Anhang H

H.1 Integrale der S-Matrix

H.1.1 Feynmans Methode

Bei der Berechnung der S-Matrix treten Integrale über Zwischenzustände auf und die praktische Methode zur Bestimmung solcher Integrale wurde von FEYNMAN angegeben. Diese Methode führt Hilfsvariable derart ein, daß die ursprüngliche Integration über den Viererimpulsraum der virtuellen Teilchen auf ein Standardintegral zurückgeführt wird. Es bleibt dann eine Integration über die Hilfsvariablen. Diese Vorgangsweise hat Vorteile: (1) sie ist explizit kovariant, (2) die Zahl der Pole wird auf zwei reduziert und (3) sie kann auf alle Integrale angewendet werden, welche bei der Bestimmung von Elementen der S-Matrix auftreten (inklusive divergente Integrale).

Ein typisches Integral hat die Form

$$I = \int d^4k \, \frac{F(k^\mu)}{a_1 a_2 \cdots a_n}, \tag{H.1}$$

mit den a_i als Polynom zweiter Ordnung des Vierervektors k^μ und $F(k^\mu)$ ist ein Polynom der Ordnung n'.

Wir führen nun Hilfsvariable x_1, x_2, ... ein mit dem Ziel, daß der Nenner $a_1 a_2 \cdots a_n$ die n-te Potenz eines Polynoms zweiter Ordnung in k^μ wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{\left[a_1 x_{n-1} + a_2\left(x_{n-2} - x_{n-1}\right) + \ldots + a_n(1 - x_1)\right]^n}. \end{aligned} \tag{H.2}$$

Ein Produkt aus n Polynomen benötigt daher $n-1$ Hilfsvariable. (H.2) kann man durch Induktion beweisen. Für $n = 1$ benötigt man keine Hilfsvariable, für $n = 2$ gilt

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2}, \tag{H.3}$$

was durch Ausintegrieren unmittelbar bewiesen wird. Man führt nun die neuen Variablen u_k wie folgt ein:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= u_1 u_2 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{n-1} &= u_1 u_2 \cdots u_{n-1}, \end{aligned}$$

und damit wird (H.2) in die Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} &= (n-1)! \int_0^1 du_1 \, u_1^{n-2} \int_0^1 du_2 \, u_2^{n-3} \cdots \int_0^1 du_{n-1} \\ &\times \frac{1}{[a_1 u_1 \cdots u_{n-1} + a_2 u_1 \cdots u_{n-2} (1-u_{n-1}) + \ldots + a_n (1-u_1)]^n} \end{aligned} \tag{H.4}$$

übergeführt. Die Integrationen über die Variablen $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sind dabei vertauschbar. Wir nehmen nun an, daß (H.2) und damit (H.4) für n Polynome gültig ist. Dann erhalten wir für $n+1$ Polynome:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} = (n-1)! \int_0^1 du_1 \, u_1^{n-2} \cdots \int_0^1 du_{n-1} \, \frac{1}{A^n a_{n+1}},$$

mit A^n dem Nenner im Integranden von (H.4). Man kann dies aber als

$$\int_0^1 du \frac{u^{n-1}}{[Au + B(1-u)]^{n+1}} = \frac{1}{nA^n B}$$

schreiben, was wiederum elementar zu beweisen ist. Wir finden daher für $u = u_0$ und $B = a_{n+1}$:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} = n! \int_0^1 du_0 \, u_0^{n-1} \ldots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{[Au_0 + a_{n+1}(1-u_0)]^{n+1}},$$

und damit ist (H.4) bewiesen.

H.1.2 Konvergente Integrale

Es wird nun angenommen, daß das auszuwertende Integral I absolut konvergent ist. Der Nenner in (H.2) oder (H.4) kann dann stets wie

$$A^n = \left[(k-g)^2 + a^2\right]^n$$

geschrieben werden, wobei der Vierervektor g^μ und der Skalar a von der Integrationsvariablen k^μ unabhängig sind, aber von der Hilfsvariablen x abhängen. Da das Integral konvergieren soll, kann man den Ursprung im k^μ-Raum verschieben:

$$k^\mu \quad \rightarrow \quad k^\mu + g^\mu,$$

und A^n wird zu

$$A^n = (k^2 + a^2)^n.$$

Wir mitteln nun den Integranden über die Richtungen des Vierervektors k^μ, was der Substitution

$$\begin{aligned} k_\mu k_\nu &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu} k^2 \\ k_\mu k_\nu k_\lambda k_\sigma &= \frac{1}{24}(k^2)^2\left(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}\right) \end{aligned}$$

entspricht. Mit Hilfe dieser Ausdrücke haben dann die Integrale die Form:

$$I_{mn} = \int d^4k \, \frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n}. \tag{H.5}$$

Wir behandeln nun die Pole entsprechend Abschnitt 3.4 und berücksichtigen, daß jedem der ursprünglichen Nenner a_s ein rein imaginärer Beitrag $-i\varepsilon_s$ hinzugefügt werden muß. Gleichung (H.2) oder (H.4) ersetzen diese $-i\varepsilon_s$ derart durch einen neuen Term $-i\varepsilon$, daß die $2n$ einfachen Pole durch zwei Pole n-ter Ordnung ersetzt werden, welche, nach Verschiebung des Ursprungs, in den Punkten

$$k^0 = \pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + a^2}$$

aufgefunden werden. Man kann nun, wie in Abb. H.1 dargestellt, den Integrationsweg in der komplexen k^0-Ebene um 90° drehen, ohne einen Pol zu kreuzen und man integriert dann von $-i\infty$ nach $i\infty$. Wir setzen

$$k^0 = ik'^0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}',$$

sodaß k'^0 von $-\infty$ nach ∞ integriert wird. Aus (H.5) wird dann:

$$I_{mn} = i\int d^4k' \, \frac{(k'^2)^{m-2}}{(k'^2+a^2)^n}. \tag{H.6}$$

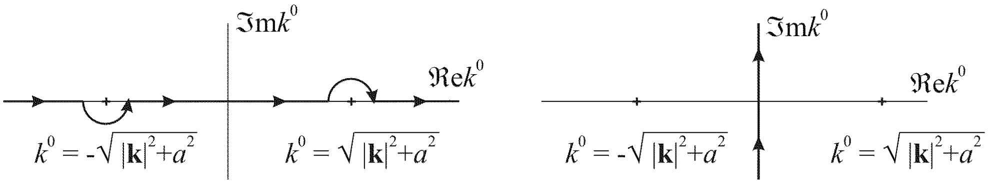

Abbildung H.1: Die k^0-Integration in der komplexen k^0-Ebene.

Die Integration wird nun über den vierdimensionalen sphärischen Raum $k'^2 = |\mathbf{k}'|^2 + k'^2_0$ ausgeführt. Man kann vierdimensionale Polarkoordinaten κ, φ, ϑ und χ einführen:

$$\int d^4k' = \int d\kappa\, \kappa^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin\vartheta \int_0^{\pi} d\chi\, \sin^2\chi = 2\pi^2 \int d\kappa\, \kappa^3.$$

Man integriert (H.6) zunächst über die Winkel und erhält im weiteren:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= 2\pi^2 i \int_0^{\infty} d\kappa\, \frac{(\kappa^2)^{m-2}\kappa^3}{(\kappa^2+a^2)^n} \\ &= i\pi^2 \int_0^{\infty} dt\, \frac{t^{m-1}}{(t+a^2)^n} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\int d^4k \frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}} B(m, n-m),$$

mit $B(m, n-m) = \Gamma(m)\Gamma(n-m)/\Gamma(n)$, der Gaussschen Betafunktion. Die Bedingung für die Existenz ist $n > m > 0$ und dies ist somit auch die Bedingung für die Konvergenz der Integrale.