Anhang B

B.1 Das Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild

Diese drei Bilder eröffnen drei verschiedene Möglichkeiten die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems zu beschreiben. Sowohl das Heisenberg- wie auch das Wechselwirkungsbild können aus dem Schrödingerbild abgeleitet werden und sie sollen durch die Zustandsindizes S, H und I voneinander unterschieden werden. Es handelt sich dabei natürlich um drei unterschiedliche Darstellungen ein und desselben Sachverhaltes.

Im Schrödingerbild wird die zeitliche Entwicklung des Systemes durch die Zustandsvektoren beschrieben, wie man unmittelbar aus der Schrödingergleichung ersehen kann:

$$i\frac{d}{dt}\left|A,t\right\rangle_S = \hat{H}\left|A,t\right\rangle_S . \tag{B.1}$$

Man kann (B.1) formal auflösen, wenn man den Systemzustand zu einer beliebigen Zeit t_0 kennt:

$$\left|A,t\right\rangle_S = \hat{U}(t,t_0)\left|A,t_0\right\rangle_S , \tag{B.2}$$

mit dem unitären Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}$. Wir setzen (B.2) in (B.1) ein, und finden die Operatorgleichung

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t,t_0) = -i\hat{H}\hat{U}(t,t_0),$$

welche durch

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \tag{B.3}$$

unmittelbar gelöst werden kann. Offensichtlich gilt noch

$$\hat{U}(t,t) = \hat{1}, \tag{B.4a}$$
$$\hat{U}(t_1,t_2)\hat{U}(t_2,t_3) = \hat{U}(t_1,t_3), \tag{B.4b}$$
$$\begin{aligned}\hat{U}^\dagger(t_1,t_2) &= e^{i\hat{H}(t_1-t_2)} = \hat{U}(t_2,t_1) \\ &= \hat{U}^{-1}(t_1,t_2)\end{aligned} \tag{B.4c}$$

Mit Hilfe von (B.4c) erhalten wir aus (B.2):

$$\begin{aligned}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\,|A,t\rangle_S &= \hat{U}^{-1}(t,t_0)\,|A,t\rangle_S \\ &= \hat{U}^{-1}(t,t_0)\hat{U}(t,t_0)\,|A,t_0\rangle_S \\ &= |A,t_0\rangle_S\,.\end{aligned}$$

Wir definieren nun den Systemzustand im Heisenbergbild durch

$$|A,t\rangle_H \stackrel{!}{=} \hat{U}^\dagger(t,t_0)\,|A,t\rangle_S = |A,t_0\rangle_S\,, \tag{B.5}$$

und man erkennt, daß sich der Systemzustand im Heisenbergbild in der Zeit nicht verändert. Einen Operator im Heisenbergbild definieren wir weiters über die unitäre Transformation:

$$\hat{O}^H(t) \stackrel{!}{=} \hat{U}^\dagger\hat{O}^S\hat{U}, \tag{B.6}$$

wenn $\hat{O}^S$ der entsprechende Operator im Schrödingerbild ist. Da der Hamiltonoperator natürlich mit sich selbst vertauscht, so folgt aus (B.6) unmittelbar:

$$\hat{H}^H = \hat{H}^S = \hat{H}. \tag{B.7}$$

Aus der Tatsache, daß die Transformation vom Schrödingerbild in das Heisenbergbild unitär ist, folgt folgende wichtige Eigenschaft:

$$\begin{aligned}\left\langle B,t\left|\hat{O}^S\right|A,t\right\rangle_S &= \left\langle B,t\left|\hat{U}^\dagger\hat{O}^S\hat{U}\right|A,t\right\rangle_H \\ &= \left\langle B,t\left|\hat{O}^H(t)\right|A,t\right\rangle_H.\end{aligned} \tag{B.8}$$

Die Matrixelemente sind also invariant gegenüber dieser Transformation. Wir finden noch:

$$\begin{aligned}\left[\hat{O}^S,\hat{P}^S\right] &= konst. \\ \left\langle B,T\left|\,\left[\hat{O}^S,\hat{P}^S\right]\,\right|A,t\right\rangle_S &= konst.\,\langle B,t\,|\,A,t\rangle_S \\ \left\langle B,T\left|\hat{U}^\dagger\left[\hat{O}^S,\hat{P}^S\right]\hat{U}\right|A,t\right\rangle_H &= konst.\left\langle B,t\left|\underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{=\hat{1}}\right|A,t\right\rangle_H\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\hat{U}^\dagger \left[\hat{O}^S, \hat{P}^S\right] \hat{U} &= \hat{U}^\dagger \left[\hat{O}^S \hat{P}^S - \hat{P}^S \hat{O}^S\right] \hat{U} \\
&= \hat{U}^\dagger \left[\hat{O}^S \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{P}^S - \hat{P}^S \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{O}^S\right] \hat{U} \\
&= \left[\hat{O}^H(t), \hat{P}^H(t)\right],
\end{aligned}$$

und es ergibt sich:

$$\left\langle B, T \,\middle|\, \left[\hat{O}^H(t), \hat{P}^H(t)\right] \,\middle|\, A, t \right\rangle_H = konst. \left\langle B, t \,|\, A, t \right\rangle_H$$

$$\rightarrow \qquad \left[\hat{O}^H(t), \hat{P}^H(t)\right] = konst. \tag{B.9}$$

Die Vertauschungsrelation für Operatoren im Heisenbergbild ergibt die selbe Konstante wie die Vertauschungsrelation im Schrödingerbild.

Wir differenzieren nun (B.6) nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\hat{O}^H(t) &= \left[i\frac{d}{dt}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\right] \hat{O}^S \hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{O}^S \left[i\frac{d}{dt}\hat{U}(t,t_0)\right] \\
&= i\left[i\hat{H}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\right] \hat{O}^S \hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{O}^S\, i\left[-i\hat{H}\hat{U}(t,t_0)\right] \\
&= -\hat{H}\hat{O}^H(t) + \hat{O}^H(t)\hat{H} \\
&= \left[\hat{O}^H(t), \hat{H}\right].
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Gleichung (B.10) ist die *Heisenbergsche Bewegungsgleichung*. Ist hingegen der Operator $\hat{O}^S$ explizite zeitabhängig, so ist (B.10) zu ergänzen:

$$i\frac{d}{dt}\hat{O}^H(t) = i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}^H(t) + \left[\hat{O}^H(t), \hat{H}\right].$$

Wir finden schließlich das Wechselwirkungsbild, wenn der Hamiltonoperator in zwei Teile aufgespalten werden kann:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \tag{B.11}$$

wobei $\hat{H}_I$ die Wechselwirkung zwischen den Feldern beschreibt, welche wiederum selbst durch $\hat{H}_0$ beschrieben werden. Das Wechselwirkungsbild ist in Analogie zu (B.2) und (B.3) durch

$$\left|A, t\right\rangle_I \stackrel{!}{=} \hat{U}_0(t,t_0)\left|A, t_0\right\rangle_S, \tag{B.12}$$

mit

$$\hat{U}_0(t,t_0) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}, \tag{B.13}$$

und

$$\hat{O}^I(t) = \hat{U}_0^\dagger \hat{O}^S \hat{U}_0 \tag{B.14}$$

gegeben.

Differenzieren von (B.14) ergibt die Bewegungsgleichung für den Operator $\hat{O}^I(t)$:

$$i\frac{d}{dt}\hat{O}^I(t) = \left[\hat{O}^I(t), \hat{H}_0\right]. \tag{B.15}$$

Wir setzen nun (B.12) in die Schrödingergleichung (B.1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\left|A,t\right\rangle_S &= \hat{H}\left|A,t\right\rangle_S = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I)\left|A,t\right\rangle_S \\
i\frac{d}{dt}\hat{U}_0(t,t_0)\left|A,t\right\rangle_I &= (\hat{H}_0 + \hat{H}_I)\hat{U}_0(t,t_0)\left|A,t\right\rangle_I \\
i\left(-i\hat{H}_0\hat{U}_0\right)\left|A,t\right\rangle_I + \hat{U}_0\, i\frac{d}{dt}\left|A,t\right\rangle_I &= (\hat{H}_0 + \hat{H}_I)\hat{U}_0(t,t_0)\left|A,t\right\rangle_I \\
\hat{U}_0\, i\frac{d}{dt}\left|A,t\right\rangle_I &= \hat{H}_I\hat{U}_0\left|A,t\right\rangle_I \\
\underbrace{\hat{U}_0^\dagger\hat{U}_0}_{=\hat{1}}\, i\frac{d}{dt}\left|A,t\right\rangle_I &= \hat{U}_0^\dagger\hat{H}_I\hat{U}_0\left|A,t\right\rangle_I \\
i\frac{d}{dt}\left|A,t\right\rangle_I &= \hat{H}^I(t)\left|A,t\right\rangle_I \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

Mit (B.16) wurde die Bewegungsgleichung für die Zustände im Wechselwirkungsbild aufgefunden.