Kapitel 9

Strahlungskorrekturen, Regularisierung, Renormierung

9.1 Allgemeines

Wir haben bisher nur QED in niedrigster Ordnung untersucht. Geht man zu höherer Ordnung über, so sind Korrekturen von der Größenordnung der Feinstrukturkonstante α zu erwarten. Wenn man aber solche Rechnungen ausführt, so trifft man auf divergente Integrale.

In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, wie man diese Probleme überwindet, indem man zuerst die Theorie *regularisiert*, sie also so modifiziert, daß sie endlich und wohldefiniert in jeder Ordnung Störungstheorie bleibt. Der zweite Schritt folgt der Erkenntnis, daß die nicht wechelwirkenden Leptonen und Photonen, von welchen die Störungstheorie ausgeht, nicht dasselbe sind, wie die tatsächlichen Teilchen, welche wechselwirken. Die Wechselwirkung modifiziert die Eigenschaften der Teilchen - Ladung und Masse des Elektrons und die Vorhersagen der Theorie müssen durch die Eigenschaften der physikalischen Teilchen beschrieben werden, und nicht durch die nicht wechselwirkenden, freien, idealisierten Teilchen. Dieser Schrit wird *Renormalisierung* genannt. In einem letzten, dritten, Schritt geht man dann von der regularisierten Theorie wieder auf die QED zurück.

Die Divergenzen der QED erscheinen dann in den Beziehungen zwischen den "nackten" und den physikalischen Teilchen. Die Divergenzen sind natürlich, so wie die nackten Teilchen nicht beobachtbar. Die Observablen der Theorie ausgedrückt durch die beobachteten Massen und Ladungen der Teilchen bleiben endlich. Insbesonders bleiben die Strahlungskorrekturen endlich und von der Ordnung α.

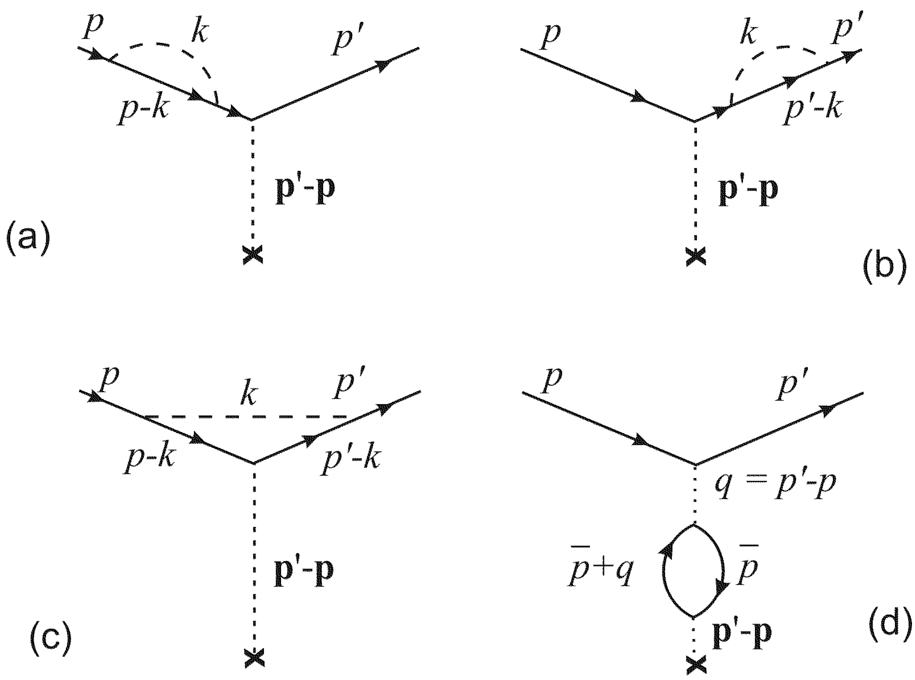


Abbildung 9.1: Die vier Beiträge zu den Strahlungskorrekturen zweiter Ordnung zur Elektronenstreuung.

Dieses hier skizzierte Programm kann für alle Ordnungen Störungstheorie ausgeführt werden, sodaß man Strahlungskorrekturen außerordentlich genau bestimmen kann. Die vollständige Übereinstimmung dieser Vorhersagen mit ebenso präzisen Experimenten - etwa für die anomalen Momente der Leptonen, oder für die Lamb-Shift - stellen einen großen Triumph für die QED dar.

9.2 Die Korrekturen zweiter Ordnung

Wir finden diese Korrekturen direkt aus der S-Matrix Entwicklung unter Anwendung der Feynman Regeln. Die Strahlungskorrekturen führen zu zusätzlichen Vertizes und die Vorgangsweise demonstriert man am einfachsten, indem man die Streuung von Elektronen am stationären Feld studiert. Wir hatten die Feynman Amplitude

$$\mathcal{M}^{(0)} = ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')\, \not{A}_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p})u(\mathbf{p}), \tag{9.1}$$

welche aus dem bekannten Diagramm auf Seite 150 resultiert. Wir bezeichnen hier, und damit auch weiterhin, mit e_0 die Ladungszahl des nackten (also nicht wechselwirkenden) Elektrons; seine Masse wird mit m_0' bezeichnet. (Wir

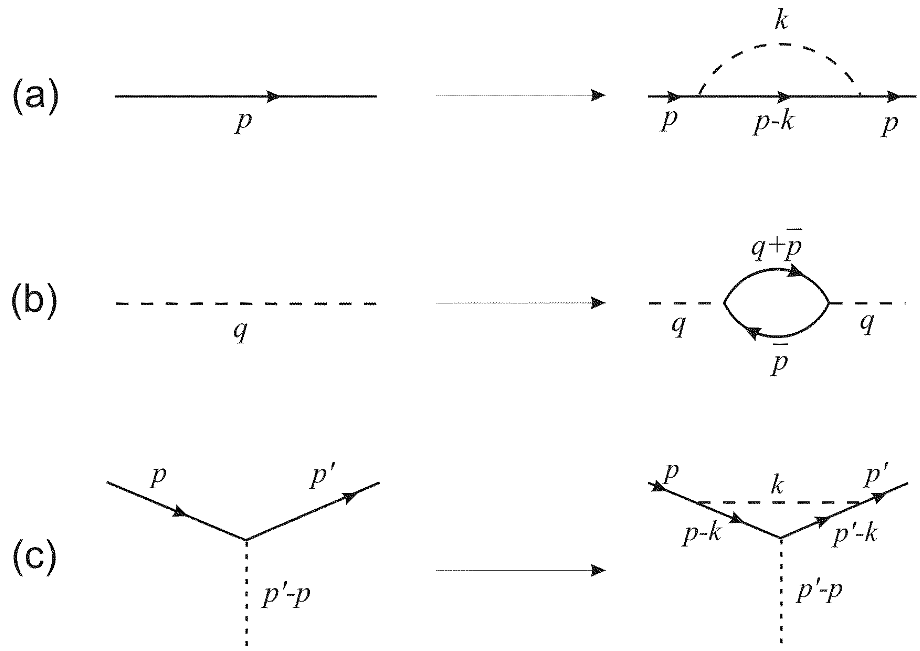


Abbildung 9.2: Die Korrekturen zweiter Ordnung zu Fermionen und Photonen Linien und zum Vertex: (a) die Fermionen Selbstenergie $ie_0^2\Sigma(p^\mu)$, (b) die Photonen Selbstenergie $ie_0^2\Pi(q^\mu)$ und (c) die Vertexkorrektur $e_0^2\Lambda^\mu(p'^\nu, p^\nu)$.

haben hier das Feld als schwach angenommen; dies gestattet es uns nur Terme linear in $A_e^\mu(x^\mu)$ mitzunehmen.) Wir untersuchten die Entwicklung

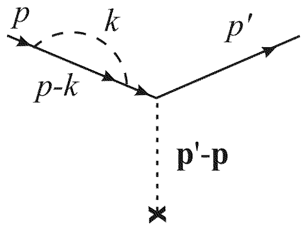
$$\begin{aligned}\hat{S} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^n}{(n-1)!} \int \cdots \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \\ &\quad \times \mathcal{T}\left\{ \mathcal{N}\left(\hat{\bar{\psi}}\, A\!\!\!/_e \hat{\psi}\right)_{x_1} \cdots \mathcal{N}\left(\hat{\bar{\psi}}\, \hat{A\!\!\!/}_e \hat{\psi}\right)_{x_n} \right\}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

und die Feynman Amplitude $\mathcal{M}^{(0)}$ gehört zum Beitrag $n = 1$. Der Beitrag für $n = 2$ ist dann linear im quantisierten Strahlungsfeld $\hat{A}_e^\mu(x^\mu)$. Er enthält somit die Emission oder die Absorption eines Photons - wir erhalten also Terme, welche den Diagrammen der Bremsstrahlung entsprechen. Strahlungskorrekturen zweiter Ordnung, wie sie in Abb. 9.1 dargestellt sind, folgen dann für $n = 3$.

Es ist hervorzuheben, daß alle Diagramme in den äußeren Linien dieselben Zustände angeben. Die Diagramme (a) und (b) aus Abb. 9.1 entsprechen *Loopdiagrammen* der Selbstenergie von Leptonen und beschreiben somit den ersten Schritt von einem "nackten" Lepton zu einem physikalischen. Ganz allgemein werden die in Abb. 9.2 dargestellten Schritte möglich sein.

Für das Feynman Digramm (a) aus Abb. 9.1 finden wir die folgende Feynman Amplitude:

Drei virtuelle Teilchen: 2 Elektronen, 1 Photon:



$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a^{(2)} &= ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')\,\not{A}_e(\mathbf{p}'-\mathbf{p})iS_F(p^\mu)\\ &\quad\times\frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,iD_{F\alpha\beta}(k^\mu)\gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\beta u(\mathbf{p})\\ &= ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')\,\not{A}_e(\mathbf{p}'-\mathbf{p})iS_F(p^\mu)ie_0^2\Sigma(p^\mu)u(\mathbf{p}),\end{aligned} \tag{9.3}$$

mit dem *Elektronen-Selbstenergiebeitrag*

$$ie_0^2\Sigma(p^\mu) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,iD_{F\alpha\beta}(k^\mu)\gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\beta. \tag{9.4}$$

Nach denselben Regeln erhalten für das Feynman Diagramm (b) aus Abb. 9.1:

$$\mathcal{M}_b^{(2)} = ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')ie_0^2\Sigma(p'^\mu)iS_F(p'^\mu)\,\not{A}_e(\mathbf{p}'-\mathbf{p})u(\mathbf{p}). \tag{9.5}$$

Im weiteren finden wir für das Feynman Diagramm (c) von Abb. 9.1:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_c^{(2)} &= ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')\frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma^\alpha iS_F(p'-k)\gamma^\mu iS_F(p-k)\gamma^\beta\\ &\quad\times iD_{F\alpha\beta}(k^\mu)u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\\ &= ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')e_0^2\Lambda^\mu(p',p)u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}),\end{aligned} \tag{9.6}$$

mit der *Vertexkorrektur*:

$$e_0^2\Lambda^\mu(p',p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma^\alpha iS_F(p'-k)\gamma^\mu iS_F(p-k)\gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k^\mu). \tag{9.7}$$

Schließlich finden wir für das Feynman Diagramm (d) aus Abb. 9.1

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_d^{(2)} &= ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\lambda u(\mathbf{p})iD_{F\lambda\mu}(q^\mu)\\ &\quad\times\frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\int d^4\bar{p}\,\gamma^\mu iS_F(\bar{p}+q)\gamma^\nu iS_F(\bar{p}^\mu)A_{e\nu}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\\ &= ie_0\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\lambda u(\mathbf{p})iD_{F\lambda\mu}(q^\mu)ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(q^\mu)A_{e\nu}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}),\end{aligned} \tag{9.8}$$

mit der *Photonen-Selbstenergie*:

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(q^\mu) = (-1)\frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\int d^4\bar{p}\,\gamma^\mu iS_F(\bar{p}+q)\gamma^\nu iS_F(\bar{p}^\mu). \tag{9.9}$$

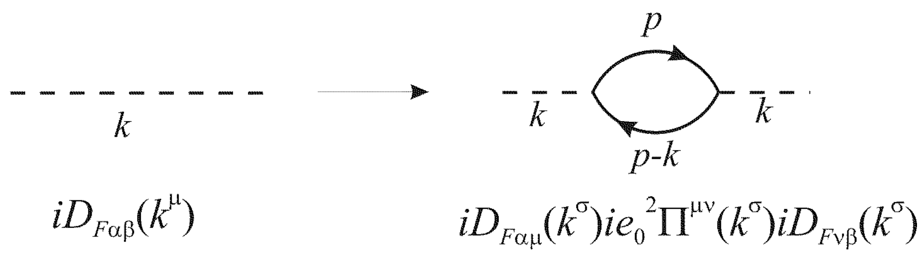
Der Beitrag $\Pi(q^\mu)$ wird auch häufig *Vakuumpolarisation* genannt. Der Faktor (-1) und die Spurbildung in Gleichung (9.8) folgt aus der geschlossenen

Leptonen-Schleife, welche in Diagramm (d) aufscheint. (Regel sechs der Feynman Regeln auf Seite 119.)

Aufgrund dieser Ergebnisse wird es offensichtlich, daß die Strahlungskorrektur zweiter Ordnung von drei Typen von Loopintegralen bestimmt wird. Alle drei Integrale sind für große Werte der Integrationsvariablen divergent. Die Divergenz in der Elektronen-Selbstenergie ist von der Ordnung k, die Vetrexkorrektur von der Ordnung $\ln k$ und die Photonen-Selbstenergie von der Ordnung $\bar{p}^2$. Durch diese drei Integrale werden aber *alle* Strahlungskorrekturen zweiter Ordnung abgedeckt.

9.2.1 Die Photonen-Selbstenergie

Wir untersuchen nun die Auswirkungen der Photonen-Selbstenergie auf ein virtuelles Photon:



mit

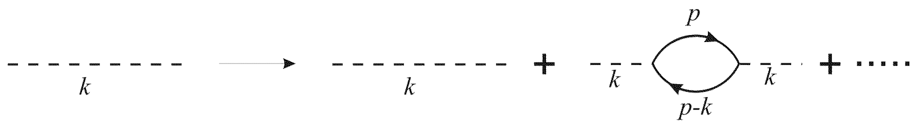
$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k^\mu) = -\frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m_0')\gamma^\nu(\not{p}+m_0')\right]}{\left[(p+k)^2-m_0'^2+i\varepsilon\right]\left[p^2-m_0'^2+i\varepsilon\right]}. \tag{9.10}$$

Dieses Integral ist für große p quadratisch divergent. Es muß daher regularisiert werden, damit es ein wohldefiniertes, endliches Integral wird. Man kann dies durch Multiplikation mit einem Konvergenzfaktor

$$f(p^2,\Lambda^2) = \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2-\Lambda^2}\right)^2 \tag{9.11}$$

erreichen. Λ ist hier ein sogenannter 'cut-off Parameter'. Für große, aber endliche Werte von Λ verhält sich nun das Integral in (9.10) für große p wie $\int d^4p/p^6$ und ist damit konvergent. Für $\Lambda\to\infty$ geht aber der Konvergenzfaktor (9.11) gegen 1 und die ursprüngliche Theorie ist wiederhergestellt. Man kann nun solche Konvergenzfaktoren als mathematisches Hilfsmittel auffassen, welches dazu dient unangenehmes Verhalten der QED zu beheben. Man könnte sie aber auch als Modifikation der QED im Hochenergiebereich auffassen, welche im Experiment beobachtbar sein sollten.

Eine korrekte Regularisierung der QED muß aber die Eichinvarianz der Theorie einerseits und andererseits die Ruhemasse Null für das Photon in allen Ordnungen Störungstheorie sicherstellen. Für unsere Rechnungen wollen wir aber annehmen, daß (9.10) geeignet regularisiert wurde. Wir haben dann:



$$iD_{F\alpha\beta}(k^\mu) \qquad iD_{F\alpha\beta}(k^\mu) + iD_{F\alpha\mu}(k^\sigma) ie_0{}^2 \Pi^{\mu\nu}(k^\sigma) iD_{F\nu\beta}(k^\sigma) + \cdots\cdots$$

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2+i\varepsilon} ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k^\sigma) \frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2+i\varepsilon}.$$

Dieser Ausdruck muß Lorentz-invariant sein. Da $\Pi^{\mu\nu}(k^\sigma)$ ein zweistufiger Tensor ist, welcher von einem Vierervektor abhängt, können wir die einfachste Form eines solchen zweistufigen Tensors unmittelbar angeben:

$$\Pi^{\mu\nu}(k^\sigma) = -g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2). \tag{9.12}$$

Der Photonenpropagator ist auch immer an erhaltene Ströme gekoppelt, was zu Ausdrücken der Form (7.14) führt:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; s_1^\mu(-k^\sigma)_R D_{F\mu\nu}(k^\sigma) s_2^\nu(k^\sigma).$$

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; s_1^\mu(-k^\sigma) \left[D_{F\mu\nu}(k^\rho) + iD_{F\mu\sigma}(k^\rho) ie_0^2 \Pi^{\sigma\tau}(k^\rho) iD_{F\tau\nu}(k^\rho) \right] s_2^\nu(k^\rho) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; s_1^\mu(-k^\sigma) \left[D_{F\mu\nu}(k^\rho) - iD_{F\mu\sigma}(k^\rho) ie_0^2 g^{\sigma\tau} A(k^2) iD_{F\tau\nu}(k^\rho) \right. \\
&\qquad \left. + iD_{F\mu\sigma}(k^\rho) ie_0^2 k^\sigma k^\tau B(k^2) iD_{F\tau\nu}(k^\rho) \right] s_2^\nu(k^\rho).
\end{aligned}$$

Die Stromerhaltung

$$\partial_\mu s^\mu(x^\mu) = 0$$

in der Impulsdarstellung als

$$k_\mu s^\mu(k^\rho) = 0$$

geschrieben, führt nun dazu, daß der Term proportional $B(k^2)$ verschwindet und wir erhalten folgende Substitution:

$$\begin{aligned}
\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} \quad \to \quad & \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} - \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2+i\varepsilon} ie_0^2 g^{\mu\nu} A(k^2) \frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2+i\varepsilon} \\
= \quad & \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} - \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2 i\varepsilon} \\
= \quad & \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} \left[1 - e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2+i\varepsilon} \right].
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Wir haben somit den Photonenpropagator gefunden, wie er durch Photonen-Selbstenergie Effekte modifiziert wird. Nehmen wir nun e_0^2 als klein an, so ist (9.13) das Ergebnis einer entsprechenden Entwicklung und wir schreiben:

$$\underbrace{\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}}_{X} \to \underbrace{\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon+e_0^2 A(k^2)}}_{Y} + \mathcal{O}(e_0^4), \tag{9.14}$$

mit X als den Propagator des nackten, nicht wechselwirkenden Photons der Ruhemasse Null und Y dem Photonpropagator mit Selbstenergiekorrektur zweiter Ordnung, welcher bereits ein physikalisches Photon bis zur Ordnung $\mathcal{O}(e_0^2)$ beschreibt. Die Ruhemasse dieses physikalischen Photons muß aber auch gleich Null sein! Es muß also der Propagator für $k^\mu k_\mu = k^2 = 0$ einen Pol aufweisen. Daher ist

$$A(0) \equiv A(k^2=0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{9.15}$$

zu fordern. Dann können wir aber

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2)$$

schreiben, mit

$$A'(0) = A'(k^2=0) = \left.\frac{dA(k^2)}{d(k^2)}\right|_{k^2=0}$$

und $\Pi_c(k^2)$ ist eine Funktion, welche mit k^2 für $k^2 = 0$ linear verschwindet. Wir erhalten dann für (9.13)

$$\begin{aligned} &\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}\left[1 - e_0^2 A(k^2)\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\right] = \\ &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}\left[1 - \frac{e_0^2 k^2 A'(0)}{k^2+i\varepsilon} - \frac{e_0^2 k^2 \Pi_c(k^2)}{k^2+i\varepsilon}\right], \end{aligned}$$

oder

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}e_0^2}{k^2+i\varepsilon} \to \frac{-ig_{\alpha\beta}e_0^2}{k^2+i\varepsilon}\left[1 - e_0^2 A'(0)\right] + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon} e_0^4 \Pi_c(k^2). \tag{9.16}$$

Wir haben hier links und rechts mit e_0^2 multipliziert, da ja jedes Ende einer virtuellen Photonenlinie durch einen Vertex gebildet wird und für jeden Vertex ein Faktor e_0 auftritt.

Wir sehen nun, daß der erste Term auf der rechten Seite von (9.16) gerade gleich dem Term auf der linken Seite entspricht, wobei noch mit einer Konstanten $[1 - e_0^2 A'(0)]$ multipliziert wurde. Es ist also so, als ob die Größe der zwei Ladungen, welche über den Photonenpropagator mit einander wechselwirken, nicht durch e_0 sondern durch

$$e^2 = e_0^2 \left[1 - e_0^2 A'(0)\right] \tag{9.17}$$

gegeben ist. (9.17) führt das Konzept der *Ladungsrenormierung* ein und (9.17) definiert die *renormierte Elektronenladung* $(-e)$, also die Ladung des physikalischen, wechselwirkenden Elektrons. Da wir nur Terme bis zu zweiter Ordnung berücksichtigt haben, können wir allgemeiner

$$e \equiv \sqrt{Z_3} e_0 = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + \mathcal{O}(e_0^4)\right] \tag{9.18}$$

schreiben, wobei mit Z_3 eine *Renormierungskonstante* eingeführt wurde.

Natürlich wird die Ladung $(-e)$ des physikalischen Elektrons beobachtet und nicht die Ladung $(-e_0)$, welche als Koppelungskonstante freier Felder eingeführt wurde. Es müssen daher alle beobachtbaren Größen, wie etwa Wirkungsquerschnitte, unter Verwendung der wirklichen Ladung ausgedrückt werden. Die Umkehrung von (9.18) ergibt

$$e_0 = e \left[1 - \mathcal{O}(e^2)\right]$$

und wir finden für (9.16):

$$\frac{-i g_{\alpha\beta} e_0^2}{k^2 + i\varepsilon} \to \frac{-i g_{\alpha\beta} e^2}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{-i g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e^4 \Pi_c(k^2) + \mathcal{O}(e^6). \tag{9.19}$$

Der erste Term entspricht nun dem Photonpropagator, welcher an die reelle Ladung ankoppelt, und der zweite Term, welcher von der Ordnung α im Vergleich zum ersten ist, enthält die *beobachtete* Strahlungskorrektur.

Diese Renormalisierungen enthalten natürlich noch den cut-off Parameter Λ. Wir sind daher noch nicht im Grenzfall $\Lambda \to \infty$, welcher die QED wiederherstellt. Man kann zeigen, daß in diesem Limes $\Pi_c(k^2)$ einem wohldefinierten Grenzwert zustrebt, welcher von der gewählten Regularisierungsmethode unabhängig ist. Die Divergenzen erscheinen natürlich wieder, nun aber in der Beziehung zwischen e und e_0; es werden also $A'(0)$ und Z_3 unendlich. Diese Beziehung stellt aber einen Zusammenhang zwischen der beobachteten, reellen Ladung e und der hypothetischen, nicht beobachtbaren Ladung e_0 dar. Somit ist (9.18) einer experimentellen Überprüfung nicht zugänglich, und durch die soeben beschriebenen Prozeduren wurden die Divergenzen zur Gänze in den nicht beobachtbaren Bereich verschoben. Die Gleichung (9.19) wird dann auch im QED-Limes nur die beobachtete Ladung enthalten und den wohldefinierten Beitrag aus der Photonen-Selbstenergie.

9.2.2 Die Elektronen-Selbstenergie

Wir untersuchen nun die Elektronenselbstenergie nach Gleichung (9.4). Wir vereinfachen diesen Ausdruck unter Verwendung der in Anhang F angegebenen Verjüngungsidentitäten zu

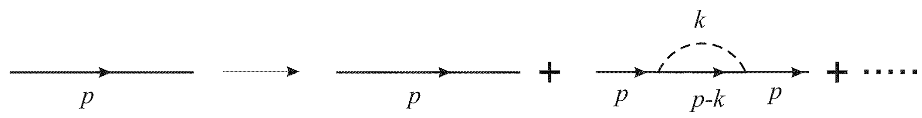
$$ie_0^2\Sigma(p^\mu) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{1}{k^2+i\varepsilon}\,\frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0'}{(p-k)^2 - {m_0'}^2 + i\varepsilon}. \tag{9.20}$$

Dieses Integral hat eine Ultraviolettdivergenz für $k \to \infty$ und es kann ähnlich behandelt werden, wie das Integral für die Photonenselbstenergie. Ein Unterschied besteht aber darin, daß die Regularisierung mit anschließender Renormierung von (9.20) zu Integralen führt, welche nicht nur im Ultravioletten sondern auch im Infraroten divergent sind; sie haben also auch eine Divergenz für $k \to 0$. Mit einer solchen Divergenz wurden wir bereits in Abschnitt 8.7 konfrontiert. Wir entfernen beide Divergenzen mit Hilfe des Ansatzes

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\varepsilon}, \tag{9.21}$$

mit λ einem kleinen Abbruchparameter im Infraroten, welcher am Ende auf Null gesetzt wird. Damit wird dem Photon eine kleine, nicht verschwindende Restmasse gegeben. Λ ist der Abbruchparameter im Ultravioletten und $\Lambda \to \infty$ stellt die QED wieder her.

Entsprechen Abb. 9.2a erhalten wir dann folgenden, modifizierten Propagator:



$$\frac{i}{\not{p} - m_0' + i\varepsilon} \longrightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0' + i\varepsilon} + \frac{i}{\not{p} - m_0' + i\varepsilon} ie_0^2\Sigma(p^\mu)\frac{i}{\not{p} - m_0' + i\varepsilon} + \ldots \tag{9.22}$$

Wir verwenden nun die Operatoridentität

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \ldots,$$

welche für beliebige Operatoren A und B, welche nicht notwendiger Weise kommutieren, gilt. Angewendet auf (9.22) ergibt dies:

$$\frac{i}{\not{p} - m_0' + i\varepsilon} \to \frac{i}{\not{p} - m_0' + e_0^2\Sigma(p^\mu) + i\varepsilon} + \mathcal{O}(e_0^4). \tag{9.23}$$

Diue linke Seite dieser Gleichung ist der Propagator des nicht wechselwirkenden Teilchens, welcher einen Pol für $\not p = m_0'$ hat, da ja

$$\frac{i}{\not p - m_0' + i\varepsilon} = \frac{i(\not p + m_0')}{p^2 - m_0'^2 + i\varepsilon}$$

ist, was einen Pol bei $p^2 = m_0'^2$ hat. Auf der rechten Seite von (9.23) steht dann der Propagator des wechselwirkenden, physikalischen Fermions. Dieser verlangt einen Pol bei $\not p = m_0$ mit

$$m_0 = m_0' + \delta m_0, \tag{9.24}$$

mit m_0 der reellen Ruhemasse des Fermions. In unserer Störungsrechnung ist δm_0 eine Potenzreihe in e_0^2 und in niedrigster Ordnung ist $\delta m_0 = \mathcal{O}(e_0^2)$. m_0 ist dann die renormierte Masse und das Ersetzen von m_0' mit m_0 nennt man die *Massenrenormierung.*

Um den Pol des modifizierten Propagators (9.23) in $\not p = m_0$ angeben zu können, schreiben wir den Nenner um. Aus der Lorentzinvarianz folgt, daß $\Sigma(p^\mu)$ von p^μ nur über $\not p$ und $p^2(=\not p\, \not p)$ abhängen kann. Man entwickelt also $\Sigma(p^\mu)$ nach Potenzen von $(\not p - m_0)$

$$\Sigma(p^\mu) = A + (\not p - m_0)B + (\not p - m_0)\Sigma_c(p^\mu) \tag{9.25}$$

mit Konstanten A und B. $\Sigma_c(p^\mu)$ verschwindet linear mit $(\not p - m_0)$ in $\not p = m_0$. Insbesonders gilt

$$A = \Sigma(p^\mu)\big|_{\not p = m_0}. \tag{9.26}$$

Setzt man (9.24) und (9.25) in den modifizierten Propagator (9.23) ein, so sieht man, daß er einen Pol in $\not p = m_0$ hat, wenn

$$\delta m_0 = -e_0^2 A \tag{9.27}$$

gilt. Daraus folgt schließlich

$$\frac{i}{\not p - m_0 + i\varepsilon} \quad \to \quad \frac{i}{(\not p - m_0)(1 + e_0^2 B) + e_0^2(\not p - m_0)\Sigma_c(p^\mu) + i\varepsilon} + \mathcal{O}(e_0^4), \tag{9.28}$$

oder, wenn man sich auf Terme der Ordnung e_0^2 beschränkt:

$$\frac{i}{\not p - m_0' + i\varepsilon} \to \frac{i}{\not p - m_0 + i\varepsilon}\left[(1 - e_0^2 B) - e_0^2\Sigma_c(p^\mu)\right] + \mathcal{O}(e_0^4). \tag{9.29}$$

Man kann aber die Massenrenormalisierung auch anders ausführen. Dazu drückt man den Hamiltonoperator der QED durch die wahre Masse m_0 und nicht durch m_0' aus. Wir schreiben

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1,$$

Abbildung 9.3: Zweilinien Graph zur Beschreibung des Massenkompensationsterms $-\delta m_0 \hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu)$.

mit

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = -\partial_0 \hat{A}_\nu(x^\mu)\partial^0 \hat{A}^\nu(x^\mu) + \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \hat{A}_\nu(x^\mu)\right]\left[\partial^\mu \hat{A}^\mu(x^\mu)\right] + i\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\partial_0\hat{\psi}(x^\mu) - \hat{\bar{\psi}}(x^\mu)\left(\not{p} - m_0\right)\hat{\psi}(x^\mu),$$

und

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -e_0\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)\ \not{\hat{A}}(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu) - \delta m_0\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu).$$

Damit ist $\hat{\mathcal{H}}_0$ der Hamiltonoperator der freien Felder und $\hat{\mathcal{H}}_1$ ein Wechselwirkungsoperator. Das nicht wechselwirkende Fermion hat dabei die physikalische Masse m_0 und gehorcht der Diracgleichung

$$\left(i\ \not{\partial} - m_0\right)\hat{\psi}(x^\mu) = 0,$$

und daraus folgt der Fermionenpropagator in niedrigster Ordnung mit

$$S_F(p^\mu) = \frac{1}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon}.$$

Die Verwendung der reellen Elektronenmasse für das nicht wechselwirkende Elektron wird durch den *Massenkompensationsterm* $-\delta m_0\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu)$, welcher eine zusätzliche Wechselwirkung beschreibt, "legalisiert". Er wird durch den Zweiliniengraphen nach Abb. 9.3 beschrieben. In diesem wird ein Elektron (Positron) vernichtet und wieder erzeugt.

Wollen wir die hier eingeführte Unterteilung verwenden, so müssen die Feynman Regeln erneut modifiziert werden:

1. Die "nackte" Masse m_0' ist überall durch die reelle Fermionenmasse m_0 zu ersetzen.

2. Die neue Wechselwirkung führt zu zusätzlichen Beiträgen in der S-Matrix Enetwicklung, welche durch den neuen Zweilinien Graph berücksichtigt werden. Man schreibt also für einen solchen Vertex:

$$i\delta m_0 = -ie_0^2 A = -ie_0^2\Sigma(p^\mu)|_{\not{p}=m_0}. \qquad (9.30)$$

Es folgt also als Konsequenz des Ersatzes $m_0' \to m_0$ für das freie Elektron, daß jeder Feynman Graph, welcher einen Selbstenergie-Loop enthält zusammen mit einem identen Graph zu untersuchen ist, in welchem der Selbstenergie-Loop durch den Zweilinien Graph ersetzt wird. Die Auswirkung auf die Feynman Amplitude ist durch den Ersatz

$$ie_0^2\Sigma(p^\mu) \quad \to \quad ie_0^2\Sigma(p^\mu)+i\delta m_0 = ie_0^2(\not p-m_0)B+ie_0^2(\not p-m_0)\Sigma_c(p^\mu), \tag{9.31}$$

gegeben, wobei (9.25) und (9.30) Anwendung fanden. Daraus wird ersichtlich, daß der Massenkompensationsterm den konstanten Beitrag A in (9.25), welcher aus dem Selbstenergie-Loop entsteht, aufhebt.

Betrachten wir nun wieder (9.23), so sehen wir, daß unter Verwendung von $m_0' \to m_0$ und (9.31)

$$\frac{i}{\not p - m_0 + i\varepsilon} \quad \to \quad \frac{i}{(\not p - m_0)(1+e_0^2 B) + e_0^2(\not p - m_0)\Sigma_c(p^\mu) + i\varepsilon} + \mathcal{O}(e_0^4) \tag{9.32}$$

erhalten wird. Dies entspricht unserem früheren Ergebnis (9.28), wie es auch sein muß, da sich die beiden Zugänge nur in der Aufspaltung des Hamiltonoperators in den Anteil des freien Feldes und den der Wechselwirkung voneinander unterscheiden.

Der modifizierte Fermionenoperator wurde bisher unter Verwendung der "nackten" Ladung e_0 angeschrieben. Wir definieren nun die renormierte Ladung

$$e^2 = Z_2 e_0^2 = e_0^2(1-e_0^2 B) + \mathcal{O}(e_0^6). \tag{9.33}$$

Diese Renormierung hat aber im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt einen anderen Ursprung: sie folgt aus der Fermionen Selbstenergie. Wir multiplizieren (9.29) mit e_0^2 und drücken e_0 durch e aus. Dies führt zum Ergebnis

$$\frac{ie_0^2}{\not p - m_0 + i\varepsilon} \to \frac{ie^2}{\not p - m_0 + i\varepsilon}\left[1 - e^2\Sigma_c(p^\mu)\right] + \mathcal{O}(e^6). \tag{9.34}$$

Die rechte Seite von (9.34) gibt den renormierten Fermionenoperator bis auf Korrekturen der Ordnung e^4 an. Der Term, welcher $\Sigma_c(p^\mu)$ enthält, ist eine Strahlungskorrektur der Ordnung α in nullter Näherung.

Will man die QED wieder erreichen, so muß man den Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ ausführen. Aus (9.20) ist zu erkennen, daß das Integral in diesem Limes linear divergiert. Eigentlich ist es aber eine logarithmische Divergenz, wie jetzt gezeigt werden soll. Aus (9.26), (9.27) und (9.4) folgt für δm_0:

$$\begin{aligned}\delta m_0 \;&=\; \bar u(\mathbf{p})\left\{-\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{\gamma^\alpha(\not p - \not k + m_0)\gamma_\alpha}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\right.\\ &\quad\times\left.\left[\frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\varepsilon}\right]\right\} u(\mathbf{p}).\end{aligned} \tag{9.35}$$

(9.35) modifiziert man unter Verwendung der in Anhang F eingeführten Verjüngungsidentitäten und indem man $\not{p}u(\mathbf{p}) = m_0 u(\mathbf{p})$ und $p^2 = m_0^2$ setzt. Beachtet man ferner, daß für das Produkt von zwei quadratischen Faktoren a und b die Identität

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a-b}\int_a^b dt\, t^{-2} \tag{9.36}$$

gilt, so kann man (9.21) als

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = -\int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\varepsilon)^2}$$

schreiben. Dies ergibt dann für (9.35)

$$\delta m_0 = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\bar{u}(\mathbf{p})\left[\int d^4k\, \frac{2(\not{k} + m_0)}{k^2 - pk + i\varepsilon}\int_{\lambda^2}^{\Lambda^2}\frac{dt}{(k^2 - t + i\varepsilon)^2}\right]u(\mathbf{p}). \tag{9.37}$$

Die in Anhang H besprochenen Integrationsmethoden ergeben auf (9.37) angewendet:

$$\delta m_0 = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\bar{u}(\mathbf{p})\left\{\int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dz \int d^4k\, \frac{4(\not{k} + m_0)z}{\left[k^2 - 2pk(1-z) - tz + i\varepsilon\right]^3}\right\}u(\mathbf{p}).$$

Das Integral über d^4k findet man in Integraltabellen und wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
\delta m_0 &= \frac{m_0 e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dz \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt\, \frac{2z - z^2}{tz + m_0^2(1-z)^2} \\
&= \frac{m_0\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,(2-z)\ln\frac{\Lambda^2 z + m_0^2(1-z)^2}{\lambda^2 z + m_0^2(1-z)^2}.
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Dieses Ergebnis bleibt im Limes $\lambda \to 0$ (also im Infraroten) endlich und man kann in (9.38) $\lambda = 0$ setzen. Für $\Lambda \to \infty$ divergiert das Integral logarthmisch mit dem führenden Beitrag:

$$\begin{aligned}
\delta m_0 &= \frac{m_0\alpha}{2\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\int_0^1 dz\,(2-z) + \mathcal{O}(1) \\
&= \frac{3m_0\alpha}{2\pi}\ln\frac{\Lambda}{m_0} + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (9.27) zeigt, daß

$$A = -\frac{3m_0}{8\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{m_0}.$$

Damit ist A ebenfalls nur logarithmisch divergent. Gleiches gilt für die Konstanten B und Z_2 aus (9.33). Der Korrekturterm $\Sigma_c(p^\mu)$ bleibt hingegen endlich und ist von den Details der Regularisierung unabhängig. Aus diesem Beitrag folgen auch die meßbaren Strahlungskorrketuren der Ordnung α, da die divergenten Beiträge A, B und Z_2 nur im nicht überprüfbaren Bereich, welcher die physikalischen mit den nackten Teilchen verknüpft, auftreten.

Bringt man ferner Strahlungskorrekturen an externen Linien an, so treten dort nur die Strahlungskorrekturen $e = \sqrt{Z_3}e_0$ für Photonenlinien, bzw. $e = \sqrt{Z_2}e_0$ für Elektronenlinien auf. Für letztere gibt es auch noch die Massenrenormierung δm_0. Weitere Beiträge treten *nicht* auf. Durch sie wird also der Übergang bzu reellen Teilchen vollständig beschrieben.

9.2.3 Die Vertexkorrektur

Auch hier geht man nach den bereits besprochenen Argumenten vor. Man findet

$$ie_0\gamma^\mu \to i\Gamma^\mu(p',p) = ie_0\left[\gamma^\mu(1+e_0^2L) + e_0^2\Lambda_c^\mu(p',p)\right], \tag{9.39}$$

und dies legt wieder eine *Ladungsrenormierung*

$$e = \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1+e_0^2L) + \mathcal{O}(e_0^5) \tag{9.40}$$

nahe. Wir finden den Ersatz:

$$ie_0\Gamma^\mu \to i\Gamma^\mu(p',p) = ie\left[\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p',p)\right] + \mathcal{O}(e^5). \tag{9.41}$$

Kombiniert man nun alle Ergebnisse, so finden wir das Nettoergebnis der Ladungsrenormierung an einem Vertex (zwei Elektronen- und eine Photonenlinie) mit:

$$e = e_0\frac{\sqrt{Z_3}Z_2}{Z_1}. \tag{9.42}$$

Diese Ergebnisse sind aber eher als unbefriedigend zu bezeichnen, da wir offensichtlich für alle Linien und Vertizes eines Feynman Diagrammes unterschiedliche Renormalisierungen einzusetzen haben. Die sogenannte WARD-Identität[1] erlaubt nun aber eine besondere Vereinfachung. Sie gibt einen Zusammenhang zwischen (9.7) und (9.4) an

$$\frac{\partial\Sigma(p^\mu)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p,p), \tag{9.43}$$

[1]siehe etwa J.M. Jauch und F. Rohrlich *Theory of Photons and Electrons*, Springer, New York (1976), pp. 215 und pp. 496.

wobei diese Identität noch verallgemeinert werden kann und in dieser Form für alle Ordnungen Störungstheorie gilt. Eine Folge dieser Identität ist, daß für alle Ordnungen Störungstheorie $Z_1 = Z_2$ ist. Somit reduziert sich die Ladungsrenormierung auf die Beziehung (9.18). Sie hängt also nicht mehr von der Elektronen-Selbstenergie oder von den Vertexkorrekturen ab, sie folgt ausschließlich aus den Beiträgen der Vakuumpolarisation.

9.3 Allgemeine Regularisierung der Matrixelemente

Es wurde bereits festgestellt, daß nur die Matrixelemente niedrigster Ordnung ein reguläres Verhalten aufweisen. Es müssen also zur Durchführung des, durch die S-Matrix vorgegebenen Iterationsalgorithmus, die auftretenden Divergenzen physikalisch sinnvoll beseitigt werden. Dies geschieht in zwei Schritten: zunächst können die Matrixelemente rein formal durch konvergenzerzeugende Terme (mittels Einführung formaler Parameter, etwa fiktiver Massen) *regularisiert* werden. Damit können alle Integrationen in mathematisch einwandfreier Weise ausgeführt werden. In zweiten Schritt werden die formalen Parameter (Hilfsmassen) durch die Einführung physikalisch gerechtfertigter Korrekturterme beseitigt, wobei zunächst in die Rechnung eingegangene physikalische Größen, welche den freien Teilchen zugeordnet sind, durch regularisierte Größen, welche experimentell ermittelten Werten entsprechen, ersetzt werden. (Beispiel: Massen- und Ladungsrenormierung des Elektrons.)

Die im folgenden dargelegte Methode basiert auf der Erkenntnis, daß man die einfachste Photonen - Greensche Funktion, die kausale, [2] (5.48),

$$D_0^c(k^\mu) = -\frac{1}{k^\mu k_\mu}, \tag{9.44}$$

wie folgt regularisieren kann:

$$\begin{aligned} [D_0^c(k^\mu)]_R &= D_0^c(k^\mu) - D_M^c(k^\mu) \\ &= -\frac{1}{k^\mu k_\mu} - \frac{1}{M^2 - k^\mu k_\mu} = -\frac{M^2}{k^\mu k_\mu (M^2 - k^\mu k_\mu)}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

[2] Die Gleichung (9.44) führt zur bekannten Formel für die kausale Greensche Funktion des elektromagnetischen Feldes:

$$D_0^c(x^\mu) = \frac{1}{4\pi}\left[\delta(x^2) - \frac{i}{\pi x^2}\right] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau x^2}.$$

Hier ist M^2 eine beliebigen Hilfsmasse. Dies entspricht der Einführung eines Konvergenzfakrors $M^2/(M^2 - k^\mu k_\mu)$. Die so regularisierte Funktion hat am Lichtkegel nicht mehr die stärksten Singulritäten $\delta(x^2)$ und x^{-2}. Andererseits gilt aber immer noch

$$\lim_{M\to\infty} [D_0^c(k^\mu)]_R = D_0^c(k^\mu).$$

Wir beziehen uns nun in der weiteren Argumentation auf den Propagator der Klein-Gordon Gleichung (3.46). Führt man in (3.46) die Integration über k^0 und die Integration über den Raumwinkel des $\mathbf{k}$-Raumes aus, so kann man das Ergebnis als

$$\Delta(x^\mu) = \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{k}|}\frac{\partial}{\partial\,|\mathbf{r}|}f(x^\mu)$$

mit

$$f(x^\mu) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\,\frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{k^0} = f(m_0^2 x^2), \qquad k_0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - m_0^2}$$

schreiben. Die Funktion $f(x^\mu)$ selbst setzt sich aus Bessel- und Neumannfunktionen zum Argument $m_0\sqrt{x^2}$, $x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{r}|^2$ zusammen.[3] Aus den Eigenschaften der Bessel- und Neumannfunktionen folgt weiter, daß $\Delta(x^\mu)$ in Ordnung x^2 durch

$$\Delta(x^\mu) = \frac{1}{4\pi}\delta(x^2) - \frac{i}{4\pi^2 x^2} + \frac{im_0^2}{8\pi^2}\ln\frac{m_0\sqrt{|x^2|}}{2} - \frac{m_0^2}{16\pi}\varepsilon(x^0)\theta(x^2) \qquad (9.46)$$

gegeben ist.[4] Es gilt weiter

$$\frac{\partial}{\partial x^2}f_1(m_0^2x^2) = m_0^2 f_2(m_0^2 x^2) \qquad (9.47)$$

bis auf Beiträge der Ordnung $\varepsilon(x^0)$ und $\theta(x^2)$. Es ist nun das Ziel solche Kombinationen von Propagatoren (oder Greenschen Funktionen) aufzubauen, welche am Lichtkegel Nullstellen (in Bezug auf x^2) von genügend hoher Ordnung aufweisen, was dann sicherstellt, daß Singularitäten in den Ableitungen nach x^2 in passender Ordnung nicht auftreten werden. Die Singularitäten, welche aus $\varepsilon(x^0)$ und $\theta(x^2)$ herrühren, treten wegen $\delta(x^2)$ bzw. $\theta(x^2)$

[3] Siehe: N.N. Bogoliubov und D.V. Shirkov, *Theory of Quantized Fields*, Interscience Monographs in Physics and Astronomy, Vol. III, Interscience Publishers, N.Y. (1959), Gleichung (15.7), Seite 149.

[4] Siehe: N.N. Bogoliubov und D.V. Shirkov, *Theory of Quantized Fields*, Interscience Monographs in Physics and Astronomy, Vol. III, Interscience Publishers, N.Y. (1959), Gleichung (15.16), Seite 152.

nur am Lichtkegel auf und werden somit durch solche Nullstellen in Bezug auf x^2, welche von genügend hoher Ordnung ist, aufgehoben.

Aus Gleichung (9.46) und (9.47) folgt unmittelbar, daß die Singularitäten x^{-2} und $\delta(x^2)$ nicht von der Masse m_0 abhängen (also auch bei Photonen auftreten werden), die Singularitäten $\ln x^2$ und $\theta(x^2)$ haben aber Vorfaktoren, welche proportional m_0^2 sind. Bilden wir nun eine Linearkombination aus unterschiedlichen Funktionen Δ, welche zu Feldern unterschiedlicher Massen gehören, so erhalten wir unter Verwendung der Notation

$$\Delta_F = \Delta_1 - 2i\bar{\Delta}, \tag{9.48}$$

nunmehr regularisierte Funktionen für den Real- und Imaginärteil des Propagators:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_R &= \bar{\Delta}(\kappa) + c_1\bar{\Delta}(\kappa_1) + c_2\bar{\Delta}(\kappa_2) + \ldots = \sum_{i=0}^{n} c_i\bar{\Delta}(\kappa_i) && (9.49a) \\ (\Delta_1)_R &= \Delta_1(\kappa) + c_1\Delta_1(\kappa_1) + c_2\Delta_1(\kappa_2) + \ldots = \sum_{i=0}^{n} c_i\Delta_1(\kappa_i). && (9.49b) \end{aligned}$$

In den Gleichungen (9.49) sind die κ_i Hilfsmassen und die c_i unbestimmte Koeffizienten. Durch Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} c_i &= 0 && (9.50a) \\ \sum_{i=0}^{n} c_i\kappa_i^2 &= 0, && (9.50b) \end{aligned}$$

wird ein Ergebnis erhalten, welches keine Singularitäten am Lichtkegel hat.

Will man nun aber einen Ausdruck erhalten, welcher mit all seinen Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ kontinuierlich ist, so ist es ausreichend eine Form zu konstruieren, welche in der Umgebung von $x_0^2 = |\mathbf{r}|^2$ (dem Lichtkegel) eine Nullstelle mindestens von Ordnung n hat. Dies kann man erreichen, indem man die Koeffizienten c_i aus (9.50) einer größeren Zahl, $n+1$, von Bedingungen der Form (9.50) unterwirft:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i\kappa_i^2 = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i\kappa_i^{2n} = 0. \tag{9.51}$$

Die mindest notwendige Zahl von Massen überschreitet $n+2$ nicht. In der Prozedur setzt man nun eine der Massen gleich der fundamentalen Masse m_0

des Feldes und setzt den zugehörigen Koeffizienten gleich Eins. Dann folgt für (9.50) und (9.51):

$$\begin{aligned} 1+\sum_{i=1}^{n} c_i &= 0, && (9.52a)\\ m_0^2+\sum_{i=1}^{n} c_i\kappa_i^2 &= 0 && (9.52b)\\ m_0^{2n-2}+\sum_{i=1}^{n} c_i\kappa_i^{2n-2} &= 0. && (9.52c)\end{aligned}$$

Wir verwenden nun das Symbol Δ auch für eine der beiden Greenschen Funktionen S_F oder D_F und müssen nur beachten, daß im Fall von D_F, die für das Feld signifikante Masse Null ist. Wir erhalten dann längs des Lichtkegels:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_R\big|_{x_0^2=|\mathbf{r}|^2} &= \left[\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)-\left\{\begin{array}{l} m_0^2/16\pi^2\\ 0\end{array}\right.\right]\\ &\quad+\sum_{i=1}^{2} c_i\left[\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)-\left\{\begin{array}{l} \kappa_i^2/16\pi^2\\ 0\end{array}\right.\right] && (9.53a)\\ (\Delta_1)_R\big|_{x_0^2=|\mathbf{r}|^2} &= \frac{1}{8\pi^2x^2}-\frac{m_0^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{m_0}{2}\sqrt{|x^2|}\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{2} c_i\left[\frac{1}{2\pi^2x^2}-\frac{\kappa_i^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\kappa_i}{2}\sqrt{|x^2|}\right)\right]. && (9.53b)\end{aligned}$$

Die Koeffizienten genügen dem System (9.52) für $n=2$:

$$\begin{aligned} c_1+c_2+1 &= 0\\ c_1\kappa_1^2+c_2\kappa_2^2+m_0^2 &= 0\\ c_1 &= \frac{m_0^2-\kappa_2^2}{\kappa_2^2-\kappa_1^2},\quad c_2=\frac{\kappa_1^2-m_0^2}{\kappa_2^2-\kappa_1^2}. && (9.54)\end{aligned}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_R\big|_{x_0^2=|\mathbf{r}|^2} &= \frac{1}{4\pi}\delta(x^2)\underbrace{(1+c_1+c_2)}_{=0}\\ &\quad-\underbrace{\left(m_0^2+c_1\kappa_1^2+c_2\kappa_2^2\right)}_{=0}\left\{\begin{array}{l} 1/16\pi^2\\ 0\end{array}\right. = 0, && (9.55a)\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
(\Delta_1)_R\big|_{x_0^2=|\mathbf{r}|^2} &= \frac{1}{8\pi^2 x^2}\underbrace{(1+c_1+c_2)}_{=0} \\
&\quad -\frac{1}{16\pi^2}\underbrace{\left(m_0^2+c_1\kappa_1^2+c_2\kappa_2^2\right)}_{=0}\ln\sqrt{|x^2|} \qquad (9.55\text{b}) \\
&\quad +\frac{1}{4\pi^2}\left(m_0^2\ln\frac{m_0}{2}+\kappa_1^2\ln\frac{\kappa_1}{2}+\kappa_2^2\ln\frac{\kappa_2}{2}\right)\neq 0, \quad \text{und stetig}
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt, daß diese Methode tatsächlich zu einer Regularisierung führt.

Man kann weiters zeigen, daß man die kompensierenden Massen κ_i so wählen kann, daß beim Übergang $\kappa_i \to \infty$ die Koeffizienten c_i endlich bleiben. Dann hat man für große, aber endliche Massen eine Situation, in welcher die Werte der Hilfsfunktionen $\Delta(\kappa_i)$ überall sehr klein werden, außer in einem schmalen Bereich um den Lichtkegel. Damit wird die regularisierte Funktion Δ_R von Δ praktisch nur im Bereich des Lichtkegels abweichen, wo Δ_R kontinuierlich bleibt zusammen mit einer bestimmten Zahl von Ableitungen. Mit steigenden Werten der Hilfsmassen wird der Bereich um den Lichtkegel immer kleiner, innerhalb dessen die Differenz $\Delta_R - \Delta$ von Null verschieden ist, während die endlichen Werte von Δ_R und seiner Ableitungen immer größer werden. Für $\kappa_i \to \infty$ sind die beiden Funktionen nicht mehr von einander zu unterscheiden.

Die hier vorgestellte Methode der Regularisierung ist die Pauli-Villars *Regularisierung*. Diese Methode ist auch äquivalent der Einführung zusätzlicher Felder, welche Masse haben, und welche dazu dienen die Singularitäten des fundamentalen Feldes zu eliminieren.

Physikalisch ist dieses Konzept kompensierender Felder ohne Inhalt, da einige $\Delta(\kappa_i)$ notwendig negative Koeffizienten haben müssen [siehe Gleichung (9.54)], was zu grundsätzlichen Widersprüchen führt. Es handelt sich hier um eine formale Methode der Regularisierung.

Natürlich ist die hier vorgestellte Methode Näherungen einzuführen nicht die einzige. Man kann etwa auch regularisierte Näherungen für die Propagatoren durch Begrenzung des Integrationsbereiches im Impulsraum oder durch die Einführung eines Abbruchfaktors (Formfaktor) erhalten. Bei all diesen Methoden ist aber zu beachten, daß relativistische Invarianz erhalten bleiben muß. Auch sollte keine Mischung der Anteile positiver und negativer Frequenz auftreten; schließlich sollte eine Regularisierung simultan für alle Anteile positiver und negativer Frequenz erfolgen.

Die S-Matrixelemente werden nun mit Hilfe der Integraldarstellungen

(5.48)

$$D_F^{\mu\nu}(x^\mu) = -\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{k^\mu k_\mu + i\varepsilon}$$

und (4.32)

$$S_F(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{\not{k} + m_0}{k^\mu k_\mu - m_0^2 + i\varepsilon} e^{-ik^\mu x_\mu},$$

sowie (5.21), (5.22), (5.23) und (4.8) in den Impulsraum transformiert. Da zu jedem "Eckpunkt" x^j eines Diagrammes eine δ-Distribution gehört, können stets $n-1$ Integrationen für einen Beitrag n-ter Ordnung ausgeführt werden. Beim Übergang vom Orts- in den Impulsraum gehen die Divergenzen am Lichtkegel in die Ultravioletdivergenzen $k \to \infty$ über. Das Verhalten in der Umgebung dieser Ultravioletdivergenz wird durch die jeweils höchste Zählerpotenz des Integranden bestimmt. Die Anzahl der notwendigen Konterterme eines Matrixelementes hängt nun, entsprechend der vorhergehenden Analyse, von dieser maximalen Zählerpotenz vermindert um die Nennerpotenz ab. Diese Größe, welche somit für die Regularisierbarkeit der Theorie von entscheidender Bedeutung ist, wird der *primitive Divergenzgrad D* eines Matrixelementes genannt. Man spricht auch vom *Divergenzgrad* des Feynman Graphen, welcher dem Matrixelement zugeordnet ist.

Wenn mit ständig wachsender Verfeinerung der Feynman Graphen (Übergang zu höheren Näherungen in der S-Matrix Entwicklung) der Divergenzgrad unbeschränkt wächst, so ist keine finite Regularisierung der Theorie möglich. Man hat demnach zwischen renormierbaren und nicht renormierbaren Theorien zu unterscheiden und dies hängt einzig von der analytischen Form der Lagrangefunktion ab, welche der Theorie zugrunde liegt.

9.4 Der primitive Divergenzgrad

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten unterschiedliche Typen von divergenten Diagrammen diskutiert: das Vakuumfluktuations-Diagramm (Anhang H), die Selbstenergiediagramme und die Vetexkorrektur zweiter Ordnung. Es gibt natürlich viel mehr divergente Diagramme und man kann dazu leicht Beispiele konstruieren. Sie werden aber in den meisten Fällen Kombinationen von Elektron- und Photonselbstenergie Korrekturen mit Vetexkorrekturen sein. Sie enthalten somit keine neuen Divergenzen.

Um die möglichen Diagrammtypen unetrsuchen zu können, welche durch Einbau divergenter Teile entstehen, hat Dyson den *primitiven Divergenzgrad* eingeführt. Ein Diagramm ist *primitiv divergent*, wenn es nach Öffnung einer beliebigen inneren Linie konvergent wird. (Die ehemals innere Linie zerfällt somit in zwei äußere Linien.) Anders ausgedrückt: wird irgendein Vierervektor, welcher zu einer inneren Linie gehört, festgehalten, so ist das Integral konvergent.

M sei nun der analytische Ausdruck, welcher zu einem primitiv divergenten Integral gehört. Er wird ein Vielfachintegral der Ordnung 4ρ sein. Die Zahl der unabhängigen Vierervektoren ρ wird von der Zahl der Vertizes n und der Zahl E_i und P_i interner Fermionen- und Photonenlinien abhängen. Zu jeder internen Linie gehört ein Vierervektor und jeder entspricht einem Vierfachintegral. Diese Vektoren sind aber nicht unabhängig. Für jeden Vertex tritt eine $\delta^{(4)}$-Distribution auf, welche bestimmte lineare Beziehungen zwischen den Vektoren herstellt. Nützt man diese $\delta^{(4)}$-Distributionen aus, bleibt nur mehr eine $\delta^{(4)}$-Distribution übrig, welche nur mehr von den externen Variablen abhängt, und welche als Faktor im Endausdruck verbleibt. Die Zahl von unabhängigen Vektorbeziehungen ist daher $(n-1)$ und wir finden die Zahl unabhängiger Vektoren mit

$$\rho = E_i + P_i - n + 1.$$

Der Integrand von M ist eine rationale Funktion. Wir können dann die Ergebnisse von Anhang H benützen und werden ein Integral der Form

$$M = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdots \int d^4k_1 \cdots d^4k_\rho \frac{Z}{N} \tag{9.56}$$

vorfinden. Die Integrale über die Hilfsvariablen führen keine Divergenzen ein und die Konvergenz bzw. Divergenz von M ist ausschließlich vom Integral über die ρ Vierervektoren k_1^μ, k_2^μ, …, k_ρ^μ bestimmt. Man verformt nun den Pfad der k^0-Integration wie in Anhang H beschrieben und damit wird der Nenner N ein positiv definiter Ausdruck für große Werte der Integrationsvariablen.

Zähler Z und Nenner N in (9.56) sind Polynome in den Variablen k_1^μ, k_2^μ, …, k_ρ^μ. Der Zähler ist von der Ordnung E_i und der Nenner von der Ordnung $2E_i + 2P_i$. Da das Integral konvergiert, wenn einer der k_i^μ gestgehalten wird, so ist das Integral nur dann divergent, wenn

$$E_i + 4(E_i + P_i - n + 1) \geq 2(E_i + P_i).$$

Wir können somit den primitiven Divergenzgrad D angeben:

$$D = 3E_i + 2P_i - 4n + 4. \tag{9.57}$$

Ist der Divergenzgrad 0, 1, 2, …, so wird das Integral logarithmisch, linear, quadratisch, …divergent genannt.

Aus der Vertexstruktur der Diagramme folgt für die Zahl n der Vertizes eines Diagrammes, ausgedrückt durch interne (Index "i") und externe (Index "e") Linien

$$n = E_i + \frac{1}{2} E_e = 2P_i + P_e,$$

und setzt man dies in (9.57) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} D &= 3E_i + 2P_i - 3\left(E_i + \frac{1}{2}E_e\right) - 2P_i - P_e + 4 \\ &= 4 - \left(\frac{3}{2}E_e + P_e\right). \end{aligned} \tag{9.58}$$

Wir haben das bemerkenswerte Ergebnis erhalten, daß in (9.58) die Ordnung des Diagrammes n gar nicht mehr eingeht. Der primitive Divergenzgrad hängt somit ausschließlich von der Zahl der äußeren Linien ab. Würde die rechte Seite von (9.58) mit n ansteigen, so würden wir für jeden Prozess primitiv divergente Integrale erhalten, soferne die Ordnung n ausreichend groß ist. Dies würde zu einer unbegrenzten Zahl primitiv divergenter Diagramme führen. Gleichung (9.58) impliziert zudem, daß ein Diagramm zumindest so viele Vertizes wie äußere Linien aufweisen muß um divergent zu sein; also gilt für primitiv divergente Integrale

$$n \geq E_e + P_e$$

und wir stellen fest, daß $n - E_e - P_e$ stets eine gerade Zahl ist.