AUSGEWÄHLTE KAPITEL AUS "NUMERISCHE METHODEN IN DER PHYSIK"
H. Sormann SS 2007

Drittes Thema: Finite Elemente

Numerische Auswertung gewisser partieller Differentialgleichungen mittels der Methode der Finiten Elemente.

1. Einleitung

Der hier vorliegende Text bietet Ihnen einen ersten Einstieg in das keineswegs einfache Thema der "Finite-Elemente-Methode".
Er enthält die theoretischen Grundlagen sowie einige Programmierbeispiele.

Es ist im Rahmen dieser Lehrveranstaltung aus Zeitgründen völlig unmöglich, Ihnen auch nur ansatzweise eine "komplette" Darstellung der "Finite-Elemente-Methode" bzw. ihrer vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten zu bieten. Es gibt dafür auszeichnete (und teilweise - im wahrsten Sinne des Wortes – erschöpfende) Literatur (s. nächste Seite).

Für Leute, denen die folgende sehr knappe Einführung in das Thema "Finite-Elemente-Methode" nicht genügt, die aber dennoch nicht dicke einschlägige Lehrbücher durcharbeiten wollen, empfehle ich -als Kompromiß - nachdrücklich die Lektüre einer Zusammenfassung von Ewald Schachinger mit dem Titel "Finite Elemente". Diesen Text finden Sie zum Downladen unter

schachinger_finite_elemente.pdf

auf der Webseite dieser Lehrveranstaltung.

Ich möchte Ihnen – meinem Stil treu bleibend – einen pragmatischen Einstieg in das Thema bieten: nur so viel an mathematischem Unterbau, als ich für nötig halte, viel eigene Programmierarbeit, und einige Anwendungen auf physikalisch interessante Probleme.

Zum Abschluß dieser einführenden Worte noch ein Zitat aus dem Buch von Paul DeVries[1]:

Beim Differenzenschemaverfahren (...) wurden die in der Differentialgleichung erscheinenden Ableitungen durch endliche Differenzen approximiert, und die daraus resultierenden linearen Gleichungen wurden gelöst. Bei der Methode der finiten Elemente geht man anders an die Aufgabe heran: Man approximiert die richtige Lösung mit Hilfe eines (flexiblen) Ansatzes und löst die sich ergebenden Gleichungen, um den "besten" Funktionsansatz zu finden. Beide Methoden haben ihre Vorteile; das Differenzenschemaverfahren ist sicherlich leicht zu verstehen und läßt sich einfach programmieren. Die Methode der finiten Elemente dagegen läßt sich etwas schwerer begreifen und programmieren, liefert aber mit dem gleichen Rechenaufwand häufig bessere Resultate. Auf vielen Gebieten der Ingenieurwissenschaften, so auch in der Strukturanalyse, hat sie im wesentlichen das Differenzenschemaverfahren verdrängt. In der Physik wird sie zur Zeit noch nicht in großem Umfang angewendet, aber die Situation ändert sich rasch.

Literatur für Anfänger:

[1] W. Richter, *Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit der Finite-Elemente-Methode*, Vieweg-Verlag Braunschweig, 1986.

[2] H. R. Schwarz, *Methode der finiten Elemente*, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1984.

[3] K.-J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice Hall Eds., 1996.

[4] K.-J. Bathe, *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, 2002.

[5] D. Marsal, *Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1976, Teil 4.

Literatur für Fortgeschrittene:

[6] *Finite Elements in Physics, Proc. of the 1st European Graduate Summer Course on Computational Physics*, Ed. R. Gruber, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[7] Th. Meis and U. Marcowitz, *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Springer, Berlin 1978.
Sehr mathematisch!

[1]P. L. DeVries, *Computerphysik*, Spektrum-Verlag Heidelberg, 1995, S. 274.

2. Theoretische Grundlagen

Die nun folgenden Ausführungen orientieren sich weitgehend an dem ausgezeichneten Buch "Finite-Elemente-Methode" von W. Richter [1].

Alles Weitere basiert auf einem *partiellen, linearen, zweidimensionalen Rand-Anfangswertproblem*, das aus den folgenden Elementen besteht:

<u>Erstens</u> aus der *partiellen Differentialgleichung* (DGL)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)+gf+h=a_0\frac{\partial f}{\partial t}\,, \tag{1}$$

wobei die Lösungsfunktion $f = f(x, y, t)$ zu bestimmen ist. Auch die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, g und h werden im allgemeinen <u>Funktionen</u> der beiden Ortskoordinaten sowie der Zeitkoordinate sein. Die Funktion $f(x, y, t)$ soll in einem geschlossenen *Grundgebiet* P und ab einem Zeitpunkt $t = t_0$ bestimmt werden:

$$(x,y)\in P \qquad t\geq t_0\,. \tag{2}$$

<u>Zweitens</u> aus den *Nebenbedingungen*: die DGL ist von erster Ordnung bzgl. der Zeit, d.h. es bedarf einer <u>Anfangsbedingung</u> der Art

$$f(x,y,t_0)=f_0(x,y) \qquad \text{für} \qquad (x,y)\in P\,. \tag{3}$$

Weiters muß das Verhalten der Lösungsfunktion am Rand (R) des Grundgebietes P determiniert sein. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen: entweder werden die Funktionswerte der Lösung auf dem Rand vorgeschrieben (*Dirichlet'sche Randbedingung*):

$$f(x,y,t)=f_R(x,y,t) \qquad \text{für} \qquad (x,y)\in R\,, \tag{4}$$

oder es gibt eine Bedingung an die Ableitung von f in Richtung der Randnormalen $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^\dagger$ (*Cauchy'sche Randbedingung*):

$$a_1\frac{\partial f}{\partial x}n_x+a_2\frac{\partial f}{\partial y}n_y+a_4f=a_5 \qquad \text{für} \qquad (x,y)\in R\,, \tag{5}$$

wobei a_4 und a_5 am Rand definierte Funktionen von x, y und t sind[2].

Häufig hat man es mit *gemischten* Randbedingungen zu tun, d.h. der Rand R wird in Teilstücke aufgeteilt, wobei auf bestimmten Teilstücken (R_1) eine Dirichlet- und auf den anderen (R_2) eine Cauchy-Bedingung gegeben ist.

Ich will mich in dieser Lehrveranstaltung nicht mit Existenz- und Eindeutigkeitsproblemen beschäftigen und verweise in diesem Zusammenhang auf die Literatur. Es möge genügen, daß alle in dieser Übung vorkommenden Probleme eine eindeutige Lösung besitzen.

Der entscheidende Punkt bei der *Finite-Elemente-Methode* besteht nun in der Anwendung eines <u>Variationsprinzips</u> auf das gestellte Problem (1–5):

[2] Der Spezialfall für $a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$ wird *inhomogene Neumann'sche Bedingung*, und der Spezialfall a_4=a_5=0 wird *homogene Neumann'sche Randbedingung* genannt.

Die folgenden Überlegungen dazu (s. Ref. [2], S. 22f) beginnen mit der folgenden Behauptung:

- Die Funktion $f(x,y,t)$, welche den Integralausdruck

$$I(f) := \int_P dxdy \left[\frac{1}{2}\left(a_1 f_x^2 + a_2 f_y^2 - g f^2\right) - hf + a_0 f_t f\right] + \int_{R_2} ds \left[\frac{1}{2} a_4 f^2 - a_5 f\right] \tag{6}$$

unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (3) und der Nebenbedingung (4) stationär macht, löst notwendigerweise die Randwertaufgabe (1)-(5).

Beweis:

Damit der Integralausdruck I für eine Funktion $f(x,y,t)$ einen stationären Wert annimmt, muß die erste Variation von I bzgl. f verschwinden.

Es ergibt sich also

$$\delta I = \int_P dxdy \left[a_1 f_x \delta f_x + a_2 f_y \delta f_y - g f \delta f - h \delta f + a_0 f_t \delta f\right] + \\ + \int_{R_2} ds \left[a_4 f \delta f - a_5 \delta f\right] \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{7}$$

Mittels der *Gauss'schen Integralformel*, die im wesentlichen eine Erweiterung der bekannten partiellen Integrationsformel für Einfachintegrale auf Integrale höherer Ordnung darstellt:

$$\int_P dxdy\, v u_x = \int_C ds\, v u n_x - \int_P dxdy\, v_x u\,,$$

wobei n_x der Richtungskosinus des äußeren Normalenvektors auf die Randkurve C bedeutet.

Die Anwendung dieser Formel auf den ersten Term in Glg. (7) ergibt

$$\int_P dxdy\,(a_1 f_x)\delta f_x = \int_R ds\,(a_1 f_x) n_x \delta f - \int_P dxdy\,(a_1 f_x)_x \delta f\,, \tag{8}$$

und ein entsprechendes Ergebnis erhält man auch für den zweiten Term[3]. Einsetzen dieser Resultate in Glg. (7) führt zur Stationaritätsbedingung

$$\delta I = \int_P dxdy \left[-(a_1 f_x)_x - (a_2 f_y)_y - g f - h - a_0 f_t\right] \delta f + \\ + \int_{R_2} ds \left[a_4 f - a_5 + a_1 f_x n_x + a_2 f_y n_y\right] \delta f \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{9}$$

Die obige Bedingung ist offenbar erfüllt, wenn die beiden Klammerausdrücke $[\cdots]$ verschwinden, d.h., wenn gilt[4]:

$$(a_1 f_x)_x + (a_2 f_y)_y + g f + h = a_0 f_t \tag{10}$$

[3] Beachten Sie bitte, daß gemäß der Gauss'schen Integralformel das Linienintegral über den gesamten Rand R des Grundgebietes P zu nehmen ist. Da aber überall außer auf den Randstücken R_2 die Dirichlet-Bedingung "herrscht", und dort die Funktion f vorgegeben ist (d.h. $\delta f = 0$), hat das Linienintegral (8) nur im Bereich $R = R_2$ Beiträge.

[4] In der mathematischen Theorie nennt man (10) die *Euler'sche DGL* des Integralausdrucks (7).

bzw.

$$a_1 f_x n_x + a_2 f_y n_y + a_4 f = a_5 \quad \text{für} \quad (x,y) \in R_2 \,. \tag{11}$$

Damit ist bewiesen, daß die Extremalaufgabe (6) die DGL (1) und die Cauchy'sche Randbedingung (5) enthält, und daß nur die bedeutend einfacheren Nebenbedingungen [die Anfangsbedingung (3) und die Dirichlet-Bedingung (4)] "extra" zu berücksichtigen sind.

Bevor nun näher auf die mathematische Auswertung des Variationsintegrals (6) eingegangen wird, soll das abstrakte Problem (1)-(5) mit einigen wichtigen partiellen DGL in der Physik in Verbindung gebracht werden.

Für die Behandlung *stationärer Feldprobleme* ist in der DGL (1)

$$a_0 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x,y,t) = f(x,y)$$

zu setzen. Sind die zu untersuchenden Medien räumlich homogen, so gilt weiters $a_1 = a_2 = 1$, und DGL hat die Form

$$f_{xx} + f_{yy} + gf + h = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta f(x,y) + gf + h = 0 \tag{12}$$

mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ als den sogenannten *Laplace-Operator.*

Für $g = 0$ und $h = -\varphi(x,y)$ wird daraus die wichtige *Poisson'sche Differentialgleichung*

$$\Delta f = \varphi(x,y) \,. \tag{13}$$

In der Wärmelehre beschreibt eine Poisson-Gleichung die stationäre Temperaturverteilung auf einer homogenen Platte, auf welcher sich Wärmequellen befinden, die durch die inhomogene Funktion $\varphi(x,y)$ beschrieben werden.

In der Elektrizitätslehre bedeutet $f(x,y)$ eine stationäre Potentialverteilung auf Grund der auf P vorgegebenen Flächenladungsverteilung $\varphi(x,y)$.

Weitere stationäre Feldprobleme sind z.B. die Ermittlung des Geschwindigkeitspotentials wirbelfreier Strömungsfelder, die Bestimmung der Spannungsverteilung in Torsionsproblemen usw.

Ein wichtiger Spezialfall ist die "homogene Version" der Poisson-Gleichung, d.h. Glg. (13) mit $\varphi(x,y) = 0$, die *Laplace'sche Differentialgleichung*

$$\Delta f(x,y) = 0 \,. \tag{14}$$

Es ist klar, daß die konkrete Lösung des Laplace-Problems nur durch die Randbedingungen (Dirichlet, Neumann, Cauchy) bestimmt wird. Welche physikalische Bedeutung diesen drei Typen von Randbedingungen zukommt, wird für ein stationäres Wärmeverteilungsproblem im Kapitel 3 dieses Übungsskriptums diskutiert.

Große Bedeutung in der Physik kommt auch der Variante von Glg. (12) mit $g = \lambda$ und $h = 0$ zu, der sog. *Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta f(x,y) + \lambda f = 0 \,. \tag{15}$$

Diese homogene DGL ist besonders dann interessant, wenn auch sämtliche Randbedingungen homogen sind. In einem solchen Fall tritt als Lösung von (15) die (physikalisch uninteressante) *triviale* Lösung

$$f(x, y) = 0$$

auf; darüber hinaus gibt es aber für *ganz bestimmte Werte von* λ sog. *nicht-triviale* Lösungen des Problems: in diesem Fall handelt es sich bei der Glg. (15) plus den homogenen Randbedingungen um ein Eigenwertproblem. Solche Probleme spielen in Physik und Technik eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit Berechnungen der Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen schwingungsfähiger Systeme wie Saiten, Membranen usw.

Was die Behandlung *instationärer* Probleme betrifft, will ich mich hier mit einem wichtigen Beispiel begnügen, welches sich aus der DGL (1) mit $a_1 = a_2 = 1$, $g = 0$, $h = -\varphi(x, y)$ und

$$a_0 = \kappa$$

ergibt:

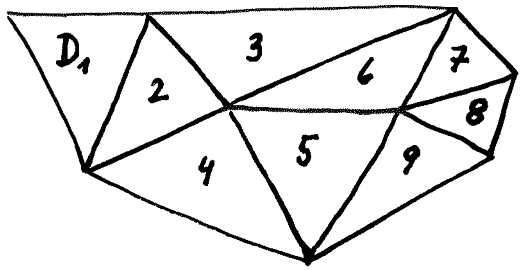
$$\kappa\, f_t(x, y, t) = \Delta f - \varphi(x, y)\,. \tag{16}$$

Dies ist die sog. *zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung* mit κ als der spezifischen Wärmeleitzahl. Die Lösung des Problems ergibt die zeitabhängige (instationäre) Temperaturverteilung auf einem Grundgebiet P.

Ich beginne nun mit den mathematischen Grundlagen des Finite-Elemente-Verfahrens, welche vom bereits ausführlich diskutierten Integralausdruck (6)

$$I(f) := \int_P dxdy \left[\frac{1}{2}\left(a_1 f_x^2 + a_2 f_y^2 - g f^2\right) - hf + a_0 f_t f\right] + \int_{R_2} ds\ \left[\frac{1}{2} a_4 f^2 - a_5 f\right] \tag{17}$$

ausgehen. Für die Auswertung des Flächenintegrals über P wird nun das Grundgebiet in Teilflächen zerlegt, wobei es einer der wesentlichen Vorteile der Finite-Elemente-Methode ist, daß man bei der Auswahl der Form und Zahl dieser Teilflächen große Freiheit hat.
Um die folgenden Rechnungen nicht zu umfangreich werden zu lassen, wollen wir das Grundgebiet ausschließlich in n Dreiecke verschiedener Größe aufteilen:



Wir erhalten somit aus Glg. (17) den Ausdruck

$$I(f) = \sum_{m=1}^{n} I_m + R_f \tag{18}$$

mit

$$I_m = \int_{D_m} dxdy \left[\frac{1}{2}\left(a_1 f_x^2 + a_2 f_y^2 - g f^2\right) - hf + a_0 f_t f\right] \tag{19}$$

und

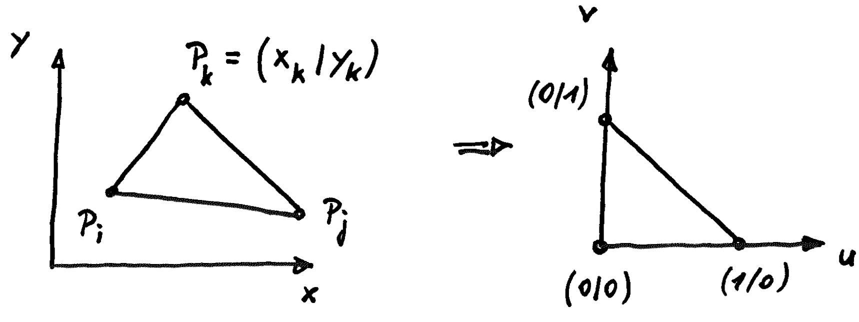
$$R_f = \int_{R_2} ds \left[\frac{1}{2} a_4 f^2 - a_5 f\right] . \tag{20}$$

Nun führen wir die erste Näherung in der Rechnung durch: wir ersetzen in jedem Dreieck die Koeffizientenfunktionen $a_1 = a_1(x, y, t)$ usw. durch die folgenden räumlichen Mittelwerte:

$$a_1(x, y, t) \approx \frac{1}{3}\left[a_1(x_i, y_i, t) + a_1(x_j, y_j, t) + a_1(x_k, y_k, t)\right] := a_{1,m}(t) \quad \text{usw.} \tag{21}$$

für das Dreieck D_m (die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit wird im folgenden weggelassen).

Um nun die Integration über alle Dreiecke auf einheitliche Weise durchführen zu können, wird jedes Dreieck der folgenden *linearen Abbildung* unterworfen:



Beachten Sie, daß die Indizierung der Eckpunkte stets *gegen den Uhrzeigersinn* erfolgen muß. Der Übergang vom (x, y)-Raum in den (u, v)-Raum geschieht durch die einfachen Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_i + (x_j - x_i)u + (x_k - x_i)v \, , \\ y &= y_i + (y_j - y_i)u + (y_k - y_i)v \end{aligned} \tag{22}$$

mit $0 \le u \le 1-v$ und $0 \le v \le 1$.

In der (u,v)-Darstellung haben die Integrale I_m die Form

$$I_m \approx \int_{D_0} dudv\, d_m \left\{ \frac{1}{2} \left[a_{1,m} \left(f_u u_x + f_v v_x \right)^2 + a_{2,m} \left(f_u u_y + f_v v_y \right)^2 - g_m f^2 \right] - h_m f + a_{0,m} f_t f \right\} . \tag{23}$$

Dabei bedeutet d_m die jeweilige *Jacobi-Determinante* für die Transformation $(x,y) \longrightarrow (u,v)$:

$$d_m = det \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) = 2D_m ,$$

d.h., die Jacobi-Determinante ist einfach die doppelte Fläche des m-ten Dreiecks. Eine Auswertung der quadratischen Terme in Glg. (23) und eine darauf folgende Zusammenfassung von Termen führt zum Ausdruck

$$I_m \approx \int_{D_0} dudv \left[\frac{1}{2} f_u^2 \underbrace{d_m \left(a_{1,m} u_x^2 + a_{2,m} u_y^2 \right)}_{e_{11,m}} + f_u f_v \underbrace{d_m \left(a_{1,m} u_x v_x + a_{2,m} u_y v_y \right)}_{e_{12,m}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} f_v^2 \underbrace{d_m \left(a_{1,m} v_x^2 + a_{2,m} v_y^2 \right)}_{e_{22,m}} - \frac{1}{2} g_m d_m f^2 - h_m d_m f + a_{0,m} d_m f_t f \right] . \tag{24}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Größen u_x, v_x, u_y und v_y können aus den Gleichungen (22) leicht ermittelt werden. Man erhält

$$u_x = \frac{y_k - y_i}{d_m} \qquad v_x = -\frac{y_j - y_i}{d_m} ,$$

$$u_y = -\frac{x_k - x_i}{d_m} \qquad v_y = \frac{x_j - x_i}{d_m} .$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Glg. (24) ergibt sich

$$e_{11,m} = \frac{a_{1,m}(y_k - y_i)^2 + a_{2,m}(x_k - x_i)^2}{d_m} , \tag{25}$$

$$e_{12,m} = -\frac{[a_{1,m}(y_k - y_i)(y_j - y_i) + a_{2,m}(x_k - x_i)(x_j - x_i)]}{d_m} , \tag{26}$$

$$e_{22,m} = \frac{a_{1,m}(y_j - y_i)^2 + a_{2,m}(x_j - x_i)^2}{d_m} . \tag{27}$$

Zusammenfassend ergibt sich für I_m der Ausdruck

$$I_m \approx \frac{e_{11,m}}{2} \int_{D_0} dudv\, f_u^2 + e_{12,m} \int_{D_0} dudv\, f_u f_v + \frac{e_{22,m}}{2} \int_{D_0} dudv f_v^2 -$$
$$- \frac{g_m d_m}{2} \int_{D_0} dudv f^2 - h_m d_m \int_{D_0} dudv f + a_{0,m} \int_{D_0} dudv f_t f . \tag{28}$$

Als nächsten wichtigen Schritt definieren wir nun für jedes Dreieck eine Ansatzfunktion für $f(u,v,t)$ mit zeitabhängigen, noch zu bestimmenden Koeffizienten c_m. Als einfachste Möglichkeit kommen dafür Funktionen in Frage, die sowohl in u als auch in v linear sind, also

$$f(u,v,t) = c_{1,m} + c_{2,m}u + c_{3,m}v \,. \tag{29}$$

Einsetzen dieser Ansatzfunktion in Glg. (28) ergibt

$$\begin{aligned} I_m \approx \frac{e_{11,m}}{2}\int_{D_0} dudv\, c_{2,m}^2 + e_{12,m}\int_{D_0} dudv\, c_{2,m}c_{3,m} + \frac{e_{22,m}}{2}\int_{D_0} dudv\, c_{3,m}^2 - \\ -\frac{g_m d_m}{2}\int_{D_0} dudv\, \left(c_{1,m} + c_{2,m}u + c_{3,m}v\right)^2 - h_m d_m \int_{D_0} dudv\, \left(c_{1,m} + c_{2,m}u + c_{3,m}v\right) + \\ +a_{0,m}d_m \int_{D_0} dudv\, \left(\dot{c}_{1,m} + \dot{c}_{2,m}u + \dot{c}_{3,m}v\right)\left(c_{1,m} + c_{2,m}u + c_{3,m}v\right) \,. \end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen, daß gilt:

$$\int_{D_0} dudv\, u^\alpha v^\beta = \int_{v=0}^{1}\int_{u=0}^{1-v} dudv\, u^\alpha v^\beta = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+2)!} \,.$$

Nun können die Integrale im Ausdruck für I_m ausgewertet werden, und man erhält das Ergebnis

$$\begin{aligned} I_m \approx \frac{1}{4}\left(e_{11,m}c_{2,m}^2 + 2e_{12,m}c_{2,m}c_{3,m} + e_{22,m}c_{3,m}^2\right) - \\ -\frac{g_m d_m}{48}\left(12c_{1,m}^2 + 2c_{2,m}^2 + 2c_{3,m}^2 + 8c_{1,m}c_{2,m} + 2c_{2,m}c_{3,m} + 8c_{1,m}c_{3,m}\right) - \\ -\frac{h_m d_m}{6}\left(3c_{1,m} + c_{2,m} + c_{3,m}\right) + \\ +\frac{a_{0,m}d_m}{24}\left(12\dot{c}_{1,m}c_{1,m} + 4\dot{c}_{1,m}c_{2,m} + 4\dot{c}_{1,m}c_{3,m} + 4\dot{c}_{2,m}c_{1,m} + \right. \\ \left. +2\dot{c}_{2,m}c_{2,m} + \dot{c}_{2,m}c_{3,m} + 4\dot{c}_{3,m}c_{1,m} + \dot{c}_{3,m}c_{2,m} + 2\dot{c}_{3,m}c_{3,m}\right) \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Als nächstes soll die Glg. (30) auf Matrixform gebracht werden:

$$\mathbf{c}_m := \begin{pmatrix} c_{1,m} \\ c_{2,m} \\ c_{3,m} \end{pmatrix} \,.$$

Sie können sich nun durch Nachrechnen davon überzeugen, daß

- die Terme mit $e_{11,m}$, $e_{12,m}$ und $e_{22,m}$ in Glg. (30) in der Form

$$\frac{1}{4}\mathbf{c}_m^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11,m} & e_{12,m} \\ 0 & e_{12,m} & e_{22,m} \end{pmatrix} \mathbf{c}_m \quad ,$$

- die Terme mit g_m in der Form

$$-\frac{g_m d_m}{48} \mathbf{c}_m^\dagger \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{c}_m \quad ,$$

- die Terme mit h_m in der Form

$$-\frac{h_m d_m}{6} \mathbf{c}_m^\dagger \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

- die Terme mit $a_{0,m}$ in der Form

$$\frac{a_{0,m} d_m}{24} \mathbf{c}_m^\dagger \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{c}}_m$$

geschrieben werden können.

Die $c_{1,m}$, $c_{2,m}$ und $c_{3,m}$ können nun mittels Glg. (29) mit den Funktionswerten der Lösungsfunktion an den Eckpunkten des m-ten Dreiecks verknüpft werden:

$$\begin{aligned} f_i &\equiv f(u=0, v=0) = c_{1,m} \\ f_j &\equiv f(u=1, v=0) = c_{1,m} + c_{2,m} \\ f_k &\equiv f(u=0, v=1) = c_{1,m} + c_{3,m} \end{aligned} \tag{31}$$

bzw.

$$\mathbf{c}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{pmatrix} . \tag{32}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Formel für I_m ein, so ergibt sich nach einiger Rechenarbeit das Resultat

$$I_m = \frac{1}{4} \mathbf{f}^\dagger M_1 \mathbf{f} - \frac{g_m d_m}{48} \mathbf{f}^\dagger M_2 \mathbf{f} - \frac{h_m d_m}{6} \mathbf{f}^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_{0,m} d_m}{24} \mathbf{f}^\dagger M_2 \dot{\mathbf{f}} \tag{33}$$

mit $m = 1, \ldots, n$ und den beiden symmetrischen Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} e_{11,m} + 2e_{12,m} + e_{22,m} & -e_{11,m} - e_{12,m} & -e_{12,m} - e_{22,m} \\ -e_{11,m} - e_{12,m} & e_{11,m} & e_{12,m} \\ -e_{12,m} - e_{22,m} & e_{12,m} & e_{22,m} \end{pmatrix} \tag{34}$$

und

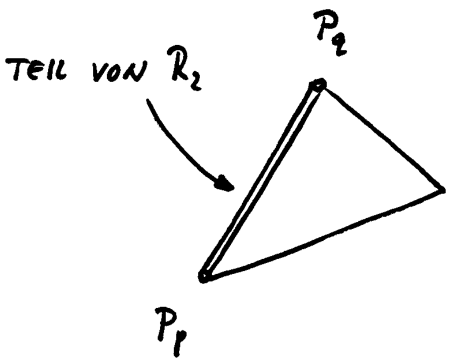
$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \tag{35}$$

Nun bleibt noch die Auswertung des zweiten Integrals auf der rechten Seite von Glg. (17), das auf der Cauchy-Bedingung [Glg. (5)] beruht, die auf dem Teil R_2 der Umrandung des Grundgebietes wirkt.
Man kann nun R_2 als eine Summe von n_R Dreiecksseiten interpretieren, wobei jede dieser Seiten von einem Eckpunkt P_p zu einem Eckpunkt P_q geht (q und p sind die "Nummern" dieser Punkte):

$$R_f = \int_{R_2} ds \, \left[\frac{1}{2} a_4 f^2 - a_5 f\right] = \sum_{\gamma=1}^{n_R} I_{p_\gamma, q_\gamma} \tag{36}$$

mit

$$I_{p,q} = \int_{P_p}^{P_q} ds \, \left[\frac{1}{2} a_4 f^2 - a_5 f\right] \, . \tag{37}$$



Man macht nun die Substitution

$$s = d_{pq}\, \sigma \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq \sigma \leq 1 \, ,$$

wobei d_{pq} die Strecke zwischen P_p und P_q bedeutet:

$$d_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \, .$$

Zusätzlich wird die Funktion f entlang dieser Strecke <u>linearisiert</u>:

$$f(\sigma, t) = f_p + (f_q - f_p)\sigma \, . \tag{38}$$

Man erhält daraus das Ergebnis

$$I_{p,q} = \frac{1}{2} a_{4,pq} d_{pq} \int_0^1 d\sigma \, \left[f_p + (f_q - f_p)\sigma\right]^2 - a_{5,pq} d_{pq} \int_0^1 d\sigma \, \left[f_p + (f_q - f_p)\sigma\right] \, , \tag{39}$$

wobei die Größen $a_{4,pq}$ und $a_{5,pq}$ räumliche Mittelungen der Koeffizientenfunktionen $a_4(x, y, t)$ und $a_5(x, y, t)$ darstellen:

$$\begin{aligned} a_{4,pq}(t) &= \frac{1}{2}\left[a_4(x_p, y_p, t) + a_4(x_q, y_q, t)\right] \\ & \qquad . \\ a_{5,pq}(t) &= \frac{1}{2}\left[a_5(x_p, y_p, t) + a_5(x_q, y_q, t)\right] \, . \end{aligned} \tag{40}$$

Ebenso wie die Flächenintegrale I_m [Glg. (33, 34)] können auch die Linienintegrale $I_{p,q}$ "in Matrix-Schreibweise" angegeben werden. Die Rechnung, die hier nicht in allen Details dargestellt werden soll, hat das Ergebnis

$$I_{p,q} = \frac{a_{4,pq} d_{pq}}{12} (f_p \quad f_q) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \\ f_q \end{pmatrix} - \frac{a_{5,pq} d_{pq}}{2} (f_p \quad f_q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{41}$$

Für den gesamten Integralausdruck Glg. (17) sind also die Terme (33) über alle Dreiecke ($m = 1, \ldots, n$) und die Terme (41) entlang aller Randstrecken R_2 zu summieren. Unter Anwendung des Extremalprinzips sind die einzelnen Terme nach den entsprechenden Dreiecks-Endpunkten bzw. den Endpunkten der Teile der Randstrecken zu differenzieren, und die Ergebnisse dieser Rechnungen sind Null zu setzen. Auf diese Weise erhält man für das m-te Dreieck das lineare System

$$\frac{1}{2} M_1 \mathbf{f} - \frac{g_m d_m}{24} M_2 \mathbf{f} + \frac{a_{0,m} d_m}{24} M_2 \dot{\mathbf{f}} = \frac{h_m d_m}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{42}$$

Für die Teilstrecke von P_p nach P_q des Randbereiches R_2, für den die Cauchy-Bedingung (5) gilt, ergibt sich das lineare System

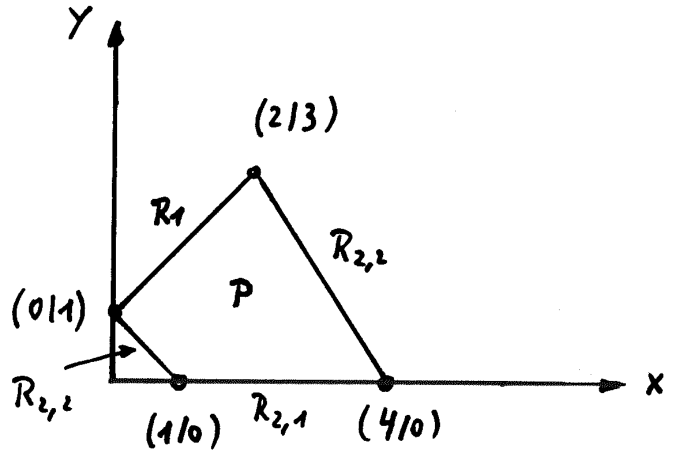
$$\frac{a_{4,pq} d_{pq}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \\ f_q \end{pmatrix} = \frac{a_{5,pq} d_{pq}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{43}$$

In diesen Gleichungen sind die Anfangsbedingung (3) und die Dirichlet-Bedingung (4) noch nicht berücksichtigt.

3. Ein stationäres 2-dim. Randwertproblem

Für die erste konkrete Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Rahmen dieser Übung soll nun die *stationäre* Variante des im vorigen Abschnitt erläuterten Problems programmiert werden.

Problemstellung: Gegeben sei eine Platte P mit den folgenden Abmessungen:



Gesucht sei die Temperaturverteilung $T(x,y)$ innerhalb der Platte , wobei diese von einer Wärmequelle mit einer Leistung $\dot{Q}$ erwärmt wird. Die Beschreibung dieses Sachverhalts geschieht mathematisch durch die zweidimensionale, inhomogene Poissongleichung

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\dot{Q}=0\,.$$

Die Temperatur $T(x,y)$ wird in Grad Celsius angegeben, und die Koordinaten x und y in Zentimetern.

Die Parameter

$$\lambda \quad \text{(Wärmeleitkoeffizient)} \qquad \left[\frac{W}{cm^oC}\right]$$

$$\dot{Q} \quad \text{(innere Wärmequelle)} \qquad \left[\frac{W}{cm^3}\right]$$

sollen in den gegebenen Einheiten die Werte λ=2 und $\dot{Q}$=3 haben.

Randbedingungen:

- Entlang R_1 wird eine (konstante) Temperatur von 20 ^{o}C erzwungen.
- Wärmeabfluß durch Konvektion über $R_{2,1}$.
- Der Bereich $R_{2,2}$ ist thermisch isoliert
  (d.h., kein Wärmezufluß oder Wärmeabfluß).

$$T(x,y) = 20 \qquad , \quad (x,y) \in R_1 \quad \text{Dirichlet}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x + \frac{\partial T}{\partial y}n_y\right) - \frac{1}{2}T = 0 \qquad , \quad (x,y) \in R_{2,1} \quad \text{Cauchy}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x + \frac{\partial T}{\partial y}n_y\right) = 0 \qquad , \quad (x,y) \in R_{2,2} \quad \text{"Sonderform" Cauchy (Neumann, homogen)}$$

Vergleichen wir nun diese Aufgabe mit dem allgemeinen Problem, das in den Gleichungen (1), (4) und (5) definiert ist, so ergeben sich (ohne Einheiten) die Parameter

$$a_1 = a_2 = 2 \qquad g = 0 \qquad h = 3 \qquad a_0 = 0$$

sowie (für die Randbedingungen)

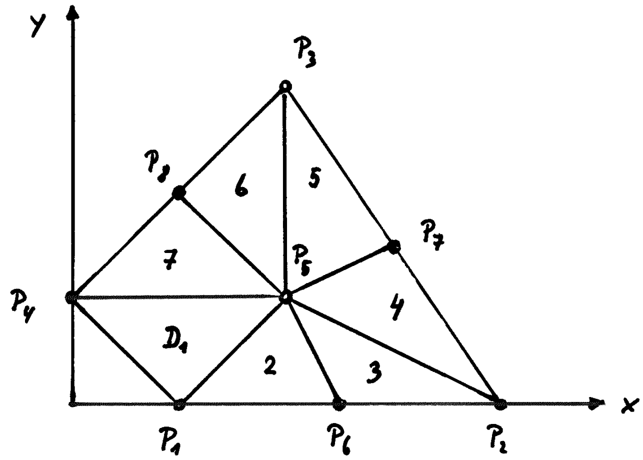
$$f_{R_1} = 20$$

$$a_4 = -0.5 \quad \text{und} \quad a_5 = 0 \qquad \text{für} \quad R_{2,1}$$

$$a_4 = a_5 = 0 \qquad \text{für} \quad R_{2,2}$$

Alle Koeffizientenfunktionen sind nicht ortsabhängig, d.h. die in den Gleichungen (22) und (40) angegebenen Mittelungen sind irrelevant.

Das nächste Bild zeigt die Aufteilung des Grundgebietes in Dreiecke:



Das Grundgebiet umfaßt also 7 Dreiecke und 8 Eckpunkte mit den Koordinaten

```
P1=(1/0)  P2=(4/0)    P3=(2/3)    P4=(0/1)
P5=(2/1)  P6=(2.5/0)  P7=(3/1.5)  P8=(1/2)
```

Es ist nun

Ihre erste Aufgabe,

mittels der im Abschnitt "Theoretische Grundlagen" diskutierten Formeln die (näherungsweisen) Werte der Lösungsfunktion des Randwertproblems an den 8 Punkten zu berechnen. Zu diesem Zweck müssen die Gleichungen (42) und (43) dazu verwendet werden, ein *lineares, inhomogenes Gleichungssystem* der Ordnung 8 für die gesuchten Lösungswerte $T_1 \cdots T_8$ aufzustellen.

Dazu noch ein paar Anmerkungen:

- Die Beiträge der einzelnen Dreiecke $D_1 \cdots D_7$ zu diesem Gleichungssystem sind durch die Glg. (42) gegeben, welche im "nichtdynamischen Fall", d.h. für $a_0 = 0$, sowie für $g = 0$ die einfache Form

$$\frac{1}{2} M_1 \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} = \frac{hd_m}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{44}$$

  annimmt, wobei M_1 die in Glg. (34) sowie in den Glgen. (25-27) definierte Matrix bedeutet. Beachten Sie, daß die Werte $a_{1,m} = a_{2,m} = \lambda$ für das gegebene Beispiel konstant sind, und daß die Eckpunkt-Koordinaten natürlich vom jeweiligen Dreieck abhängen.

- Ein sehr wichtiger Punkt ist die korrekte Zuordnung der Komponenten von (44) zum 8x8-Gleichungssystem. Beachten Sie die Indizes der Eckpunkte: für das erste Dreieck D_1 bezeichnen z. B. die Indizes i, j und k die konkreten Werte

```
i=1      j=5      k=4    .
```

  Die Gleichung (44) hat für D_1 die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_5 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

  Nennen wir die 9 Elemente der obigen Koeffizientenmatrix $ma(1,1) \ldots ma(3,3)$ und die 3 Komponenten des inhomogenen Vektors $y(1) \ldots y(3)$, so hat die Zuordnung dieser Größen zum 8x8-Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix "mat" und dem inhomogenen Vektor "inhom" wie folgt zu geschehen:

```
ma(1,1) --> mat(1,1)     ma(1,2) --> mat(1,5)     ma(1,3) --> mat(1,4)
ma(2,1) --> mat(5,1)     ma(2,2) --> mat(5,5)     ma(2,3) --> mat(5,4)
ma(3,1) --> mat(4,1)     ma(3,2) --> mat(4,5)     ma(3,3) --> mat(4,4)

y(1) --> inhom(1)
y(2) --> inhom(5)
y(3) --> inhom(4)
```

- Ebenso gehen Sie mit den Cauchy-Randbedingungen [Glg. (32)] um, die für das gegebene Beispiel die Form

$$\frac{a_4 d_{pq}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_p \\ T_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

  haben.

  Für die Strecke $P_1 \to P_6$, also für $p = 1$ und $q = 6$, so erhalten Sie für Glg. (45) den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} -0.25 & -0.125 \\ -0.125 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

  Nennen wir die obige 2x2-matrix "mb", so lautet die Zuordnung zur "großen" 8x8-Matrix "mat" so:

```
mb(1,1) --> mat(1,1)      mb(1,2) --> mat(1,6)
mb(2,1) --> mat(6,1)      mb(2,2) --> mat(6,6)
```

  Zum inhomogenen Vektor gibt es in diesem Fall keine Beiträge.

- Die Cauchy-Beiträge auf den Randbereichen $R_{2,2}$ ($P_4 \to P_1$ und $P_2 \to P_7 \to P_3$) lauten nach Glg. (43) wegen $a_4 = a_5 = 0$ trivialerweise einfach

$$0 = 0$$

  und können somit ignoriert werden.

- Als letztes bleiben noch die Beiträge auf Grund der Dirichlet'schen Randbedingung auf R_1, die im konkreten Fall einfach zu den Gleichungen

$$T_3 = 20 \qquad T_4 = 20 \qquad T_8 = 20$$

  führt. Dies kann so geschehen, daß man die entsprechenden Unbekannten des linearen Gleichungssystems formal eliminiert. Ein Vorschlag von mir (vielleicht finden Sie eine bessere Lösung):

```
// Behandlung des T-Wertes mit dem Index "ind", der auf Grund
// einer Dirichlet-Bedingung den Wert "wert" haben muss:
//    npoint = Zahl der zu berechnenden Punkte

   for(np=1; np<=npoint; np++) {
     inhom[np]=inhom[np] - mat[np][ind]*wert;
     mat[ind][np]=0.0;
     mat[np][ind]=0.0;
   }
   mat[ind][ind]=1.0;
   inhom[ind]=wert;
```

- Denken Sie daran, daß bei der Berechnung der Matrix "mat" und des inhomogenen Vektors "inhom" immer mehrere Punkte beteiligt sind. Sie müssen daher diese Werte "aufsummieren". Vergessen Sie auch nicht, die Matrix "mat" und den Vektor "inhom" anfangs mit Nullen zu füllen.

- Ich lasse Ihnen, wie bei mir üblich, bei der Erstellung Ihrer Programme weitgehend freie Hand. Versuchen Sie, die Berechnungen, die zur Matrix "mat" und zum Vektor "inhom" führen, möglichst zu automatisieren.

- Was nun die numerische Lösung des linearen Gleichungssystems betrifft, so wissen Sie aus meiner LV "Numerische Methoden in der Physik", Kap. 2, daß es <u>direkte</u> Methoden wie die LU-Aufspaltung und <u>iterative</u> Methoden wie die Gauss-Seidel-Methode gibt.

  <u>C- und F90-User:</u> Verwenden Sie die LU-Methode, die aus zwei Routinen besteht, die ich für Sie ins Internet stelle:

  ```
  File  LUprog.c    enthaelt die Routinen  ludcmp.c   und  lubksb.c
  File  LUprog.f90  enthaelt die Routinen  ludcmp.f90 und lubksb.f90
  ```

  Die Bedeutung der Ein- und Ausgabeparameter steht in meinem Numerik-Skriptum in den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.5.

  <u>Matlab-User:</u> Verwenden Sie die Matlab-internen Möglichkeiten zur Lösung eines Gleichungssystems mat*loes = inhom:

  ```
  Entweder:
            loes=mat\inhom;

  Oder (falls Rundungsfehler-Probleme auftauchen):
            augmented=[mat inhom];
            cr=rref(augmented);
            loes=cr(:,npoints+1); %npoints=Ordnung des Systems
  ```

Wenn Sie alle Berechnungen korrekt durchgeführt haben, sollten Sie für die 8 Temperatur-Stützpunkte die folgenden Werte erhalten:

```
FINITE-ELEMENTE-METHODE  SS 2005  ERSTER TEST
                        x          y            T
 Punkt Nr.    1      1.00000    0.00000      63.22138
 Punkt Nr.    2      4.00000    0.00000     132.94055
 Punkt Nr.    3      2.00000    3.00000      20.00000
 Punkt Nr.    4      0.00000    1.00000      20.00000
 Punkt Nr.    5      2.00000    1.00000      63.87629
 Punkt Nr.    6      2.50000    0.00000      99.83448
 Punkt Nr.    7      3.00000    1.50000      70.95630
 Punkt Nr.    8      1.00000    2.00000      20.00000
```

Achtung. Wenn Sie bei der Entwicklung dieses Programms noch mehr Testdaten (inkl. Zwischenwerte) benötigen, finden Sie diese auf dem File

fin_e1e1.erg

Wenn Sie diesen Test erfolgreich durchgeführt haben, können Sie daran gehen, die Auswertung des vorliegenden Problems etwas realistischer zu gestalten, d.h. mit einer deutlich vermehrten Zahl von finiten Elementen (sprich: Dreiecken). Ich habe dafür schon einige Vorarbeiten geleistet und schlage Ihnen die folgende Einteilung des Grundgebietes in 28 Dreiecke vor:

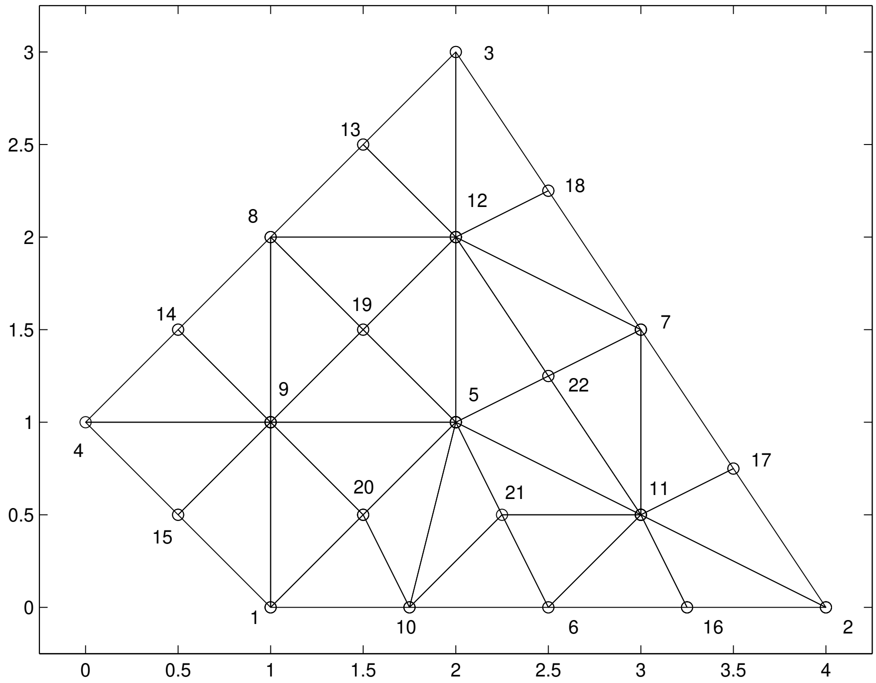


Figure 1: Punktnetz mit 28 Dreiecken.

Die entsprechenden Daten können Sie als File "dreiecke_28_1.dat" downladen; die Struktur dieses Datenfiles ist sehr einfach:

```
  28  22  14            % Zahl der Dreiecke/Eckpunkte/Randstrecken
1 10 6 16 2 17 7 18 3 13 8 14 4 15 1     % Nummern der Randpunkte
     4   15    9
    15    1    9
     1   20    9
     1   10   20
    10    5   20
    10   21    5
    10    6   21
    21   11    5
     6   11   21
     6   16   11
```

```
   16    2   11         % Definition der 28 Dreiecke durch die
    2   17   11         % Nummern der jeweiligen Eckpunkte
   11   17    7         % (gegen den Uhrzeigersinn).
   11    7   22
   22    7   12
    7   18   12
   12   18    3
   12    3   13
    8   12   13
   19   12    8
    9   19    8
    9    8   14
    9   14    4
   20    5    9
    5   19    9
    5   11   22
    5   12   19
    5   22   12
1.0   0.0
4.0   0.0
2.0   3.0
0.0   1.0
2.0   1.0
2.5   0.0
3.0   1.5
1.0   2.0
1.0   1.0
1.75  0.0
3.0   0.5
2.0   2.0               % x/y-Koordinaten der 22 Eckpunkte.
1.5   2.5
0.5   1.5
0.5   0.5
3.25  0.0
3.5   0.75
2.5   2.25
1.5   1.5
1.5   0.5
2.25  0.5
2.5   1.25
```

Zweite Aufgabe

- Lösen Sie das stationäre Wärmeleitproblem unter Verwendung des Punktnetzes von Abb. 1 mit den folgenden Randbedingungen:

  Entlang der Linie R_1 soll den 5 Stützpunkten (von links unten nach rechts oben) das folgende Temperaturprofil aufgeprägt sein:

  ```
  erster Punkt   (Nr. 4) = 30 Grad C
  zweiter Punkt  (Nr.14) = 30 Grad C
  dritter Punkt  (Nr. 8) = 75 Grad C
  vierter Punkt  (Nr.13) = 50 Grad C
  fuenfter Punkt (Nr. 3) = 50 Grad C
  ```

  Vergessen Sie nicht, den auf Seite 16 unten angegebenen Algorithmus diesen neuen Bedingungen anzupassen!

  Die Cauchy-Bedingungen lauten:

  $$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) + a_4 T = 0 \quad , \quad (x,y) \in R_{2,1} \tag{46}$$

  $$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = 0 \quad , \quad (x,y) \in R_{2,2} \tag{47}$$

  mit λ=2.0 und verschiedenen Werten von a_4.

- Führen Sie die Rechnung viermal durch, und zwar unter folgenden Annahmen:

  1. Keine Wärmequelle auf der Platte, d.h.: $\dot{Q} = 0$, und $a_4 = -0.3$
  2. Die Platte wird gleichmäßig erwärmt: $\dot{Q} = +5$, und $a_4 = -0.3$
  3. Die Platte wird gleichmäßig gekühlt: $\dot{Q} = -5$, und $a_4 = -0.3$
  4. Die Platte wird gleichmäßig erwärmt: $\dot{Q} = +5$, und $a_4 = 0.0$

- Bitte geben Sie die jeweiligen Temperaturwerte an den Stützpunkten als Tabelle aus, damit ich feststellen kann, ob die Zahlenwerte Ihrer Ergebnisse stimmen.

- Interessanter ist hingegen die *grafische* Darstellung der Ergebnisse:
  Zu diesem Zweck legen Sie über das Grundgebiet ein mehr oder minder dichtes Punktnetz von 101 mal 101 Punkten für $0 \leq (x,y) \leq 4$. Nun geht es darum, in jedem Punkt (x_i, y_j) den numerischen Temperaturwert zu interpolieren.

  Dies ist im konkreten Fall der finiten Elemente sehr einfach; Sie brauchen nur die folgenden Rechenschritte durchzuführen:

1. Feststellen, zu welchem Dreieck der Punkt $(x_i; y_j)$ gehört (z.B. zum Dreieck "m").
2. Berechnen, welchen Koordinaten (u, v) dieser Punkt entspricht [Glg. (22)].
3. Durchführung der (linearen) Interpolation mittels der Gleichungen (22), (29) und (32).
4. Speichern Sie alle auf diese Weise interpolierten Werte $T(x_i, y_j) = T_{ij}$ als Matrix ab (Filename z. B. *temp_daten*), und geben Sie den Inhalt dieser Matrix mit einem geeigneten Matlab-Programm aus.

   Mein Vorschlag:

   ```
   matrix=load('temp_daten');
   pcolor(matrix);
   caxis([tmin,tmax]);    % Dieser Befehl sorgt dafuer, dass die
                          % in den Diagrammen auftretenden Farben
                          % immer dieselben Temperaturen bedeuten.
                          % Nehmen Sie fuer tmin=0 und fuer tmax=130 .
   axis('equal');
   ```

- Um Ihnen etwas mehr Sicherheit zu geben, daß Ihre numerisch ermittelten Temperaturverteilungen richtig sind, gebe ich Ihnen im folgenden die Temperaturen (in Grad Celsius) an der rechten, unteren Ecke des Grundgebietes (Punkt Nr. 2 für x=4, y=0) an:
  (1) 104.7963   (2) 123.7232   (3) 85.8695   (4) 59.2382

- Diskutieren Sie die erhaltenen Temperaturverteilungen.

  Es gehört zu dieser Aufgabe, daß Sie sich über die Physik dieses thermodynamischen Problems Gedanken machen. Versuchen Sie also durch das Studium Ihrer numerischen Ergebnisse zu verstehen, welche Wärmeflüsse über die Ränder des Grundgebietes die Platte betreten und wieder verlassen.

  Eine zentrale Rolle spielen dabei die Randbedingungen, und zwar weniger die Dirichlet-Bedingung auf der Kante ($4 \rightarrow 3$), welche ja für alle Beispiele (1)-(4) gleich ist, sondern die beiden Cauchy-Bedingungen (46) und (47). Die Randbedingung (47), welche für die Randstücke ($1 \rightarrow 4$) und ($2 \rightarrow 3$) gilt, sorgt dafür, daß dort der Temperaturgradient Null ist: über diese Kanten kann daher kein Wärmefluß stattfinden, weder von draußen auf die Platte noch in entgegengesetzter Richtung. Die Platte ist also bzgl. dieser Randstücke *thermisch isoliert.*

  Auf der unteren Kante ($1 \rightarrow 2$) "herrscht" die Cauchy-Bedingung (46)

  $$\nabla_{\mathbf{n}} T = -\frac{a_4}{\lambda} T \, ,$$

  wobei $\mathbf{n}$ der nach außen (d.h. im gegebenen Fall nach unten) gerichtete Normalenvektor ist. Da die Temperaturwerte T in allen untersuchten

Fällen positiv sind, gilt also folgendes: Bei negativen Werten von a_4 steigt die Temperatur auf der unteren Kante in Richtung Umgebung an; dies provoziert einen Wärmefluß von außen auf die Platte.

- Auf welche Weise verläßt diese Wärmemenge die Platte wieder (das muß sie natürlich, denn sonst gäbe es kein stationäres Temperaturprofil)?.
- Wie wirkt sich auf dieses thermische Verhalten eine kontinuierliche Wärmezufuhr ($\dot{Q} > 0$) bzw. Wärmeabfuhr ($\dot{Q} < 0$) aus? Vergleichen Sie die Ergebnisse der Rechnungen (1), (2) und (3).
- Vergleichen Sie ebenfalls die Rechnungen (2) und (4): wie wirkt sich bei positivem $\dot{Q}$ eine *thermische Isolierung der unteren Kante* aus?

4. Die 2-dim. Wärmeleitungsgleichung

Nach dem bisher behandelten Randwertproblem kehren wir zu dem in den Gleichungen (1)–(5) definierten Rand-Anfangswertproblem zurück.

Dazu erweitern wir die auf S. 11 angeschriebene Poissongleichung um die in der allgemeinen Differentialgleichung (1) enthaltene erste Ableitung der Lösungsfunktion nach der Zeit. In unserem thermodynamischen Problem bedeutet das

$$a_0 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \rho c_p \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} \, ,$$

wobei ρ die Dichte des wärmeleitenden Materials und c_p seine spezifische Wärmekapazität bedeutet. Beide Parameter sollen auf der gesamten Platte konstant sein:

$$\rho = 4.0 \frac{g}{cm^3} \qquad \text{und} \qquad c_p = 0.5 \frac{J}{g\,C} \, .$$

$a_0 \equiv \rho c_p$ hat demnach den Wert 2.0 J/(cm^3 ^{o}C).

Gesucht ist also im folgenden die Lösung der Differentialgleichung

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \dot{Q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \, ,$$

wieder mit den Randbedingungen von S. 20 oben:

Werte von $T(x,y,t)$ für $(x,y) \in R_1$ und für alle $t \leq 0$:

```
erster Punkt   (Nr. 4) = 30 Grad C
zweiter Punkt  (Nr.14) = 30 Grad C
dritter Punkt  (Nr. 8) = 75 Grad C
vierter Punkt  (Nr.13) = 50 Grad C
fuenfter Punkt (Nr. 3) = 50 Grad C
```

bzw.

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)+a_4T=0 \quad , \quad (x,y)\in R_{2,1}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)=0 \quad , \quad (x,y)\in R_{2,2}$$

Zusätzlich muß es für die orts- und zeitabhängige Lösungsfunktion $T(x,y,t)$ noch eine *Anfangsbedingung* geben, nämlich die Temperaturverteilung auf der Platte zum Zeitpunkt $t=t_0=0$. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß die Platte am Beginn des Experiments eine konstante Temperatur T_{anf} aufweist:

$$T(x,y,0)=T_{anf}\,.$$

Achtung: dies gilt natürlich nur für jene Stützpunkte, die nicht durch die Randwerte auf $(x,y)\in R_1$ bereits festgelegt sind!

Unter Einbeziehung der zeitlichen Ableitung ergibt sich für die Flächenintegrale gemäß (42) der Ausdruck

$$\frac{1}{2}M_1\begin{pmatrix}T_i\\T_j\\T_k\end{pmatrix}+\frac{a_0d_m}{24}M_2\begin{pmatrix}\dot{T}_i\\\dot{T}_j\\\dot{T}_k\end{pmatrix}=\frac{hd_m}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{48}$$

mit der Matrix $M_2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, sowie die gegenüber (45) unveränderte "Cauchy-Gleichung"

$$\frac{a_4d_{pq}}{6}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_p\\T_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{49}$$

Diese Matrixgleichungen können – wie beim stationären Problem – durch Aufsummierung über alle Dreiecke bzw. über alle Randstrecken, welche der Cauchy-Bedingung unterworfen sind, zu einem linearen Gleichungssystem zusammengefügt werden. Dieses System, dessen Ordnung der Zahl aller Dreieckspunkte entspricht, besteht aus den Matrizen A und B sowie aus dem inhomogenen Vektor $\mathbf{f}$:

$$A\mathbf{T}+B\dot{\mathbf{T}}=\mathbf{f}\,, \tag{50}$$

wobei $\mathbf{T}$ den Vektor aller Temperaturpunkte im Grundgebiet bedeutet.

Beachten Sie, daß wegen der zeitlichen Konstanz der Koeffizientenfunktionen und der Randbedingungen die Matrizen A und B sowie der Vektor f keine Funktionen der Zeit sind und all diese Berechnungen vor den eigentlichen Zeitschritten durchgeführt werden können.

Was nun die numerische Behandlung der Zeitkoordinate betrifft, so soll im folgenden ein einfaches *Differenzenverfahren* verwendet werden, bei dem endliche Zeitschritte Δt durchführt werden:

$$t=0;\Delta t;2\Delta t;\ldots;\ell\Delta t;\ldots \tag{51}$$

Bei jedem Zeitschritt geht man davon aus, daß die Temperaturverteilung für den Ausgangszeitpunkt t, also der Vektor $\mathbf{T}(t)$, bekannt ist, und daß die Temperaturverteilung für den Zeitpunkt $t + \Delta t$, also der Vektor $\mathbf{T}(t + \Delta t)$, zu berechnen ist.

Nach dem *Verfahren von Heun* wird die in Glg. (50) enthaltene zeitliche Ableitung durch den Differenzenquotienten

$$\dot{\mathbf{T}}(t + \Delta t) \approx \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t} \tag{52}$$

approximiert, während für den im ersten Term von (50) auftretenden Vektor $\mathbf{T}(t)$ dessen <u>Mittelwert</u> über dem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ genommen wird. Faßt man diese Näherungen zusammen, ergibt sich aus der Matrixgleichung (50) für den Zeitschritt $t \to t + \Delta t$ die Differenzengleichung

$$A\,\frac{1}{2}\,[\mathbf{T}(t + \Delta t) + \mathbf{T}(t)] + B\,\frac{1}{\Delta t}\,[\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)] = \mathbf{f}$$

bzw.

$$A\,[\mathbf{T}(t + \Delta t) + \mathbf{T}(t)] + B\,\frac{2}{\Delta t}\,[\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)] = 2\mathbf{f}\,. \tag{53}$$

Löst man diese Gleichung nach dem unbekannten Vektor $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ auf, so erhält man den Ausdruck

$$\left[A + \frac{2}{\Delta t}B\right]\mathbf{T}(t + \Delta t) = 2\mathbf{f} - \left[A - \frac{2}{\Delta t}B\right]\mathbf{T}(t)\,,$$

bzw., unter Verwendung der Definitionen

$$A + \frac{2}{\Delta t}B \equiv C \qquad \text{und} \qquad A - \frac{2}{\Delta t}B \equiv D \tag{54}$$

das inhomogene, lineare Gleichungssystem

$$C\,\mathbf{T}(t + \Delta t) = 2\mathbf{f} - D\,\mathbf{T}(t)\,. \tag{55}$$

Nun bleibt nur noch zu besprechen, wie man beim gegebenen Problem mit der Anfangs-Temperaturverteilung bzw. mit den - zeitunabhängigen - Dirichlet-Temperaturen umgeht. Dies wird im folgenden gezeigt, wobei ein Netz angenommen wird, das aus nur 4 Punkten besteht:

In diesem Fall sieht das Gleichungssystem (55) so aus:

$$\begin{aligned}
c_{11}T_1 + c_{12}T_2 + c_{13}T_3 + c_{14}T_4 &= 2f_1 - d_{11}T_1^a - d_{12}T_2^a - d_{13}T_3^a - d_{14}T_4^a \\
c_{21}T_1 + c_{22}T_2 + c_{23}T_3 + c_{24}T_4 &= 2f_2 - d_{21}T_1^a - d_{22}T_2^a - d_{23}T_3^a - d_{24}T_4^a \\
c_{31}T_1 + c_{32}T_2 + c_{33}T_3 + c_{34}T_4 &= 2f_3 - d_{31}T_1^a - d_{32}T_2^a - d_{33}T_3^a - d_{34}T_4^a \\
c_{41}T_1 + c_{42}T_2 + c_{43}T_3 + c_{44}T_4 &= 2f_4 - d_{41}T_1^a - d_{42}T_2^a - d_{43}T_3^a - d_{44}T_4^a
\end{aligned}$$

Angenommen, die Temperatur $T_3 = T_3^a = W_3$ sei eine zeitlich invariante Dirichlet-Temperatur an einem Randpunkt. Das bedeutet natürlich, daß diese Größe *keine Unbekannte* ist und daher alle Terme im obigen System, welche T_3 bzw. T_3^a enthalten, zum inhomogenen Vektor **f** zugeschlagen werden können:

$$\begin{aligned}
c_{11}T_1 + c_{12}T_2 + c_{14}T_4 &= (2f_1 - c_{13}W_3 - d13W_3) - d_{11}T_1^a - d_{12}T_2^a - d_{14}T_4^a \\
c_{21}T_1 + c_{22}T_2 + c_{24}T_4 &= (2f_2 - c_{23}W_3 - d23W_3) - d_{21}T_1^a - d_{22}T_2^a - d_{24}T_4^a \\
c_{31}T_1 + c_{32}T_2 + c_{34}T_4 &= (2f_3 - c_{33}W_3 - d33W_3) - d_{31}T_1^a - d_{32}T_2^a - d_{34}T_4^a \\
c_{41}T_1 + c_{42}T_2 + c_{44}T_4 &= (2f_4 - c_{43}W_3 - d43W_3) - d_{41}T_1^a - d_{42}T_2^a - d_{44}T_4^a
\end{aligned}$$

Aus den Definitionsgleichungen (54) folgt sofort

$$c_{ij} + d_{ij} = 2a_{ij}\,,$$

und das Gleichungssystem erhält die Form

$$\begin{aligned}
c_{11}T_1 + c_{12}T_2 + c_{14}T_4 &= 2(f_1 - a_{13}W_3) - d_{11}T_1^a - d_{12}T_2^a - d_{14}T_4^a \\
c_{21}T_1 + c_{22}T_2 + c_{24}T_4 &= 2(f_2 - a_{23}W_3) - d_{21}T_1^a - d_{22}T_2^a - d_{24}T_4^a \\
c_{31}T_1 + c_{32}T_2 + c_{34}T_4 &= 2(f_3 - a_{33}W_3) - d_{31}T_1^a - d_{32}T_2^a - d_{34}T_4^a \\
c_{41}T_1 + c_{42}T_2 + c_{44}T_4 &= 2(f_4 - a_{43}W_3) - d_{41}T_1^a - d_{42}T_2^a - d_{44}T_4^a
\end{aligned}$$

Damit haben wir <u>vier</u> Gleichungen für die <u>drei</u> unbekannten Temperaturen T_1, T_2 und T_4. Wir können also eine der vier obigen Gleichungen (sinnvollerweise die dritte) streichen *bzw. durch die triviale Gleichung*

$$T_3 = W_3$$

ersetzen. Wenn wir das so entstehende Gleichungssystem in Matrixform anschreiben, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f_1 - a_{13}W_3 \\ f_2 - a_{23}W_3 \\ 0 \\ f_4 - a_{43}W_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & d_{24} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & 0 & d_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^a \\ T_2^a \\ W_3 \\ T_4^a \end{pmatrix} . \tag{56}$$

Was nun die Definition der Temperaturverteilung für $t = 0$ betrifft, so nehmen wir für alle Netzpunkte dieselbe Temperatur T_{anf} an:

$$T(x, y, 0) = T_{anf}\,, \tag{57}$$

natürlich mit Ausnahme der Dirichlet-bestimmtem Randtemperaturen:

```
for(np=1; np<=npoint; np++) told[np]= Anfangstemperatur
```

Im folgenden Algorithmus (für einen Dirichlet-Punkt mit der Nummer "ind" und der Temperatur "wert[ind]") werden die obigen Überlegungen realisiert:

```
// Schleife ueber alle Dirichlet-Punkte:
   .
   .
// Behandlung des T-Wertes mit dem Index "ind", der auf Grund
// einer Dirichlet-Bedingung den Wert "wert[ind]" haben muss:
//    npoint = Zahl der zu berechnenden Punkte
   for(np=1; np<=npoint; np++) {
     f[np]=f[np] - amat[np][ind]*wert[ind];
     cmat[ind][np]=0.0;
     cmat[np][ind]=0.0;
     dmat[ind][np]=0.0;
     dmat[np][ind]=0.0;
   }

// Schleife ueber alle Dirichlet-Punkte:
   .
   .
   cmat[ind][ind]=1.0;
   dmat[ind][ind]=-1.0;
   f[ind]=0.0;
   told[ind]=wert[ind];
```

Das System (55) wird nun für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ gelöst, indem man die rechte (inhomogene) Seite der Gleichung unter Verwendung der (bereits bekannten) Temperaturwerte des vorherigen Zeitschrittes berechnet und danach ein LU-Programm oder ähnliches verwendet. Auf diese Weise wird Schritt für Schritt die zeitliche Veränderung der Temperaturverteilung auf der Platte bestimmt.
Nochmals soll darauf hingewiesen werden, daß im Falle zeitlich invariabler Koeffizientenfunktionen und Randbedingungen die Matrizen C und D sowie der Vektor $\mathbf{f}$ für alle Zeitschritte dieselben sind!

Dritte Aufgabe

- Erweitern Sie Ihr Programm, mit welchem Sie das stationäre Wärmeproblem behandelt haben, für eine Anwendung auf das 2-dim. Wärmeleitungsproblem.
- Verwenden Sie die Einteilung des Grundgebietes in finite Elemente gemäß der Abb. auf S. 18.
- Verwenden Sie die Randbedingungen von S. 22.
- Um die numerische Stabilität Ihres Programmes zu testen, lassen Sie das Programm mit verschiedenen Anfangstemperaturen T_{ANF} laufen:

  $$T(x, y, 0) = T_{anf}$$

  für alle Punkte außer (natürlich!) den Dirichlet'schen Randpunkten.
- Exekutieren Sie das Programm zweimal, nämlich für

  $$\dot{Q} = +5 \qquad \text{und} \qquad \dot{Q} = -5 \qquad \text{und} \quad a_4 = -0.3$$

- Berechnen Sie jeweils 100 Zeitschritte mit $\Delta t = 0.5$ s, und stellen Sie die sich verändernden Temperaturverteilungen in Form einer einfachen Animation dar.
- Zeigen Sie für den Stützpunkt Nr. 5 (2.0, 1.0) in einem Diagramm, wie sich die Temperatur als Funktion der Zeit (für 100 Zeitschritte) verändert.
- Zeigen Sie durch einen (grafischen) Vergleich der Temperaturverteilungen, daß die erhaltenen Ergebnisse nach 100 Zeitschritten die in der Aufgabe 2 erhaltenen stationären Lösungen bereits ausgezeichnet approximieren.

5. Schwingungsprobleme

Zum Abschluß des dritten Themas dieser LV soll noch eine andere wichtige Eigenschaft einer homogenen Platte diskutiert werden, nämlich die Schallleitung auf einer solchen Platte.

Es ist bekannt, daß die Ausbreitung einer Schallwelle mit einer Geschwindigkeit c in Materie darauf beruht, daß die Materieteilchen um ihre Ruhelagen Schwingungsbewegungen mit gleicher Frequenz ω und verschiedener, ortsabhängiger Amplitude ausführen. Makroskopisch beginnt die gesamte Platte zu vibrieren, wobei die Amplitudenverteilung verschiedene Muster bilden kann, die von den physikalischen Eigenschaften und insbesondere von der Form der Platte abhängen.

Man nennt diese unterschiedlichen Schwingungsmuster, welche i. a. mit verschiedenen Frequenzen ω verbunden sind, die *Eigenschwingungen* bzw. *Eigenschwingungs-Moden* der Platte.

Die mathematische Basis für eine quantitative Untersuchung dieses Problems, die hier nicht abgeleitet werden soll, ist die sogenannte *zweidimensionale Schwingungsgleichung*

$$\Delta u(x,y,t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}\,, \tag{58}$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der durchgehenden Schallwelle ist und die Lösungsfunktion $u(x,y,t)$ die Schwingungsbewegung eines Materieteilchens am Ort (x,y) beschreibt.

Es ist nun ein typisches Merkmal einer *Eigenschwingung* - und nur solche sollen hier untersucht werden - , daß alle Teilchen der Platte zwar mit verschiedenen Amplituden, aber mit derselben Frequenz ω schwingen. Nimmt man zusätzlich an, das alle Schwingungsbewegungen *harmonisch* ablaufen, kann man für die Lösung der Differentialgleichung (58) den Ansatz

$$u(x,y,t) = f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{59}$$

machen: *alle Teilchen der Platte schwingen harmonisch mit der Frequenz ω um ihre jeweiligen Ruhelagen, wobei die räumliche Verteilung der Amplituden durch die Ortsfunktion $f(x,y)$ beschrieben wird.*

Setzt man den Ansatz (59) in die Schwingungsgleichung (58) ein, ergibt sich

$$\Delta f(x,y) = -\frac{\omega^2}{c^2}\, f(x,y)$$

bzw. mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{60}$$

die Gleichung

$$\Delta f(x,y) + \lambda\, f(x,y) = 0\,. \tag{61}$$

Man erkennt sofort, daß dieser Ausdruck mit der auf S. 5 dieses Skriptums vorgestellten *homogenen Helmholtz-Gleichung* identisch ist. Wenn man nun davon ausgeht, daß auch alle Randbedingungen (egal ob vom Dirichlet-, Cauchy- oder Neumann-Typ) *homogen* sind, daß also an verschiedenen Randstücken R_D, R_C, R_N gilt:

$$f(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in R_D\,, \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} f(x,y) + f(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in R_C\,, \tag{63}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} f(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in R_N\,, \tag{64}$$

hat man es mit einem homogenen Randwertproblem vom Helmholtz-Typ zu tun.

Die entsprechenden linearen Gleichungssysteme für die Dgl. und die (wenn vorhanden) Cauchy-Bedingung ergeben sich aus den Gleichungen (42) und (43) mit $a_1 = a_2 = 1$, $g = \lambda$ und $h = a_0 = 0$ bzw. mit $a_5 = 0$ zu

$$\left(\frac{1}{2} M_1 - \lambda \frac{d_m}{24} M_2\right) \mathbf{f} = 0 \tag{65}$$

und

$$a_4 \frac{d_{pq}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \\ f_q \end{pmatrix} = 0\,. \tag{66}$$

Wie bereits aus den vorhergehenden Übungen gut bekannt, müssen auch hier eventuelle Dirichlet-Bedingungen "extra" berücksichtigt werden, während die homogene Neumann-Bedingung ($a_4 = 0$) überhaupt keine zusätzliche Rechnung erfordert.

Zum Abschluß dieser einführenden Bemerkungen soll nun noch die physikalische Bedeutung der drei Randbedingungs-Typen besprochen werden:

- Am einfachsten zu interpretieren ist die Dirichlet-Bedingung (62): in den Randbereichen, wo sie wirkt, wird jede Bewegung der Platte unterdrückt (die Platte ist dort "fest eingespannt").
- Wo die Neumann'sche Randbedingung (64) wirkt, ist die Platte völlig frei.
- Im Falle einer Cauchy-Bedingung (63) ist die Platte an den entsprechenden Randpunkten "elastisch eingebettet".

Wie sieht die numerische Behandlung des homogenen Randwertproblems vom Helmholtz-Typ aus? Dies soll nun für die einfachsten Randbedingungen diskutiert werden, nämlich für den Fall, daß die Platte entlang ihres gesamten Umfangs frei schwingen kann, d. h., daß entlang des gesamten Randes die (homogene) Neumann-Bedingung (64) gilt.

In diesem Fall braucht man sich ausschließlich nur um die linearen Gleichungssysteme vom Typ Glg. (65) zu kümmern. Das heißt, man nimmt Dreieck für Dreieck des Grundgebietes her, berechnet für jedes das entsprechende "kleine" lineare Gleichungssystem der Ordnung 3, und addiert diese Beiträge zum "großen" linearen System der Ordnung N, wobei N die Zahl der Stützpunkte auf der Platte bzw. an deren Rand bedeutet.

Da gibt es aber eine Schwierigkeit: während bei den Wärmeleitungsproblemen alle Parameter des Randwertproblems bekannt waren, ist im vorliegenden Fall der Parameter λ unbekannt.

Die Vorgangsweise muß also variiert werden: man "addiert" die beiden in der Gleichung (65) vorkommenden Matrizen getrennt auf und erhält dementsprechend zwei "große" Matrizen - nennen wir sie A und B. Auf diese Weise ergibt sich das folgende homogene lineare Gleichungssystem für die Werte der Lösungsfunktion $f(x,y)$ an den Stützpunkten (x_i, y_i) mit $i = 1, \ldots, N$:

$$(A - \lambda B)\,\mathbf{f} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_N \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Wie Sie vermutlich wissen, nennt man ein System vom Typus

$$(A - \lambda I)\mathbf{f} = 0$$

mit I = Einheitsmatrix das *lineare Eigenwertproblem der Matrix A*. Das Problem (67) unterscheidet sich davon dadurch, daß anstelle der Einheitsmatrix eine weitere Matrix B vorkommt: solche Probleme heißen in der Mathematik *lineare erweiterte Eigenwertprobleme.*

Wie Ihnen aus der linearen Algebra ebenfalls bekannt ist, haben Eigenwertprobleme wie Glg. (67) immer die sog. *triviale Lösung*

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt aber für bestimmte Werte von λ, die man die Eigenwerte des Gleichungssystems (67) nennt, auch nicht-triviale Lösungsvektoren (Eigenvektoren): es sind nun diese Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., welche gemäß der Beziehung

$$\omega_i = c\sqrt{\lambda_i} \tag{68}$$

die Frequenzen der *Eigenschwingungen* der untersuchten Platte ergeben; die Komponenten der zugehörigen *Eigenvektoren* $\mathbf{f}^{(i)}$ bedeuten die entsprechende Amplitudenverteilung auf der Platte.

Vierte Aufgabe

- Entwickeln Sie ein Programm, mit welchem Sie die Eigenwerte λ sowie die entsprechenden Amplitudenverteilungen von Schallwellen auf einer homogenen Platte numerisch bestimmen können.

- Die Platte, die Sie dabei untersuchen, sei rechteckig und habe in x-Richtung eine Seitenlänge von 5 und in y-Richtung eine Seitenlänge von 4 Einheiten. Die Einteilung dieses Grundgebietes in 266 Dreiecke (152 Stützpunkte) finden Sie auf dem Datenfile

  `Rechteck.266`

- Die Platte sei nach allen Seiten hin frei gelagert, d.h. auf der gesamten Umrandung herrsche die Neumann'sche Randbedingung (64).

- Berechnen Sie mittels der Methode der Finiten Elemente die Matrizen A und B für die erweiterte Eigenwertgleichung (67).

- Was die numerische Auswertung dieses Eigenwertproblems betrifft, so ist zu beachten, daß beide in Glg. (67) vorkommenden Matrizen symmetrisch sind, und daß darüber hinaus die Matrix B auch noch *positiv-definit* ist.

  Für solche Fälle bietet die Numerische Mathematik sehr effiziente Algorithmen an, die in kürzester Zeit die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen. Im Rahmen dieser LV stehen Ihnen dafür die folgenden Routinen zur Verfügung:

  1. Matlab-UserInnen verwenden am besten die Routine

     `eigs`

     Eine kurze und durchaus ausreichende Beschreibung dieses Programms erhalten Sie im Matlab-Fenster unter *"help eigs"*.

  2. C-UserInnen biete ich auf der Internetseite dieser LV die Routine

     `eigensystem.c`

     In diesem File finden Sie einige Hinweise über die Verwendung der dort enthaltenen Programme. Genauere Informationen über die Grundlagen und Details der Funktionen REDUC, TRED2 und TQLI finden Sie z.B. im Buch "Numerical Recipes C".

  3. Fortran-UserInnen finden auf der Internetseite dieser LV die Routine

     `eigsys.f90`

     Hier gilt sinngemäß dasselbe, was ich oben bzgl. des C-Programms sagte.
     Noch ein Hinweis: die in diesem File enthaltenen Subroutinen REDUC, TRED2 und TQL2 sind sehr leistungsfähige Programme aus der hoch-angesehenen EISPACK-Bibliothek, die ich für diese LV adaptiert habe.

- Bestimmen Sie die Amplitudenverteilungen von Schallwellen auf der Platte *für die 9 kleinsten, positiven Eigenwerte* λ.

- Gehen Sie dann mit dem Feld der Amplitudenwerte $\mathbf{f}$ genauso um wie früher mit dem Feld der Temperaturwerte $\mathbf{T}$, d.h.: legen Sie über das Rechteck ein Quadratnetz von 5 x 5 Einheiten (101 Netzpunkte in x- bzw. y-Richtung), und bestimmen Sie die Amplitudenwerte an diesen Netzpunkten durch lineare Interpolation der Finite-Elemente-Punkte.

- Stellen Sie die Amplitudenverteilungen mittels der Matlab-Routinen

```
matrix=load('ampl_daten');
pcolor(matrix);
caxis([ampl_min,ampl_max]);
axis('equal');
```

  grafisch dar.

Fünfte Aufgabe

Diese letzte Aufgabe zum Thema "Finite Elemente" schließt eng an das vorige Problem über die Eigenschwingungen einer rechteckigen Platte an.

- Als erstes soll die numerische Konvergenz der Finite-Elemente-Rechnung der Aufgabe 4 bzgl. der Eigenwerte λ untersucht werden. Zu diesem Zweck wiederholen Sie bitte die Rechnung mit einer deutlich höheren Zahl an Dreiecken bzw. Stützpunkten, indem Sie den Datenfile

```
Rechteck.1064
```

  herunterladen (1064 Dreiecke, 569 Stützpunkte).

  Vergleichen Sie die 9 kleinsten Eigenwerte mit den früheren Ergebnissen für 266 Dreiecke bzw. 152 Stützpunkte.

- Auf Grund der sehr einfachen Geometrie des Problems ergibt sich für Konvergenzkontrolle der Eigenwerte hier auch die Möglichkeit, die numerischen mit analytischen Ergebnissen zu vergleichen.

Im folgenden soll die analytische Rechnung der homogenen Helmholtz-Gleichung (61)

$$\Delta f(x,y) + \lambda f(x,y) = 0$$

mit der Neumann-Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0 \qquad \text{auf dem Rand}\, C \tag{69}$$

mit C als Rechteck mit $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq b$ skizziert werden:

Mit dem Separations-Ansatz

$$f(x,y) = X(x)\,Y(y) \tag{70}$$

geht die Dgl. in die Form

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0$$

über. Daraus ergibt sich

$$\frac{X''}{X} = -\frac{(Y'' + \lambda Y)}{Y} = -\kappa^2\,,$$

wobei κ eine vorerst unbestimmte Größe ist.

Daraus folgen die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X''(x) + \kappa^2 X(x) = 0 \qquad \text{und} \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0 \tag{71}$$

mit

$$\mu^2 = \lambda - \kappa^2\,. \tag{72}$$

Die <u>allgemeinen</u> Lösungen dieser Gleichungen lauten

$$X(x) = C_1 \sin(\kappa x) + C_2 \cos(\kappa x) \tag{73}$$

bzw.

$$Y(y) = C_3 \sin(\mu y) + C_4 \cos(\mu y)\,. \tag{74}$$

Die Koeffizienten C_1 bis C_4 werden nun durch die Neumann-Bedingungen

$$X'(0) = X'(a) = 0 \qquad \text{bzw.} \quad Y'(0) = Y'(b) = 0$$

bestimmt. Mit

$$X'(x) = C_1\kappa \cos(\kappa x) - C_2\kappa \sin(\kappa x)$$

und

$$Y'(y) = C_3\mu \cos(\mu y) - C_4\mu \sin(\mu y)$$

ergibt sich sofort

$$C_1 = 0 \qquad \text{und} \quad C_3 = 0 \tag{75}$$

sowie

$$C_2\kappa \sin(\kappa a) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{und} \quad C_4\mu \sin(\mu b) \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{76}$$

Die beiden letzten Bedingungen können nur durch

$$\kappa a = s\pi \qquad \text{bzw.} \quad \mu b = t\pi \tag{77}$$

erfüllt werden, wobei s und t beliebige ganze Zahlen ≥ 0 sind.

Kombiniert man die Gleichungen (73) und (77), so ergibt sich für die *Amplitudenfunktion*

$$f_{s,t}(x,y) \propto \cos\left(\frac{s\pi}{a}x\right)\,\cos\left(\frac{t\pi}{b}y\right)\,, \tag{78}$$

und die Eigenwerte λ erhält man aus Glg. (72) und (76) zu

$$\lambda_{s,t} = \left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \qquad \text{mit} \quad s,t = 0,1,2,\ldots \tag{79}$$

- Tragen sie Ihre numerischen Eigenwerte für 266 bzw. 1064 Dreiecke für die gegebene Rechtecksgröße $a = 5$ und $b = 4$ in die folgende Tabelle ein:

s	t	Glg.(79)	NEUMANN (266)	NEUMANN (1064)	DIRICHLET (266)	DIRICHLET (1064)
0	0	0.0000				
1	0	0.3948				
0	1	0.6169				
1	1	1.0116				
2	0	1.5790				
2	1	2.1960				
0	2	2.4674				
1	2	2.8622				
3	0	3.5531				

- Als letzte Rechnung dieser Aufgabe sollen Sie nun das Schwingungsproblem für das Rechteck nochmals rechnen (und zwar wieder für beide Dreiecks-Zahlen 266 und 1064), diesmal aber für eine Platte, die am gesamten Rand fixiert ist, d.h. für welche die *Dirichlet-Bedingung*

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{auf dem Rand}\, C \tag{80}$$

  mit C als Rechteck mit $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq b$ gilt.

- Wie Sie es bei der Dirichlet-Bedingung bereits gewohnt sind, muß diese Bedingung "zusätzlich" in die Finite-Elemente-Matrizen einbezogen werden. Dies ist bei den *inhomogenen* Temperaturproblemen (Aufgaben 1-3 dieser Übung) durch bestimmte Algorithmen geschehen (vgl. S. 16 unten bzw. S. 25f).

  Beim nun vorliegenden *homogenen* Problem geht man etwas anders vor, und zwar folgendermaßen:

  Da alle Dirichlet-Randpunkte den Wert Null haben müssen, weiß man von vornherein, daß die entsprechenden Komponenten der

Eigenvektoren verschwinden müssen; dementsprechend können diese "Unbekannten" im Eigenwertsystem

$$(A - \lambda B)\mathbf{f} = 0$$

a priori eliminiert werden. Dies geschieht, indem man die den Dirichlet-Punkten entsprechenden Zeilen und Spalten aus <u>beiden</u> Matrizen A und B herausstreicht d.h. diese Matrizen um diese Eintragungen reduziert.

Diese Matrixreduktionen entlasten das Eigenwertproblem beträchtlich, haben aber einen Nachteil: wenn Sie - wie üblich - bei der Vorbereitung der grafischen Ausgabe der Amplitudenverteilung $f(x, y)$ die Interpolationen in das engmaschige $(x-y)$-Netz (101 x 101 Punkte) durchführen, *fehlen Ihnen in den dazu nötigen Eigenvektoren die "trivialen" Nullwerte für die Randpunkte.*

Es ist Ihre Aufgabe, dafür eine numerisch geschickte Lösung zu finden!

- Bestimmen Sie wie im Falle der Neumann-Randbedingung (vierte Aufgabe) die 9 kleinsten Eigenwerte, und tragen Sie Ergebnisse in die obige Tabelle ein.

  Hier werden Ihnen einige (scheinbar) merkwürdige Dinge auffallen. Versuchen Sie dafür eine Erklärung zu finden, wobei ich Ihnen die entsprechende analytische Lösung des Problems als Hilfe anbiete:

$$f_{s,t}(x, y) \propto \sin\left(\frac{s\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{t\pi}{b}y\right) , \qquad (81)$$

$$\lambda_{s,t} = \left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 . \qquad (82)$$

- Stellen Sie die Amplitudenverteilungen der Dirichlet-Eigenschwingungen mittels der üblichen Matlab-Routinen dar.

6. Was bietet das Internet?

Wie auch bei den anderen Themen im Rahmen dieser Lehrveranstaltung ist es auch bei den Stichworten "Finite-Elemente-Methode" oder "Partielle Differentialgleichungen" völlig ausgeschlossen, auch nur einen Überblick über das Informationsangebot zu geben, das es auf diesen Gebieten im Internet gibt.

Daher im folgenden nur eine kurze (und rein subjektive) Auswahl.

Einige Software-Angebote

Für die Lösung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen gibt es, vor allem für den elliptischen Typ, eine große Anzahl kommerzieller und frei verfügbarer Software. Viele dieser Programme arbeiten mittels der Finite-Elemente-Methode. Einen kompakten Überblick über dieses Angebot finden Sie z.B. bei Ch. Überhuber, *Computer-Numerik 1*, Springer, Berlin 1995. Im folgenden eine kurze Zusammenfassung daraus:

- Speziell für elliptische Randwertprobleme (Helmholtz, Poisson, Laplace; Dirichlet-, Neumann-, gemischte Randbedingung) gibt es das Programmpaket ELLPACK. Eine Einführung in dieses *high-level* Programmsystem bietet das Buch von J.R. Rice und R.F. Boisvert, *Solving Elliptic Problems Using ELLPACK*, Springer, Berlin 1985. Für eine Jahreslizenz von US 275,- erhält man den FORTRAN-Sourcecode, eine Installationshilfe sowie 2 Exemplare dieses Buches.
  Für nähere Informationen besuchen Sie das Internet unter

  `www.cs.purdue.edu/ellpack/ellpack.html`

- Die bekannte NETLIB, die Sie unter

  `www.netlib.org   ==> Browse the netlib repository`

  besuchen können, bietet das FORTRAN-Softwarepaket PLTMG *Piecewise Linear Triangle Multi Grid Package*, das von R.E. Bank (Uni San Diego, Kalifornien) entwickelt wurde. Die Programme sind frei verfügbar, die Dokumentation dazu (R.E. Bank, *PLTMG – A Software Package for Solving Elliptic Partial Differential Equations*) finden Sie unter dem Filenamen

  `guide_PLTMG.pdf`

  auf der Website zu dieser LV.

- Am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin wurde das C++-Modulpaket KASKADE entwickelt, mit dem sich Finite-Elemente-Programme implementieren lassen (*free of charge for scientific and educational purposes*). Dieses "Software package for solving partial differential equations in 1, 2, and 3 space dimensions" stammt von R. Beck, R. Roitzsch und B. Erdmann.
  Informationen gibt es auf

  `www.zib.de/Numerik/numsoft/kaskade`

- Eine Reihe von Einzelprogrammen in FORTRAN, die in der Zeitschrift *Transactions on Mathematical Software* (TOMS) publiziert wurden, beschäftigen sich ebenfalls mit der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Hier nur einige Beispiele:

```
NETLIB/
  TOMS/541   Helmholtz'sche Dgl. in verschiedenen Koord.systemen

  TOMS/572   Helmholtz'sche Dgl. mit Dirichlet-RB

  TOMS/593   2-dim Helmholz'sche Dgl., Dirichlet-, Neumann-RB

  TOMS/629   3-dim Laplacegleichung mit Dirichlet-RB

  TOMS/732   Randwertprobleme mir selbst-adjungierten elliptischen
             Differentialoperatoren; Dirichlet-RB.
```

Software-Angebote in MATLAB

- Eine relativ kurze Matlab-Implementierung der Finite-Elemente-Methode (Dreiecke, Parallelogramme) in der Anwendung auf elliptische Probleme wurde 1999 von J. Alberty, C. Carstensen und S.A. Funken, Numerical Algorithms **20**, 117-137, publiziert[5]. Die Theorie dazu ist relativ leicht lesbar, und es gibt einige instruktive Beispiele.
  Diese Veröffentlichung und auch die dazugehörenden Programme können Sie von der Website zu dieser Lehrveranstaltung downloaden. Die Filenamen lauten:

```
Alberty.pdf                         (Publikation)

Alberty_README
acf_unix.tar.gz                     (Programme)
```

[5] Titel der Arbeit: *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation.*

- Ein besonders gutes Angebot an Matlab-User ist im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen natürlich die

  `Partial Differential Equations (PDE) Toolbox,`

  die Sie im Matlab-Fenster mittels

  pdetool

  aufrufen können. Dort erhalten Sie auch alle Informationen, die Sie brauchen, um diese sehr leistungsfähige Software effizient nutzen zu können, insbesondere (in pdf-Format) den ausführlichen *User's Guide* (284 Seiten).

- Noch wesentlich über das Angebot der PDE Toolbox hinaus geht das Programmsystem

  `FEMLAB ,`

  "a new package for solving coupled systems of partial differential equations". Internet-Informationen über dieses Programm finden Sie unter der Adresse

  `www.femlab.com/femlab`

Wie Sie auch ohne Matlab-Kenntnisse diese Software zum Erstellen von FEM-Daten nuetzen koennen, zeige ich Ihnen nun. Es gibt zum Downladen die beiden Matlab-Routinen

`dreicksnetze.m` und `PET_output.m`

Im folgenden das Listing von "dreiecknetze.m", das Ihnen erklärt, wie Sie vorgehen muessen:

```
% Mit Hilfe von Routinen, welche Teil des Matlab-Programmsystems
%                    pdetool
% sind, kann man Dreiecksnetze fuer die FEM-Anwendung generieren:

clear all

% Definition der Flaeche = geschlossenes Vieleck !!
% (als Beispiel: das unregelmaessige Viereck der Aufgaben 1-3):

% Vektor mit den x-Komponenten der Stuetzpunkte:
  xpoints=[1 4 2 0];

% Vektor mit den y-Komponenten der Stuetzpunkte:
  ypoints=[0 0 3 1];

% AUFRUF DER MATLAB-ROUTINE   pdepoly
  [pde_fig,ax]=pdeinit;
  set(ax,'XLim',[-0.5 4.5]);
  set(ax,'YLim',[-0.5 3.5]);

  pdepoly(xpoints,ypoints);

% Es oeffnet sich ein pdetool-Fenster, in dem die
% Grundflaeche dargestellt ist.
% Die weitere Bearbeitung kann direkt in diesem Fenster erfolgen,
% und zwar durch druecken des Menuepunktes

%           Mesh --> Initialize Mesh

% Alle Angaben, die Sie fuer die FEM-Anwendung brauchen,
% koennen Sie nun wie folgt ausgeben:

% Menuepunkt     Mesh --> Export Mesh
% Es oeffnet sich ein Fenster  " p  e  t"    --> OK druecken

% Dann das pde-Fenster schliessen und (im Matlab-Fenster)
%     PET_output
% eingeben.

% Alle FEM-relevanten Daten befinden sich dann auf dem File
%     FEM_daten
```