\alpha}'p_{2\beta}' + p_{2\alpha}'p_{1\beta}' - \left(m_\ell^2 + p_1'p_2'\right) g_{\alpha\beta}\right], \end{aligned} \tag{8.57}$$

und analog

$$B_{(e)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{m_e^2}\left[p_1^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_1^\beta - \left(m_e^2 + p_1 p_2\right) g^{\alpha\beta}\right]. \tag{8.58}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^4}{2m_\ell^2 m_e^2\left[(p_1+p_2)^2\right]^2}\left[(p_1p_1')(p_2p_2') + (p_1p_2')(p_2p_1')\right. \\ &\quad \left. + m_e^2 (p_1'p_2') + m_\ell^2 (p_1p_2) + 2m_e^2 m_\ell^2\right]. \end{aligned} \tag{8.59}$$

Wenn wir nun auf das Schwerpunktsystem übergehen, so erhalten wird entsprechend Abb. 8.2

$$\begin{aligned} p_1p_1' &= p_2p_2' = E^2 - |\mathbf{p}|\,|\mathbf{p}'|\cos\vartheta \\ p_1p_2' &= p_2p_1' = E^2 + |\mathbf{p}|\,|\mathbf{p}'|\cos\vartheta \\ p_1p_2 &= p_1'p_2' = E^2 + |\mathbf{p}|^2 \\ (p_1+p_2)^2 &= 4E^2. \end{aligned}$$

Handelt es sich nun um ein μ- oder τ-Teilchen, so ist $m_\mu \approx 105.7\,\mathrm{MeV}$ und $m_\tau \approx 1782\left(\begin{smallmatrix}+2\\-7\end{smallmatrix}\right)\mathrm{MeV}$. Bei solchen Experimenten ist ferner $E \geq m_\ell$ und

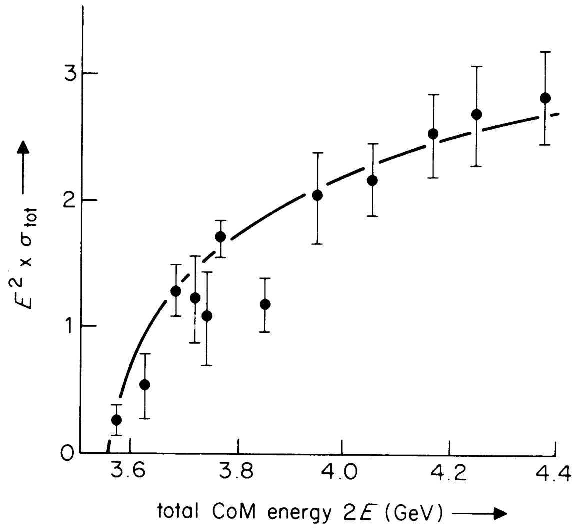


Abbildung 8.3: Gegenüberstellung Experiment und Theorie für den Prozess $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ nahe von $2E = m_\tau$. Dargestellt ist $E^2\sigma_{\text{tot}}$. • zeigt die experimentellen Daten, die Kurve ist ein Fit von (8.61) mit $m_\tau = 1782\,\text{MeV}$. Nach W. Bacino *et al.*, Phys. Rev. Lett. **41**, 13 (1978). (CoM = Centre of Mass)

man kann daher in sehr guter Näherung $p \equiv |\mathbf{p}| = E$ setzen und damit alle Beiträge proportional m_e^2 in den eckigen Klammern von (8.59) vernachlässigen. Damit erhalten wir für den differentiellen Streuquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{\text{SS}} = \frac{\alpha^2}{16E^4}\frac{p'}{E}\left(E^2 + m_\ell^2 + p'^2\cos\vartheta\right). \tag{8.60}$$

und für den totalen Streuquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\theta\,\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2}\frac{p'}{E}\left(E^2 + m_\ell^2 + \frac{1}{3}p'^2\right). \tag{8.61}$$

Abb. 8.3 zeigt die ausgezeichnete Übereinstimmung von Gleichung (8.61) mit experimentellen Ergebnissen für $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ Übergänge. Dabei wird (8.61) dazu benutzt m_τ an das Experiment zu fitten. Man erhält auf diese Weise die Tauonenmasse $m_\tau = 1782\,\text{MeV}$.

Im extrem relativistischen Grenzfall wird $E \gg m_\ell$ und wir erhalten:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{\text{SS}} = \frac{\alpha^2}{16E^2}\left(1 + \cos^2\vartheta\right), \qquad \sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}. \tag{8.62}$$

Ergebnisse für den relativistischen Grenzfall sind in Abb. 8.4 dargestellt.

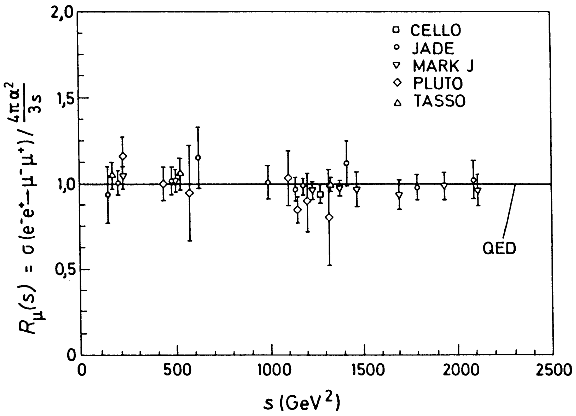


Abbildung 8.4: Daten für den totalen Wirkungsquerschnitt des Prozesses $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^-$ im relativistischen Grenzfall (8.62) als Funktion von $E^2 = s$ dividiert durch das Ergebnis von Gleichung (8.62). Nach D. Haidt, *Experimental Tests of Gauge Theories*, Bericht DESY 84-108 (1984).

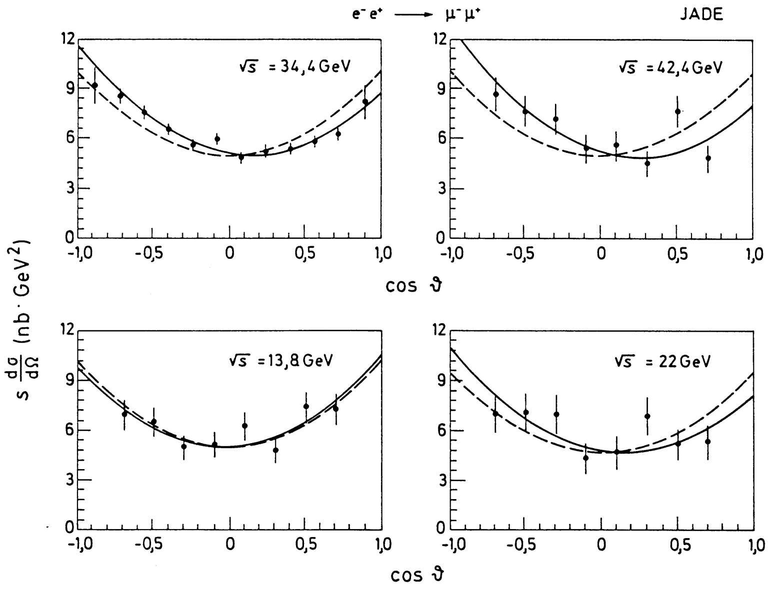


Abbildung 8.5: Die Winkelverteilung von Muonen im Prozess $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Die experimentellen Daten wurden von der JADE Gruppe bei den angegebenen Schwerpunktsenergien $E = \sqrt{s}$ gemessen. Die gestrichelte Linie entspricht der Vorhersage der QED nach Gleichung (8.62). Die durchgezogenen Linien berücksichtigen Ergebnisse der elektroschwachen Wechselwirkung. Nach W. Bartel, *et al.* (JADE Kollaboration), Z. Phys. C **26**, 507 (1985).

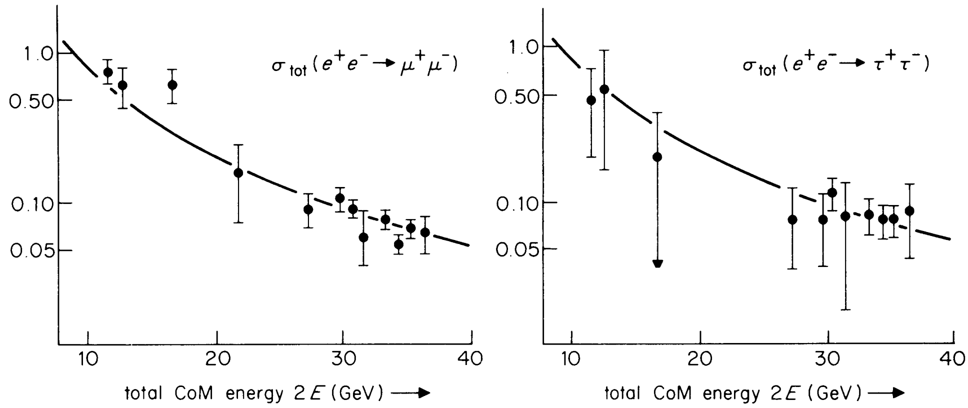


Abbildung 8.6: Die totalen Wirkungsquerschnitte für die Prozesse $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$ und $e^+ e^- \to \tau^+ \tau^-$ bei relativistischen Energien. • kennzeichnet wieder die experimentellen Daten und die ausgezogene Kurve das Ergebnis nach (8.62). Nach P.B. Barber *et al.*, Phys. Rev. Lett. **43**, 1915 (1979).

Auch hier erkennt man die exzellente Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie. Erst bei sehr hohen Energien sieht man Abweichungen von der QED, welche, wie in Abb. 8.5 dargestellt, durch Berücksichtigung der elektroschwachen Wechselwirkung behoben werden können. Schließlich sind noch experimentelle Ergebnisse für die Prozesse $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$ und $e^+ e^- \to \tau^+ \tau^-$ im relativistischen Energiebereich dem Ergebnis von Gleichung (8.62) in Abb. 8.6 gegenübergestellt.

Die Ergebnisse für hohe Energien sind von besonderem Interesse, da durch sie die Wechselwirkung auf sehr kleine Abstände eingeschränkt wird. Im SS-System ist die Energie des virtuellen Photons $2E$ und diese entspricht einer Zeitskala von $\hbar/2E$ wegen

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV/s} \quad \to \quad t \sim \frac{\hbar}{E},$$

und einem entsprechenden Abstand $\hbar c/2E$ wegen:

$$\hbar c = 1.973 \times 10^{-11}\,\mathrm{MeV\,cm} \quad \to \quad \Lambda \sim \frac{\hbar c}{E}.$$

Ist nun $E \equiv 15\,\mathrm{GeV} = 15 \times 10^3\,\mathrm{MeV}$, so haben wir eine Entfernung von etwa

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1.973 \times 10^{-11}\,\mathrm{MeV\,cm}}{30 \times 10^3\,\mathrm{MeV}} \\ &\simeq \frac{2}{30} \times 10^{-15}\,\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

Wer ersehen aus Abb. 8.6, daß selbst für diese Energie die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment hervorragend ist. Wir können daraus schließen, daß selbst bei diesen Energien Elektronen, Muonen und Tauonen durch Punktteilchen adäquat beschrieben werden können. (Der oben bestimmte Abstand ist um fast vier Zehnerpotenzen kleiner als der mittlere Ladungsradius eines Protons.)

8.5 Streuung an einem externen Feld

Bisher wurde das elektromagnetische Feld als quantisiertes Feld beschrieben, wobei Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verwendet wurden. Sind aber die Quantenfluktuationen bedeutungslos, so kann man das Feld als rein klassische Funktion von Raum- und Zeitkoordinaten auffassen. Ein Beispiel hiezu ist die Streuung von Elektronen oder Positronen an einem aufgeprägten 'externen' elektromagnetischen Feld $A_e^\mu(x^\mu)$, wie etwa die Streuung am Coulombfeld eines schweren Kernes, wie sie in Abschnitt 8.1 beschrieben wurde. In einem allgemeinen Fall wird man beide Anteile des elektromagnetischen Feldes (das 'interne' und das aufgeprägte 'externe' Feld) zu behandeln haben, also $A^\mu(x^\mu) + A_e^\mu(x^\mu)$. Das ergibt in der S-Matrix Entwicklung:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \\ &\times \mathcal{T}\left\{ \mathcal{N}\left[\hat{\bar{\psi}}\,(\not{A} + \not{A}_e)\,\hat{\psi}\right]_{x_1} \cdots \left[\hat{\bar{\psi}}\,(\not{A} + \not{A}_e)\,\hat{\psi}\right]_{x_n} \right\}. \end{aligned} \tag{8.63}$$

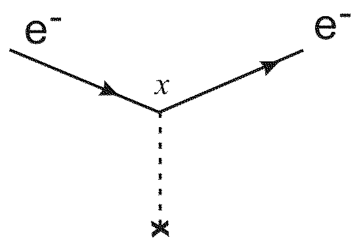
Für ein statisches externes Feld erhalten wir:

$$A_e^\mu(x^\mu) = A_e^\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \; A_e^\mu(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}},$$

und in erster Ordnung ist dann durch

$$\hat{S}_e^{(1)} = ie \int d^4x \; \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x^\mu) \; \not{A}_e(x^\mu) \hat{\psi}^{(+)}(x^\mu)$$

die Streuung eines Elektrons an diesem Feld gegeben. Wir beschreiben dies durch den Feynman Graphen:



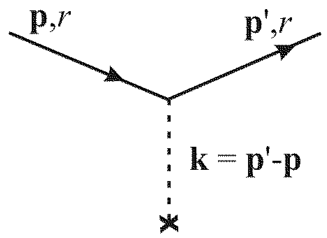
Ist nun der Anfangszustand $|i\rangle$ durch $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ und den Spinor $u_r(\mathbf{p})$ gegeben und der Endzustand $|f\rangle$ durch $p'^\mu = (E', \mathbf{p}')$ sowie den Spinor $u_s(\mathbf{p}')$, so kann man das Matrixelement für den Prozess erster Ordnung unmittelbar angeben

$$\left\langle f \left| \hat{S}_e^{(1)} \right| i \right\rangle = \left[2\pi\delta(E' - E) \left(\frac{m_0}{\Omega E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_0}{\Omega E'} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M}, \tag{8.64}$$

mit der Feynman Amplitude

$$\mathcal{M} = ie\bar{u}_s(\mathbf{p}') \not{A}_e(\mathbf{k} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}). \tag{8.65}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (7.36) fehlt in (8.64) die δ-Distribution der Viererimpulserhaltung, da wir den Impuls der Quelle des Feldes ignorieren, welche einen Rückstoß $\mathbf{k} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ erfährt. Die δ-Distribution in (8.64) führt zu einer Erhaltung der Energie des Elektrons, also zu elastischer Streuung $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$. Dies verlangt, daß die Rückstoßenergie der Quelle vernachlässigbar ist, was die Konsequenz der Annahme eines klassischen Feldes ist. Wir erhalten also folgendes Feynman Diagramm im Impulsraum:



Die Unterschiede zu (7.36) bestehen also im Ersatz

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p) \quad \rightarrow \quad 2\pi\delta(E' - E),$$

und in dem Ersatz

$$\left(\frac{1}{2\Omega\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') \quad \rightarrow \quad A_{e\alpha}(\mathbf{k}).$$

Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar auf die Feynman Regeln für die Wechselwirkung mit externen, statischen Feldern übertragen:

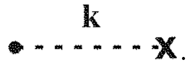
- In dem Term, welcher die Feynman Amplitude mit dem S-Matrix Element verknüpft ist

  $$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \quad \rightarrow \quad 2\pi\delta(E_f - E_i),$$

  zu setzen, wobei E_i und E_f die Gesamtenergien aller Teilchen im Anfangs- bzw. Endzustand sind.

- Folgende Regel ist anzufügen:
  Für jede Wechselwirkung eines geladenen Teilchens mit dem externen, statischen elektromagnetischen Feld $A_e^\mu(\mathbf{r})$ schreiben wir

  $$A_{e\alpha}(\mathbf{k}) = \int d^3r\, A_{e\alpha}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} \qquad (\alpha)$$

  $\mathbf{k}$ ist dabei der Impulsübertrag des Feldes an das Teilchen, dessen Energie am Vertex erhalten bleibt.

Wir bestimmen nun den Wirkungsquerschnitt für die Streuung des Elektrons an einem beliebigen externen, statischen elektromagnetischen Feld. Entsprechend Gleichung (8.64) erhalten wir die Übergangsrate

$$w = \frac{1}{T}\left|\left\langle f \,\middle|\, \hat{S}_e^{(1)} \,\middle|\, i \right\rangle\right|^2 = 2\pi\delta(E' - E)\left(\frac{m_0}{\Omega E}\right)^2 |\mathcal{M}|^2 .$$

Wir multiplizieren dies wieder mit der Dichte der Endzustände (8.15) und dividieren durch den Fluß einfallender Teilchen $\Phi = v_{rel}/\Omega = |\mathbf{p}|/(\Omega E)$. Dies ergibt den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^2 |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{m_0 e}{2\pi}\right)^2 \left|\bar{u}_s(\mathbf{p}')\, \not{A}_e(\mathbf{k}) u_r(\mathbf{p})\right|^2 ,$$

mit $\mathbf{k} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ und $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$. Setzen wir nun

$$A_e^\alpha(\mathbf{k}) = \left(\frac{Ze}{|\mathbf{k}|^2}, 0, 0, 0\right), \tag{8.66}$$

so erhalten wir natürlich wieder das bekannte Ergebnis (8.28).

Die hier erhaltenen Ergebnisse kann man aber leicht so erweitern, daß man die Polarisationseigenschaften von Elektronen bei ihrer Streuung am Coulombpotential untersuchen kann. Für nicht relativistische Energien ist das Ergebnis natürlich schon bekannt. Das Coulombpotential (8.66) und die Streu-Amplitude sind spinunabhängig. Dies bedeutet, daß bei der RUTHERFORD-Streuung der Spin erhalten bleibt. Interpretiert man dies unter Verwendung der Helizität und hat das einfallende Elektron etwa positive Helizität, dann hat das gestreute Elektron bei Vorwärtsstreuung positive und bei Rückwärtsstreuung negative Helizität. Für Streuwinkel zwischen diesen beiden Grenzwerten folgt aus den Dreheigenschaften der Spinoren, daß bei Streuung um einen Winkel ϑ die Wahrscheinlichkeit für positive Helizität gleich $\cos^2(\vartheta/2)$ und für negative Helizität gleich $\sin^2(\vartheta/2)$ ist. Dies folgt auch aus Gleichung (8.19). Man erkennt, daß im nicht relativistischen Limes der Hauptterm proportional

$$\lim_{\mathbf{p}\to\mathbf{0},\mathbf{p}'\to\mathbf{0}} \left[\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right\} = u_s^*(\mathbf{0}) u_r(\mathbf{0}) = \delta_{r,s}$$

ist; der Spin wird also erhalten.

Bei relativistischen Energien wird die Streuung spinabhängig; dies kommt daher, daß das magnetische Moment des Elektrons mit dem magnetischen Feld wechselwirkt, welches das Elektron in seinem eigenen Ruhesystem 'sieht'. (Dies ist auch der Grund für den den Term $-v_{rel}\sin^2(\vartheta/2)$ in der MOTTschen Streuformel (8.28)). Will man nun die Polarisationseigenschaften diskutieren, so ist es wiederum praktisch die Helizitäts-Projektionsoperatoren, wie in Abschnitt 8.2 zu verwenden. Wir untersuchen nun einen Streuvorgang, in welchem das einfallende Elektron positive Helizität habe, es ist also im Spinzustand $u_1(\mathbf{p})$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das gestreute Elektron positive oder negative Helizität hat ist dann entsprechend (8.19) gleich

$$X_s = \left|\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_1(\mathbf{p})\right|^2 , \qquad \begin{cases} s=1, & \text{positive Helizität} \\ s=2, & \text{negative Helizität.} \end{cases}$$

Unter Verwendung von (8.42) und (8.45) erhält man dafür

$$X_s = \mathrm{Tr}\left\{\Lambda^+(\mathbf{p}')\gamma^0\Pi^+(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p})\gamma^0\Pi^\pm(\mathbf{p}')\right\} ,$$

wobei das plus bzw. minus Zeichen an $\Pi^\pm(\mathbf{p})$ $s=1$ bzw. $s=2$ entspricht. Im extrem relativistischen Limes, $E=E'\gg m_0$ ist der Helizätsoperator durch

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(1\pm\gamma^5\right)$$

gegeben, und damit erhalten wir

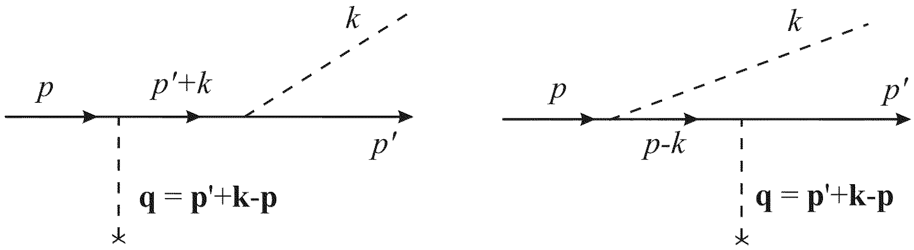
$$X_s = \frac{1}{16m_0^2}\mathrm{Tr}\left\{(\not p' + m_0)\,\gamma^0(1+\gamma^5)\,(\not p + m_0)\,\gamma^0(1\pm\gamma^5)\right\} . \qquad (8.67)$$

Nun sind p^μ und p'^μ von der Ordnung E und man könnte erwarten, daß die führenden Beiträge zu X_s von jenem Teil der Spur in (8.65) kommen werden, welche sowohl $\not p$ als auch $\not p'$ als Faktoren enthalten. X_s würde dann von der Ordnung $(E/m_0)^2$ sein. Für $s=1$ ist dies tatsächlich der Fall, für $s=2$ hingegen besteht der einzige von Null verschiedene Beitrag aus jenem Teil der Spur, welcher proportional m_0^2 und damit unabhängig von p^μ und p'^μ ist. Im extrem relativistischen Limes verschwindet dann der Beitrag X_2 und die Helizität bleibt erhalten. Dies steht in Kontrast zum nicht relativistischen Grenzfall $|\mathbf{p}|\ll m_0$, in welchem der Spin erhalten bleibt und die Wahrscheinlichkeit des Springens der Helizität gleich $\sin^2(\vartheta/2)$ ist. Für alle anderen Energien muß man die Spur in (8.67) exakt auswerten.

8.6 Bremsstrahlung

Die Streuung eines Elektrons am Coulombfeld eines schweren Kernes, welche wir zuvor untersucht haben, impliziert, daß das Elektron Strahlung abgeben muß und somit in seiner Bewegung langsamer werden muß. Allgemeiner - die Streuung jedes geladenen Teilchens führt zur Abgabe von Strahlung. Diese Strahlung wird *Bremsstrahlung* genannt. Dieser Prozess wird in Elektronenbeschleunigern dazu benützt um Photonenstrahlung zu erzeugen.

Wir betrachten nun aber Prozesse, in welchen sowohl das quantisierte als auch das externe Feld (das Coulombfeld des Kernes) eine Rolle spielen. Das quantisierte Feld beschreibt die Abgabe von Strahlung und das externe Feld stellt die Erhaltung von Energie und Impuls sicher. In niedrigster Ordnung wird der Prozess durch einen Term zweiter Ordnung in der S-Matrix Entwicklung beschrieben. Wir erhalten die Feynman Diagramme:



Die Anwendung der Feynman Regeln führt sofort zum Matrixelement

$$\left\langle f \left| \hat{S} \right| i \right\rangle = 2\pi\delta(E' + \omega - E) \left(\frac{m_0}{\Omega E}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_0}{\Omega E'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M},$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -e^2\bar{u}(\mathbf{p}') \left[\not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(p'+k) \not{A}_e(\mathbf{q}) iS_F(p-k) \not{\epsilon}(\mathbf{k})\right] u(\mathbf{p}) \\ &= -ie^2\bar{u}(\mathbf{p}') \left[\not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m_0}{2p'k} \not{A}_e(\mathbf{q}) + A_e(\mathbf{q}) \frac{\not{p} - \not{k} + m_0}{-2pk} \not{\epsilon}(\mathbf{k})\right] u(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

$A_e^\alpha(\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p})$ ist das Coulombpotential.

Wir finden den Wirkungsquerschnitt wieder durch Multiplikation der Übergangsrate $\left|\left\langle f \left| \hat{S} \right| i \right\rangle\right|^2 /T$ mit der Dichte der Endzustände

$$\frac{\Omega}{(2\pi)^6} d^3p'\, d^3k,$$

und durch Division mit dem einfallenden Elektronenfluß im Laborsystem $\Phi = |\mathbf{p}| / (\Omega E)$. Damit finden wir:

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{m_0^2}{(2\pi)^5 2\omega} \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} |\mathcal{M}|^2\, d^3k. \tag{8.68}$$

In (8.68) wird dann über die Anfangsspins gemittelt und über die Endspins summiert, was ein eher langes Unterfangen ist. Wir wollen uns hier zunächst auf den Fall konzentrieren, daß die emittierten Photonen von sehr niedriger Energie sind, also $\omega \approx 0$ ist. Man spricht von 'weichen' Photonen. In diesem Grenzfall gilt $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ und $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$, wie zuvor für die elastische Streuung. Wir vernachlässigen daher in der Feynman Amplitude die $\not{k}$-Beiträge im Zähler der Elektronenpropagatoren

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\not{\varepsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + m_0}{2p'k} \not{A}_e(\mathbf{q}) + A_e(\mathbf{q}) \frac{\not{p} + m_0}{-2pk} \not{\varepsilon}(\mathbf{k}) \right] u(\mathbf{p}) \\
&= -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{A}_e(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \left[\frac{p'\varepsilon(\mathbf{k})}{p'k} - \frac{p\varepsilon(\mathbf{k})}{pk} \right], \qquad \omega \approx 0 \\
&= -e\mathcal{M}_0 \left[\frac{p'\varepsilon(\mathbf{k})}{p'k} - \frac{p\varepsilon(\mathbf{k})}{pk} \right], \qquad \omega \approx 0, \qquad (8.69)
\end{aligned}$$

mit $\mathcal{M}_0$ aus Gleichung (8.65). Dies war der Fall der reinen Coulombstreuung, und er führte zum Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^2 |\mathcal{M}_0|^2 = \left(\frac{m_0 e}{2\pi}\right)^2 |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \not{A}_e(\mathbf{k}) u(\mathbf{p})|^2 .$$

Für die Bremsstrahlung finden wir dann:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_B = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_0 \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{p'\varepsilon(\mathbf{k})}{p'k} - \frac{p\varepsilon(\mathbf{k})}{pk} \right]^2 \frac{d^3k}{\omega}, \quad \omega \approx 0. \qquad (8.70)$$

Auffallend ist nun, daß $\mathcal{M}$, wie auch der Streuquerschnitt, im Infrarotlimit $\omega \to 0$ singulär wird. Diese Singularität folgt aus der Tatsache, daß für $k = 0$, $p^2 = p'^2 = m_0^2$ gilt, wodurch das Zwischenzustandselektron in den Feynman Diagrammen den Viererimpuls eines reellen Elektrons aufweist, was dazu führt, daß die Propagatoren divergieren. Die Faktorisierung des Wirkungsquerschnittes mit dem der elastischen Streuung ohne Bremsstrahlung und das Auftreten der *Infrarotsingularität* sind charakteristische Eigenschaften von Strahlungsprozessen mit weichen Photonen. Summiert man schließlich noch über die Polarisation der emittierten Photonen, so findet man schließlich:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_B = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_0 \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \frac{d^3k}{\omega}, \quad \omega \approx 0. \qquad (8.71)$$

8.6.1 Qualitative Aussagen zur Bremsstrahlung

Wir verwenden für die Viererimpulse im Diagramm auf Seite 153 folgende Schreibweise:

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad p'^\mu = (E', \mathbf{p}'), \quad k^\mu = (\omega, \mathbf{k}).$$

Nach den Feynman Regeln für die Streuung am Kern erhalten wir die Amplitude

$$ie\gamma^0 \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \int dt d^3 r\, e^{i(E'-E+\omega)t} e^{iq^\mu x_\mu} eZ\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = -ie\gamma^0 \frac{eZ}{|\mathbf{q}|^2} 2\pi\delta(E'-E+\omega), \tag{8.72}$$

mit $\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}$. Das Kernfeld ist statisch, woraus die Energieerhaltung folgt; es gibt aber Impulserhaltung für die ein- und auslaufenden Teilchen. Der statische Kern kann nämlich beliebige Rückstoßimpulse $\mathbf{q}$ aufnehmen und wir sehen, daß die Amplitude (8.72) für kleine Rückstoßimpulse groß wird. Wir interessieren uns nun für den kinematischen Bereich, also jenen mit hohen Energien:

$$\begin{aligned} E,\, E',\, \omega &\gg m_0, \\ E',\, \omega &= \mathcal{O}(E). \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, daß $|\mathbf{q}|$ nur dann klein werden kann, wenn Elektron und Photon im Endzustand praktisch in die selbe Richtung fliegen, die das Elektron im Anfangszustand einhielt. Dies ist bei Energieerhaltung offensichtlich, da diese für hohe Energien $|\mathbf{p}| \simeq |\mathbf{p}'| + |\mathbf{k}|$ liefert. Dann ist aber $|\mathbf{q}|^2 = (|\mathbf{p}'| + |\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|)^2 \simeq 0$ praktisch nur für kolineare Vektoren zu erfüllen.

Wir wählen nun die Einfallsrichtung parallel zur z-Achse, also:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E - \frac{m_0^2}{2E} \end{pmatrix},$$

und es gelte dann

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_\perp \\ E' - \frac{m_0^2 + |\mathbf{p}'_\perp|^2}{2E} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_\perp \\ \omega - \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\omega} \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}'_\perp + \mathbf{k}'_\perp \\ \underbrace{E' + \omega - E}_{=0} + \frac{m_0^2}{2E} - \frac{m_0^2 + |\mathbf{p}'_\perp|^2}{2E} + \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\omega} \end{pmatrix},$$

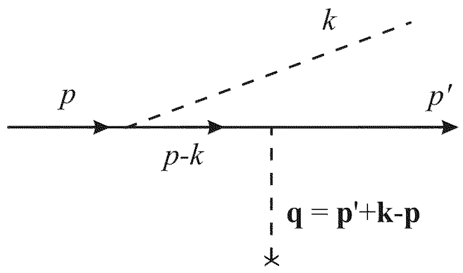
woraus

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}'_\perp + \mathbf{k}_\perp|^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{m_0^2}{E}\right)^2\right] \tag{8.73}$$

folgt. Der Streuquerschnitt ist proportional $|\mathbf{q}|^{-4}$ und damit liefert uns (8.73) ein Maß für die Breite der Verteilung in $|\mathbf{p}'_\perp + \mathbf{k}_\perp|^2$. Wesentliche Beiträge zum Streuquerschnitt können wir für

$$|\mathbf{p}'_\perp + \mathbf{k}_\perp| \lesssim \mathcal{O}\left(\frac{m_0^2}{E}\right) \tag{8.74}$$

erwarten, woraus sich ergibt, daß die Summe aus Transversalimpuls des Elektrons und des Photons bei hohen Energien sehr klein wird. Die Größenordnung soll nun abgeschätzt werden. Wir betrachten dazu das Feynman Diagramm



Somit gibt das virtuelle Elektron folgenden Beitrag:

$$\begin{aligned} i\frac{\not p - \not k + m_0}{(p-k)^2 - m_0^2} &= -i\frac{\not p - \not k + m_0}{2p^\mu k_\mu} \\ &= -i\frac{\not p - \not k + m_0}{2(E\omega - \mathbf{pk})} \\ &\simeq -i\frac{\not p - \not k + m_0}{\frac{E}{\omega}\left[|\mathbf{k}_\perp|^2 + \left(\frac{\omega}{E}\right)^2 m_0^2\right]}. \end{aligned}$$

Ist nun, wie vorausgesetzt wurde, $E/\omega \approx 1$, so finden wir wesentliche Beiträge, wenn

$$|\mathbf{k}_\perp| \lesssim \mathcal{O}(m_0)$$

erfüllt ist, was wegen(8.75) auch zu

$$|\mathbf{p}'_\perp| \lesssim \mathcal{O}(m_0)$$

führt. Für das zweite Diagramm auf Seite 153 erhalten wir eine analoge Abschätzung. Der typische Winkel, unter welchem die Bremsstrahlung hochenergetischer Elektronen emittiert wird, ist somit von der Größenordnung

$$\vartheta = \frac{|\mathbf{k}_\perp|}{\omega} \lesssim \frac{m_0}{E}.$$

Wir benützen nun dieses Ergebnis um die Größenordnung des Streuquerschnittes zu ermitteln. Ein solcher Streuquerschnitt setzt sich ganz allgemein aus einem geometrischen Faktor und einem Wahrscheinlichkeitsfaktor ("Graufaktor") zusammen. Der geometrische Faktor gibt an, welche Fläche das Projektil überhaupt treffen muß, damit überhaupt etwas geschieht. Selbst wenn die geometrischen Voraussetzungen erfüllt sind, muß natürlich nicht immer eine Reaktion stattfinden. (Klassisch interpretiert: Betrachtet man die

Absorption von Licht an einer grauen Glaskugel, so wird je nach Grauton mehr oder weniger Licht absorbiert, ohne daß sich der geometrische Querschnitt ändert $\rightarrow$ dies erklärt das Synonym Graufaktor für den Wahrscheinlichkeitsfaktor!)

In unserem Fall von Transversalimpulsen der Größenordnung m_0 kann der geometrische Faktor nach der Unschärferelation mit $1/m_0^2$ abgeschätzt werden. Der Wahrscheinlichkeitsfaktor kann über die Koppelungsparameter abgeschätzt werden (siehe auch Gleichung (8.69)):

$$\text{Wahrscheinlichkeitsfaktor:} \sim (e^3 Z)^2 \sim Z^2 \alpha^3.$$

Dies ist für alle Kerne viel kleiner als Eins. Damit finden wir für den totalen Streuquerschnitt die Abschätzung

$$\sigma_{tot} \simeq \frac{Z^2 \alpha^3}{m_0^2} = \bar{\sigma}. \tag{8.75}$$

Eine explizite Rechnung (W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press, Oxford (1970), 3. Auflage) für $E \gg \omega$, $E' = E - \omega \gg m_0$ ergibt.

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \bar{\sigma} \frac{2}{3\omega} \left[4 - 4\frac{\omega}{E} + r \left(\frac{\omega}{E} \right)^2 \right] \left[2 \ln \frac{2E(E-\omega)}{m_0 \omega} - 1 \right]. \tag{8.76}$$

Der differentielle Streuquerschnitt ist in der Tat von der Größenordnung $\bar{\sigma}$, zeigt aber für $\omega \rightarrow 0$ das für Bremsstrahlung charakteristische Verhalten $1/\omega$. Der totale Streuquerschnitt scheint also zu divergieren. Mit dieser *Infrarot Divergenz* werden wir uns im nächsten Abschitt beschäftigen.

8.6.2 Der Wirkungsquerschnitt für den Energieverlust durch Bremsstrahlung

Geht ein schnelles Elektron durch Materie, so verliert es Energie durch die Zusammenstöße mit gebundenen Elektronen, welche zur Anregung und Ionisation von Atomen führen, und durch Bremsstrahlung. Bei großen Energien dominiert die Bremsstrahlung und wir wollen nun die von einem Elektron pro Einheit der zurückgelegten Wegstrecke im Mittel durch Bremsstrahlung abgegebene Energie berechnen. Wir betrachten dazu das in Abbildung 8.7 dargestellte Experiment. Ein Elektronenstrahl des Flusses Φ und des Querschnitts A trifft auf ein Stück Materie (Target) der Dicke Δx. Die Anzahl der Atome pro Volumseinheit im Target sei N. Wir haben dann eine Rate

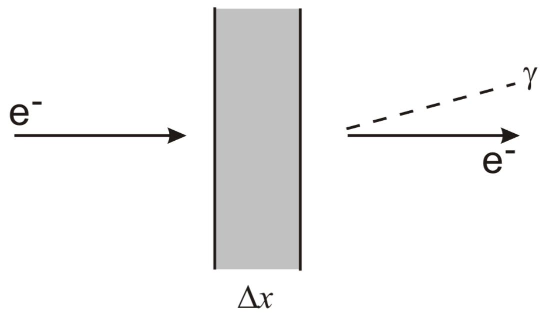


Abbildung 8.7: Schema einer Anordnung zur Messung des Energieverlustes von Elektronen, welche durch ein Stück Materie der Dicke Δx gehen.

$d\Gamma(\omega)$ für die Emission der Bremsstrahlung mit einer Energie im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$, welche durch

$$d\Gamma(\omega) = d\sigma(\omega)\Phi NA\Delta x$$

gegeben ist. Wir haben dann $NA\Delta x$ Streuzentren. Im Zeitintervall T treffen ΦAT Elektronen das Target und damit finden wir die im Mittel von einem Elektron abgestrahlte Energie $-\Delta E$:

$$-\Delta E = \frac{T\int_0^E d\Gamma(\omega)\, m_0}{\phi AT} = \int_0^E d\sigma(\omega)\, \omega N\Delta x.$$

Somit ergibt sich folgende Differentialgleichung für die Abnahme der Elektronen-Energie:

$$-\frac{dE}{dx} = N\int d\sigma(\omega)\, \omega. \tag{8.77}$$

Es gilt nun

$$\omega\frac{d\sigma(\omega)}{d\omega} \sim \text{konst.} \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq E,$$

und daraus ist zu ersehen, daß das Elektron seine Energie durch Abstrahlung von einigen (wenigen) harten Photonen verliert; das Integral in (8.77) wird so proportional zur Primärenergie E. Wir legen dann einen Querschnitt σ_{rad} für den Energieverlust durch Bremsstrahlung mit

$$\sigma_{rad} = \frac{1}{E}\int_0^E d\sigma(\omega)\, \omega$$

fest, und finden

$$-\frac{dE}{dx} = N\sigma_{rad}(E)E. \tag{8.78}$$

Tabelle 8.1: Die Strahlungslängen einiger Materialien. Nach Particle Data Group, Rev. Mod. Phys. **56**, Part II (1984).

Material	Strahlungslänge L_{rad} (cm)
Fe	1.76
Pb	0.56
Luft (bei 20° C, 1 atm.)	30420
H_2O	36.1

Damit ist σ_{rad} von der Größenordnung $\bar{\sigma}$. Tatsächlich ergibt die Integration von (8.76) für $E \gg m_0$:

$$\sigma_{rad} = 4\left(\ln\frac{2E}{m_0} - \frac{1}{3}\right)\bar{\sigma}.$$

Diese Ergebnisse gelten für nackte Kerne. Für wirkliche Atome ist der Einfluß der Elektronenhülle zu berücksichtigen, welche einerseits das Kernfeld abschirmt, andererseits aber auch zusätzlich Bremsstrahlung durch Elektronen-Elektronen Streuung produziert.

Die Lösung von (8.78) ergibt

$$E(x) = E_0 \exp\left\{-\frac{x}{L_{rad}}\right\},$$

mit der *Strahlungslänge* oder *charakteristische Abklinglänge*:

$$L_{rad} = (N\sigma_{rad})^{-1}.$$

Die Strahlungslängen einiger wichtiger Materialien sind in Tabelle 8.6.2 angegeben.

8.7 Die Infrarot-Divergenz

Die zuvor diskutierten Ergebnisse sind wesentlich für experimentelle Untersuchungen zur Elektronenstreuung. Bei einem solchen Experiment kann es auch vorkommen, daß ein Photon emittiert wird, welches zu weich ist um entdeckt zu werden. Schließlich ist noch die Energieauflösung des Detektors ΔE wesentlich, da sie es bestimmt ob ein Streuprozess als elastischer oder als inelastischer registriert wird. Es ist somit der *experimentelle* Wirkungsquerschnitt die Summe aus elastischem und aus dem Querschnitt für

Bremsstrahlung für Energien kleiner ΔE; somit gilt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{el} + \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{B}, \tag{8.79}$$

wobei $(d\sigma/d\theta')_B$ der Wirkungsquerschnitt der weichen Bremsstrahlung ist, integriert über die Photonenenergien $0 \le \omega \le \Delta E$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{B} &= \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{0} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \int\limits_{0\le|\mathbf{k}|\le\Delta E} \frac{d^3k}{\omega} \left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{0} \alpha B. \end{aligned} \tag{8.80}$$

Wir nehmen dabei an, daß ΔE klein genug ist um (8.71) vewenden zu können.

Wir sehen, daß sich der Integrand in (8.79) für kleine ω wie ω^{-1} verhält, sodaß er am unteren Integrationslimit logarithmisch divergent wird. Dies ist die *Infrarot-Katastrophe.* Sie ist die Folge der Masselosigkeit des Photons und man kann dieses Problem etwa nach FEYNMAN dadurch lösen, indem man dem Photon eine fiktive kleine Masse $\lambda \neq 0$ zuordnet und am Schluß der Rechnungen den Limes $\lambda \to 0$ bildet um wiederum QED zu erreichen.

Dadurch wird (8.79) modifiziert und auch die Feynman-Amplitude $\mathcal{M}$, da in den Nennern der Elektronenpropagatoren nunmehr $k^\mu k_\mu = \lambda^2$ an Stelle von $k^\mu k_\mu = 0$ zu setzen ist. All dies führ dazu, daß (8.70) durch

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{0} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{2p'\varepsilon(\mathbf{k})}{2p'k+\lambda^2} + \frac{2p\varepsilon(\mathbf{k})}{-2pk+\lambda^2}\right] \frac{d^3k}{\omega}$$

zu ersetzen ist. Mit $\lambda \neq 0$ können die Photonen sowohl longitudinal als auch transversal polarisiert sein, und die Summe über die Polarisationsrichtungen ergibt (ohne Beweis):

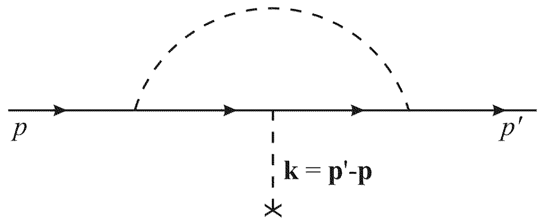
$$\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_{r\alpha}\varepsilon_{r\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{\lambda^2}.$$

Der Term $k_\alpha k_\beta/\lambda^2$ gibt dabei im Limes $\lambda \to 0$ keinen Beitrag zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt. Für die nicht polarisierten Wirkungsquerschnitte der weichen Bremsstrahlung im Bereich $\lambda \le \omega \le \Delta E$ erhalten wir dann

$$B(\lambda) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \left[\frac{2p'}{2p'k+\lambda^2} + \frac{2p}{-2pk+\lambda^2}\right]^2, \tag{8.81}$$

mit $\omega_\lambda = \sqrt{\lambda^2 + |\mathbf{k}|^2}$. Die Integration erfolgt über alle Vektoren $\mathbf{k}$ derart, daß $\lambda \le \omega_\lambda \le \Delta E$ ist. Somit ist $B(\lambda)$ endlich und wohl definiert und geht für $\lambda \to 0$ in (8.73) über.

Aus (8.79) folgt weiter, daß der Wirkungsquerschnitt der Bremsstrahlung von der Ordnung α gegenüber dem elastischen Wirkungsquerschnitt ist. Wir müssen daher Korrekturen der Ordnung α in den elastischen Wirkungsquerschnitt einbeziehen, welche aus der nächsten Ordnung S-Matrix Theorie folgen. Ein solches Feynman Diagramm ist etwa durch



gegeben; es resultiert in

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_0 [1 + \alpha R(\lambda)]\,, \tag{8.82}$$

und damit erhalten wir für unser Experiment aus Abb. 8.7:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_0 \left\{1 + \alpha\,[B(\lambda) + R(\lambda)] + \mathcal{O}(\alpha^2)\right\}. \tag{8.83}$$

Wir haben schon früher gefunden, daß $\lim_{\lambda\to 0} B(\lambda) = \infty$. Andererseits findet man, daß $\lim_{\lambda\to 0} R(\lambda) = -\infty$, und zwar derart, daß sich beide Singularitäten exakt aufheben. Damit ist $[B(\lambda) + R(\lambda)]$ definiert und endlich. Man kann nun den Grenzübergang $\lambda \to 0$ ausführen, und man erhält eine endliche Korrektur der Ordnung α in niedrigster Ordnung zum elastischen Streuquerschnitt. Diese Korrekturen sind die sogenannten *Strahlungskorrekturen.*

Der experimentelle Wirkungsquerschnitt hängt von der Energieauflösung ΔE ab, und hängt somit vom Aufbau des Experimentes ab. Man rechnet daher häufig Strahlungskorrekturen von den Meßwerten ab und erhält so *strahlungskorrigierte Wirkungsquerschnitte.* Dies erlaubt einen besseren Vergleich von Ergebnissen, welche an verschiedenen Anlagen gefunden wurden.

Die Infrarotkatastrophe ist, wie wir hier gesehen haben, eigentlich ein Ergebnis unserer Vorgangsweise: wir haben die Bremsstrahlung und die elastische Streuung als getrennte Prozesse behandelt. Diese Trennung ist aber eine künstliche, da man elastische Streuung stets zusammen mit etwas weicher Bremsstrahlung beobachtet und der Wirkungsquerschnitt hiefür endlich ist.

Bisher wurde nur die Emission eines weichen Photons untersucht und die Infrarotkatastrophe zu welcher es führt. In hoch auflösenden Experimenten wird die Emission vieler weicher Photonen wesentlich, welche zu Infrarot-Divergenzen in höherer Ordnung von α führen. Es muß also (8.82) modifiziert werden um Korrekturen höherer Ordnung zur elastischen Streuung inkludieren zu können. Das BLOCH-NORDSIECK-Theorem besagt nun, daß sich die Infrarot-Divergenzen in allen Ordnungen Störungstheorie exakt aufheben.

In Hochenergie-Experimenten können Strahlungskorrekturen in manchen kinematischen Bereichen bis zu 50% ausmachen und daher müssen Multi-Photon Prozesse berücksichtigt werden. Es wurde von D.R. Yennie *et al.* (Ann. Phys. (N.Y.) **13**, 379 (1961)) gezeigt, daß die wesentliche Strahlungskorrektur aus einer Verallgemeinerung von (8.83) folgt, und daß man daraus

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_0 \exp\left\{\alpha\left[B(\lambda) + R(\lambda)\right]\right\}$$

findet, mit den entsprechenden Korrekturen des elastischen Wirkungsquerschnittes:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\theta'}\right)_0 e^{\alpha R(\lambda)}.$$

Da $\lim_{\lambda\to 0} R(\lambda) = -\infty$ gilt, bedeutet dies, daß der reine elastische Wirkungsquerschnitt verschwindet. Es gibt keine wirklich elastische Streuung, jede beobachtete Streuung geladener Teilchen ist mit Strahlung gekoppelt. Dies entspricht dem Ergebnis der klassischen Elektrodynamik, daß eine beschleunigte Ladung strahlen muß.

Jeder Prozess, welcher geladene Teilchen involviert, kann von der Emission weicher Photonen begleitet sein, und Infrarot-Divergenzen treten in all diesen Prozessen auf. Das BLOCH-NORDSIECK-Theorem ist stets anzuwenden; es heben sich also in allen QED-Prozessen die Infrarot-Divergenzen in allen Ordnungen Störungstheorie exakt auf, und damit bleiben endliche Strahlungskorrekturen der Ordnung α übrig. Diese sollen im nächsten Kapitel untersucht werden.